

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.017>  
УДК 539.3

**Е.А. Дмитриева, А.А. Каминский, Е.Е. Курчаков**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев  
E-mail: fract@inmech.kiev.ua

## **О влиянии продольной растягивающей нагрузки на деформацию нелинейного упругого анизотропного тела с трещиной нормального отрыва**

*Представлено академиком НАН Украины В.Д. Кубенко*

*Изучена деформация нелинейного упругого ортотропного тела с трещиной нормального отрыва, у вершины которой образуется зона предразрушения. Рассмотрен случай плоского напряженного состояния. Краевая задача поставлена в компонентах вектора перемещения. Для этого привлечены тензорно-линейные определяющие уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций, и конститутивные уравнения, связывающие компоненты векторов напряжения в противоположных точках на границах зоны предразрушения с компонентами вектора смещения относительно друг друга этих точек. Решение краевой задачи получено численно, для чего частные производные в основных уравнениях были представлены через конечные разности. При решении краевой задачи использован метод дополнительных напряжений, предложенный авторами ранее. В результате решения краевой задачи выявлено влияние продольной растягивающей нагрузки на нормальные компоненты тензора деформаций и нормальные компоненты тензора напряжений в точках на границах зоны предразрушения. В частности, установлено, что продольная растягивающая нагрузка существенно сказывается на нормальных компонентах тензора напряжений в точках, совпадавших в исходном положении с вершиной трещины.*

**Ключевые слова:** *нелинейное упругое ортотропное тело, трещина нормального отрыва, зона предразрушения.*

При постановке краевых задач механики разрушения надлежит учитывать зону предразрушения, образующуюся у вершины трещины. Однако это сопряжено с определенными трудностями. Избежать их можно, упрощенно представляя зону предразрушения. В настоящей работе, следуя статьям [1, 2], границы зоны предразрушения будем интерпретировать как поверхности раскрытого разреза, к которым приложены векторы напряжения. Компоненты векторов напряжения в противоположных точках на границах зоны предразрушения будем полагать зависящими от компонент вектора смещения относительно друг друга этих точек, и воспользуемся конститутивными уравнениями, установленными в

---

Цитування: Дмитриева Е.А., Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О влиянии продольной растягивающей нагрузки на деформацию нелинейного упругого анизотропного тела с трещиной нормального отрыва. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 5. С. 17–30. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.017>

статье [3]. Решая краевую задачу, будем требовать, чтобы в конце зоны предразрушения соблюдался критерий прочности.

Рассмотрим нелинейное упругое ортотропное тело малой толщины с трещиной нормального отрыва. Решив краевую задачу для нескольких вариантов граничных условий, выявим влияние продольной растягивающей нагрузки на нормальные компоненты тензора деформаций и нормальные компоненты тензора напряжений в точках на границах зоны предразрушения.

Ограничимся малыми деформациями. Постановку краевой задачи осуществим в компонентах вектора перемещения.

**Определяющие уравнения.** Обратимся к следующим тензорно-линейным определяющим уравнениям, связывающим компоненты тензора напряжений  $\mathbf{S}$  с компонентами тензора деформаций  $\mathbf{D}$  [4]:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1)$$

Здесь

$$\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (2)$$

Инварианты  $E$ , а также  $Z$  и  $\Xi$  имеют вид

$$E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (3)$$

Взаимно обратные тензоры четвертого ранга  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , характеризующие анизотропию, обладают высокой симметрией. То есть, в компонентах этих тензоров можно менять местами как индексы, относящиеся к любой одной паре индексов, так и сами пары индексов.

Заметим, что компоненты тензоров  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , как компоненты взаимно обратных тензоров четвертого ранга, должны удовлетворять формулам [5]

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta\epsilon\zeta} = \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\zeta} \quad (\epsilon, \zeta). \quad (4)$$

В формулах (4) фигурируют символы Кронекера:

$$\delta_{\gamma}^{\eta} = \begin{cases} 1 & (\gamma = \eta); \\ 0 & (\gamma \neq \eta). \end{cases} \quad (5)$$

Выполнив в уравнениях (1) замену индексов, будем иметь

$$S^{\gamma\delta} = G^{\gamma\delta\epsilon\zeta} D_{\epsilon\zeta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\gamma\delta\epsilon\zeta} D_{\epsilon\zeta} - \frac{E}{Z} g^{\gamma\delta} \right). \quad (6)$$

Свернув уравнения (6) с  $F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta}$ , учтя формулы (4) и равенства (5), а также первый и второй из инвариантов (3), получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}. \quad (7)$$

Здесь

$$\mathbf{H} = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta}. \quad (8)$$

Следовательно, в каждой точке нелинейного упругого анизотропного тела, следующего уравнениям (1), компоненты тензоров  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{D}$  должны удовлетворять формуле (7).

**Постановка краевой задачи.** Пусть система координат  $x^1, x^2, x^3$ , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g_{\varepsilon\zeta} = g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (9)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещения  $\mathbf{u}$ .

Представим компоненты тензора  $\mathbf{D}$  через частные производные от компонент вектора  $\mathbf{u}$  по координатам, для чего обратимся к соотношениям Коши [6]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x^{\zeta}} \quad (\varepsilon, \zeta). \quad (10)$$

Используя соотношения (10), запишем уравнения (1) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} g^{\alpha\beta} \right). \quad (11)$$

В силу соотношений (10) первый и третий из инвариантов (3) будут

$$\mathbf{E} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x^{\delta}}. \quad (12)$$

Предположим, что тело является ортотропным, а главные направления совпадают с направлениями осей  $x^1, x^2, x^3$ .

Остановимся на случае плоского напряженного состояния, в котором

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2); \quad (13)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 3; \alpha = 3, \beta = 1, 2; \alpha = 3, \beta = 3). \quad (14)$$

Поскольку  $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$ , то, учитывая равенства (9) и первые четыре из равенств (14), на основании уравнений (11) установим

$$\frac{\partial u_{\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial u_{\delta}}{\partial x^{\gamma}} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \delta = 3; \gamma = 3, \delta = 1, 2). \quad (15)$$

А учитывая равенства (9) и пятое из равенств (14), на основании шестого из уравнений (11) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{1}{G^{3333}} \left[ \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} \right) - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \quad (16)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G^{1111} &\equiv \mu_{AA}, \quad G^{1212} \equiv \mu_{BB}, \quad G^{1122} \equiv \mu_{AD}, \quad G^{2222} \equiv \mu_{DD}, \\ G^{1133} &\equiv \mu_{AF}, \quad G^{2233} \equiv \mu_{DF}, \quad G^{3333} \equiv \mu_{FF}; \\ G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} &\equiv \check{\mu}_{AA}, \quad G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{AD}, \\ G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} &\equiv \check{\mu}_{DA}, \quad G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{DD}. \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (11), а также равенствам (9) и выражению (16), для компонент тензора  $\mathcal{S}$ , не равных нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} S^{11} &= \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \check{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} \right]; \\ S^{12} = S^{21} &= \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - \check{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \\ S^{22} &= \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \check{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

В соответствии с равенствами (9) первый из инвариантов (12) примет вид

$$\mathbf{E} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (18)$$

Используя равенства (15), представим второй из инвариантов (12) в виде

$$\begin{aligned} \Xi &= \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \\ &+ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \left( 2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Обратимся к уравнениям Навье [6]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (20)$$

Допустим, что тело однородно.

Учитывая формулы (13), а также равенства (14) и уравнения (17), на основании уравнений (20) установим

$$\begin{aligned} \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^1} \right) &= Q^1; \\ \mu_{BB} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \right) + \check{\mu}_{DA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$Q^1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \tilde{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] \right\} + \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \tilde{\varphi}(\Omega) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right];$$

$$Q^2 = \mu_{BB} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \tilde{\varphi}(\Omega) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \tilde{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] \right\}.$$
(22)

На границах тела, берегах трещины и границах зоны предразрушения зададим вектор напряжения  $\mathbf{P}$  с компонентами  $P^\alpha$ .

Обратимся к граничным условиям [6]:

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha,$$
(23)

где  $n_\beta$  — компоненты единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Учитывая равенства (14) и уравнения (17), на основании условий (23) получим

$$\left( \tilde{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 = P^1 + R^1;$$

$$\mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left( \tilde{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 = P^2 + R^2.$$
(24)

Здесь

$$R^1 = \tilde{\varphi}(\Omega) \left\{ \left[ \tilde{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{AF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right\};$$

$$R^2 = \tilde{\varphi}(\Omega) \left\{ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_1 + \left[ \tilde{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \left( 1 - \frac{\mu_{DF}}{\mu_{FF}} \right) \frac{E}{Z} \right] n_2 \right\}.$$
(25)

Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси  $x^1, x^2$ .

Нагрузки на тело будем предполагать симметричными относительно осей  $x^1, x^2$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь четвертой части тела, например, располагающейся в первом квадранте (рис. 1).

Начало зоны предразрушения обозначим  $A$ , а конец зоны предразрушения —  $B$ .

Укажем, что для верхней и боковой границ рассматриваемой части тела  $n_1 = 1, n_2 = 0$  и  $n_1 = 0, n_2 = 1$  соответственно. А для верхнего берега трещины и верхней границы зоны предразрушения  $-n_1 = 1, n_2 = 0$ .

Вектор  $\mathbf{P}$  в точках на границах рассматриваемой части тела запишем так:

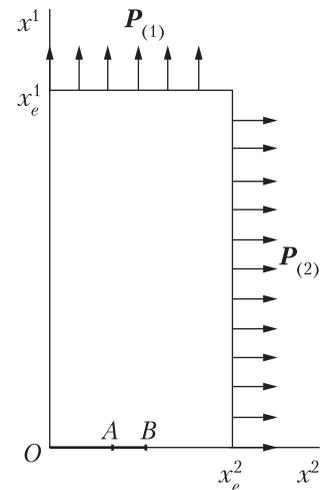


Рис. 1

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(x^1, x^2) \equiv \begin{cases} \mathbf{P}_{(1)}, & \text{если } x^1 = x_e^1, x^2 \in [0, x_e^2]; \\ \mathbf{P}_{(2)}, & \text{если } x^2 = x_e^2, x^1 \in [0, x_e^1]. \end{cases}$$

Для модулей векторов  $\mathbf{P}_{(i)}$  имеем

$$P_{(i)} = \sqrt{g_{\alpha\beta} P_{(i)}^\alpha P_{(i)}^\beta} \quad (i = 1, 2). \quad (26)$$

Будем считать, что лишь компонента  $P_{(1)}^1$  вектора  $\mathbf{P}_{(1)}$  и компонента  $P_{(2)}^2$  вектора  $\mathbf{P}_{(2)}$  не равны нулю. В этом случае вектор  $\mathbf{P}_{(1)}$  и вектор  $\mathbf{P}_{(2)}$  будут представлять поперечную и продольную (по отношению к трещине) нагрузки. А в соответствии с формулами (26) будем иметь

$$P_{(1)} = \sqrt{g_{11} P_{(1)}^1 P_{(1)}^1}; \quad P_{(2)} = \sqrt{g_{22} P_{(2)}^2 P_{(2)}^2}. \quad (27)$$

Подчеркнем, что в нашей задаче

$$P_{(1)}^1 \geq 0; \quad P_{(2)}^2 \geq 0. \quad (28)$$

Учитывая равенства (9) и неравенства (28), на основании формул (27) получим

$$P_{(1)} = P_{(1)}^1; \quad P_{(2)} = P_{(2)}^2. \quad (29)$$

Положим, что вектор  $\mathbf{P}$  в точках на верхнем берегу трещины является нулевым, то есть  $P^1 = P^2 = 0$ .

Введем вектор  $\mathbf{v}$ , изображающий смещение точек на верхней границе зоны предразрушения относительно точек на нижней границе зоны предразрушения.

Компоненты вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения необходимо связать с компонентами вектора  $\mathbf{v}$ .

В записи через соответствующие квадратичные формы модуль вектора  $\mathbf{P}$  и модуль вектора  $\mathbf{v}$  будут

$$P = \sqrt{g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}; \quad v = \sqrt{g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}. \quad (30)$$

Примем, что  $P|_{v=0} \equiv P_o$ .

Обратимся к таким конститутивным уравнениям [3]:

$$P^\alpha = P_o [\tilde{f}(v) - 1] \frac{g^{\alpha\beta} v_\beta}{v}, \quad (31)$$

где  $\tilde{f}(v)$  — функция, возрастающая в промежутке  $(0, \eta)$ .

Очевидно, что в нашей задаче

$$v_1 \geq 0, \quad (32)$$

а

$$v_2 = v_3 = 0. \quad (33)$$

Учитывая равенства (9), а также неравенство (32) и равенства (33), на основании второй из формул (30) получим

$$v = v_1. \quad (34)$$

Для компоненты  $v_1$  вектора  $\mathbf{v}$  имеем

$$v_1 = 2u_1. \quad (35)$$

Согласно уравнениям (31), равенствам (9), а также равенствам (33) и формуле (34), для компонент вектора  $\mathbf{P}$  установим

$$P^1 = P_0 [\tilde{f}(v) - 1]; \quad (36)$$

$$P^2 = P^3 = 0. \quad (37)$$

Для решения краевой задачи потребуется еще одна группа уравнений.

Из симметрии относительно осей  $x^1, x^2$  следуют такие уравнения:

$$u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, x^2) = 0; \quad u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, x^2) = 0; \quad (38)$$

$$u_1(-x^1, x^2) + u_1(x^1, x^2) = 0; \quad u_2(-x^1, x^2) - u_2(x^1, x^2) = 0.$$

Кроме того, из симметрии относительно оси  $x^2$  вытекает уравнение для компоненты  $u_1$  вектора  $\mathbf{u}$  в конце зоны предразрушения

$$u_1 = 0. \quad (39)$$

Выведем уравнение для компоненты  $u_2$  вектора  $\mathbf{u}$  в конце зоны предразрушения.

Выделим около конца зоны предразрушения некоторую точку  $(x_c^1, x_c^2)$ . Будем предполагать, что  $u_2(x^1, x^2)$  — действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные (по второй порядок включительно) в окрестности точки  $(x_c^1, x_c^2)$ .

Составив кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням  $x^1 - x_c^1, x^2 - x_c^2$ , и записав координаты конца зоны предразрушения как  $x_c^1 + \varepsilon^1, x_c^2 + \varepsilon^2$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & -u_2(x_c^1 + \varepsilon^1, x_c^2 + \varepsilon^2) + u_2(x_c^1, x_c^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(x_c^1, x_c^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(x_c^1, x_c^2)} \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(x_c^1, x_c^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(x_c^1, x_c^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(x_c^1, x_c^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Поступая аналогично, выведем уравнения для компонент  $u_1, u_2$  вектора  $\mathbf{u}$  в угловой точке рассматриваемой части тела — точке с координатами  $(x_d^1, x_d^2)$ .

Выделим около угловой точки некоторую точку  $(x_d^1, x_d^2)$ . Будем предполагать, что  $u_\alpha(x^1, x^2)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — действительные функции, имеющие все непрерывные частные производные (по второй порядок включительно) в окрестности точки  $(x_d^1, x_d^2)$ .

Составив кратные ряды Тейлора, расположенные по степеням  $x^1 - x_d^1, x^2 - x_d^2$ , и записав координаты угловой точки как  $x_d^1 + \zeta^1, x_d^2 + \zeta^2$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
 & -u_{\alpha}(x_d^1 + \zeta^1, x_d^2 + \zeta^2) + u_{\alpha}(x_d^1, x_d^2) + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^1} \Big|_{(x_d^1, x_d^2)} \zeta^1 + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^2} \Big|_{(x_d^1, x_d^2)} \zeta^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(x_d^1, x_d^2)} \zeta^1 \zeta^1 + 2 \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(x_d^1, x_d^2)} \zeta^1 \zeta^2 + \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(x_d^1, x_d^2)} \zeta^2 \zeta^2 \right) = 0. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Решение краевой задачи получим численно. Для этого частные производные в основных уравнениях представим через конечные разности.

**Числовой пример.** Используются данные для сплава Д16, приведенные в статье [7]. Компоненты тензора  $\mathbf{F}$  являются такими:

$$\begin{aligned}
 F_{1111} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & -F_{1122} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & -F_{1133} &= 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \\
 F_{1212} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{1313} &= 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{2222} &= 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \\
 -F_{2233} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{2323} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{3333} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Компоненты тензора  $\mathbf{G}$  вычислены по формулам (4) (с учетом равенств (5)):

$$\begin{aligned}
 G^{1111} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1122} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1133} &= 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\
 G^{1212} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1313} &= 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{2222} &= 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\
 G^{2233} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{2323} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{3333} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}.
 \end{aligned}$$

Функция  $\tilde{\varphi}(\Omega)$  принята в виде [4]

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0, & \Omega \in [0, \nu]; \\ \frac{\Omega - \nu - a \ln\left(\frac{\Omega - \nu}{a} + 1\right)}{\Omega}, & \Omega \in [\nu, \psi]. \end{cases} \quad (42)$$

Константы  $\nu$  и  $\psi$ , а также коэффициент  $a$  таковы:

$$\nu = 0,325 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}, \quad \psi = 9,350 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 0,11112866 \cdot 10^3 \text{ Па}^{1/2}.$$

При решении краевой задачи будет необходим критерий прочности. Как установлено в статье [4], критерий прочности для тела, следующего уравнениям (1), имеет вид

$$\Omega = \psi. \quad (43)$$

Функция  $\tilde{f}(\nu)$  принята в виде [3]

$$\tilde{f}(\nu) = b_{k_1} \nu^{k_1} + b_{k_2} \nu^{k_2}, \quad (44)$$

где  $k_1, k_2$  — целые числа ( $1 < k_1 < k_2$ ).

Для коэффициентов  $b_{k_1}, b_{k_2}$  имеем:

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \quad (45)$$

Здесь  $m = -\frac{d}{dv} \tilde{f}(v) \Big|_{v=\eta}$ .

Принято, что  $k_1 = 2, k_2 = 3; m = -0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; \eta = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ .

По формулам (45) вычислены коэффициенты  $b_{k_1}, b_{k_2}; b_{k_1} = 0,08 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}, b_{k_2} = -0,008 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$ .

Размеры рассматриваемой части тела по осям  $x^1, x^2$ , обозначенные  $s_{(1)}, s_{(2)}$ , приняты такими:

$$s_{(1)} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad s_{(2)} = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Были заданы

$$x_c^1 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_c^2 = 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_d^1 = 5,98 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_d^2 = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ -\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \zeta^1 = \zeta^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Длина трещины  $l_R$  и длина зоны предразрушения  $l_S$  являлись следующими:

$$l_R = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad l_S = 0,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Согласно первому из условий (23), для компоненты  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения ( $-n_1 = 1, n_2 = 0$ ) будем иметь

$$-S^{11} = P^1. \quad (46)$$

Воспользовавшись уравнением (36), представим условие (46) в виде

$$S^{11} = P_o [1 - \tilde{f}(v)]. \quad (47)$$

В точке  $B$ , согласно формулам (34), (35) и уравнению (39),

$$v = 0. \quad (48)$$

Для компоненты  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точке  $B$  на основании условия (47) (с учетом формулы (44) и равенства (48)) имеем

$$S^{11} = P_o. \quad (49)$$

Отметим, что величина  $P_o$  и модуль вектора  $\mathbf{P}_{(1)}$  подлежали определению при решении краевой задачи (из требования, чтобы в точке  $B$  выполнялось условие (49) и соблюдался критерий (43)). Изначально величину  $P_o$  и модуль вектора  $\mathbf{P}_{(1)}$  задавали.

Решение краевой задачи получено для четырех вариантов граничных условий, различающихся модулем вектора  $\mathbf{P}_{(2)}$ . Этот модуль был равен нулю для первого варианта и составлял  $1 \cdot 10^7$  Па для второго варианта,  $2 \cdot 10^7$  Па для третьего варианта, а также  $3 \cdot 10^7$  Па для четвертого варианта.

Подразумевалось, что к телу прикладывались сначала продольная, а затем поперечная растягивающие нагрузки. При таком порядке приложения к телу данных нагрузок зона предразрушения, образовавшись у вершины трещины, будет увеличиваться в размерах (как удлиняться, так и расширяться).

Учитывая формулы (29), используя уравнения (21) и (24), уравнение (36) и первое из равенств (37), уравнения (38) – (41), отыскивали компоненты  $u_1, u_2$ . Делали это методом последовательных приближений, изложенном в статье [1]. В первом приближении полагали, что  $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$ , а также  $\tilde{f}(v) = 0$ . В каждом последующем приближении, одном из 89-ти приближений, значения функции  $\tilde{\varphi}(\Omega)$ , величин  $Q^1, Q^2$  и  $R^1, R^2$ , а также функции  $\tilde{f}(v)$  устанавливали на основе значений компонент  $u_1, u_2$ , полученных в предыдущем приближении. Для этого привлекали формулы (42) и (2), инварианты (18), (19), выражение (16), формулы (22) и (25), а также формулы (44), (34) и (35).

Затем на основе значений компонент  $u_1, u_2$ , полученных в последнем приближении, вычисляли компоненту  $S^{11}$  тензора  $S$  в точке  $B$ . Для этого привлекали первое из уравнений (17), формулы (42) и (2), инварианты (18), (19), выражение (16). Если названная компонента не удовлетворяла условию (49), то величину  $P_o$  корректировали, и опять решали краевую задачу.

Наконец, проверяли соблюдение критерия (43) в точке  $B$ . Если это не имело места, то модуль вектора  $P_{(1)}$  корректировали, и все выполняли снова.

**Анализ полученных результатов.** При решении краевой задачи определены величина  $P_o$  и модуль вектора  $P_{(1)}$  (табл. 1). Как видно, продольная растягивающая нагрузка оказалась как на величине  $P_o$ , так и на модуле вектора  $P_{(1)}$ . Причем, от варианта к варианту величина  $P_o$  убывала, а модуль вектора  $P_{(1)}$  возрастал. Однако эти изменения не были существенными.

На основе значений компоненты  $u_1$  вектора  $u$  в точках на верхней границе зоны предразрушения вычислен модуль вектора  $v$ . Для этого привлекались формулы (34) и (35). В табл. 2 приведены значения  $v \cdot 10^5$ , м. Как и следовало ожидать, от варианта к варианту модуль вектора  $v$  каждой пары противоположных точек на границах зоны предразрушения убывал. Наиболее существенным было изменение модуля вектора относительного смещения точек на границах зоны предразрушения, совпадавших в исходном положении с вершиной трещины. Для этих точек  $x^2 = 1,50 \cdot 10^{-2}$  м. Заметим, что от варианта к варианту изменение модуля указанного вектора становилось все меньшим. В частности, оно составило  $-0,1381 \cdot 10^{-5}$  м для второго варианта по сравнению с первым вариантом,  $-0,1180 \cdot 10^{-5}$  м

Таблица 1

Вариант	$P_o \cdot 10^{-8}$ , Па	$P_{(1)} \cdot 10^{-7}$ , Па
1	2,0087	5,9098
2	1,9962	5,9571
3	1,9851	5,9820
4	1,9745	5,9869

Таблица 2

Вариант	$x^2 \cdot 10^2$ , м					
	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60
1	4,0622	3,5817	3,0127	2,3617	1,6220	0,8705
2	3,9241	3,4618	2,9183	2,2991	1,5899	0,8689
3	3,8061	3,3592	2,8372	2,2450	1,5620	0,8675
4	3,7043	3,2703	2,7665	2,1976	1,5373	0,8662

для третьего варианта по сравнению со вторым вариантом, а также  $-0,1018 \cdot 10^{-5}$  м для четвертого варианта по сравнению с третьим вариантом.

На основе значений компонент  $u_1, u_2$ , полученных в последнем приближении, вычислены компоненты тензора  $\mathbf{D}$ , а также компоненты тензора  $\mathbf{S}$ . Для этого привлекались соотношения (10) и выражение (16), а также уравнения (17), формулы (42) и (2), инварианты (18), (19), выражение (16).

В дальнейшем нас будут интересовать нормальные компоненты тензора  $\mathbf{D}$ , а также нормальные компоненты тензора  $\mathbf{S}$  в точках  $A$  и  $B$ . Значения этих компонент приведены в табл. 3 и табл. 4.

Напомним, что главные направления приняты совпадающими с направлениями осей  $x^1, x^2, x^3$ . Ввиду этого,

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\alpha = \beta, \gamma \neq \delta). \quad (50)$$

Учитывая первый из инвариантов (3) и инвариант (8), равенства (9), а также равенства (50) и пятое из равенств (14), представим формулу (7) в виде

$$(F_{1111} + F_{2211} + F_{3311})S^{11} + (F_{1122} + F_{2222} + F_{3322})S^{22} = D_{11} + D_{22} + D_{33}. \quad (51)$$

Не составит труда удостовериться в том, что компоненты  $D_{11}, D_{22}, D_{33}$  тензора  $\mathbf{D}$ , а также компоненты  $S^{11}, S^{22}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точках  $A$  и  $B$  удовлетворяют формуле (51).

Сосредоточимся на табл. 3. Как видно, от варианта к варианту компонента  $D_{11}$  заметно уменьшалась, а компонента  $D_{22}$  значительно увеличивалась. Вследствие этого компонента  $D_{33}$  значительно уменьшалась. Более интересно поведение компоненты  $S^{11}$ . Эта компонента значительно увеличивалась.

Сосредоточимся на табл. 4. Как видно, от варианта к варианту компонента  $D_{11}$  несколько уменьшалась, а компонента  $D_{22}$  несколько увеличивалась. При этом компонента  $D_{33}$

Таблица 3

Вариант	$D_{11} \cdot 10^2$	$D_{22} \cdot 10^2$	$D_{33} \cdot 10^2$	$S^{11} \cdot 10^{-8}$ , Па	$S^{22} \cdot 10^{-8}$ , Па
1	0,2576	-0,3446	0,0668	0,4345	-1,2127
2	0,2473	-0,2997	0,0444	0,5022	-1,1098
3	0,2362	-0,2604	0,0271	0,5601	-1,0098
4	0,2252	-0,2261	0,0138	0,6098	-0,9125

Таблица 4

Вариант	$D_{11} \cdot 10^2$	$D_{22} \cdot 10^2$	$D_{33} \cdot 10^2$	$S^{11} \cdot 10^{-8}$ , Па	$S^{22} \cdot 10^{-8}$ , Па
1	2,0311	1,8170	-3,5364	2,0087	2,1698
2	2,0038	1,8413	-3,5343	1,9962	2,1792
3	1,9771	1,8653	-3,5320	1,9851	2,1894
4	1,9504	1,8890	-3,5296	1,9745	2,1998

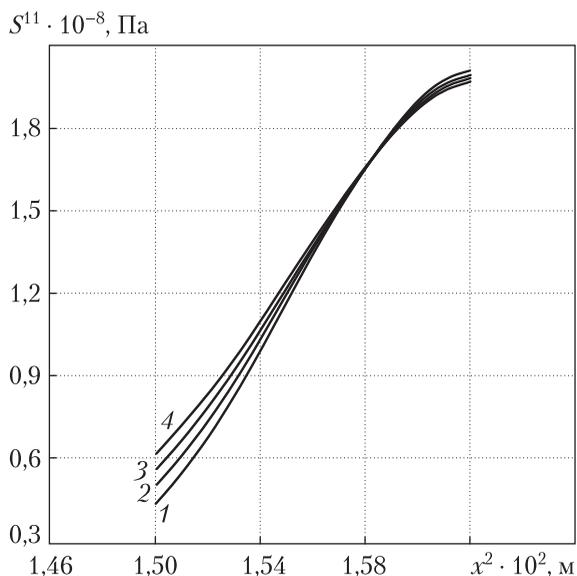


Рис. 2

но изменялась от варианта к варианту компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения. Так, она увеличивалась в точках, для которых  $x^2 \leq 1,58 \cdot 10^{-2}$  м, но уменьшалась в точках, для которых  $x^2 > 1,58 \cdot 10^{-2}$  м. Это имеет простое объяснение. Согласно условию (47), названная компонента равна произведению величины  $P_0$  на разность  $1 - \tilde{f}(v)$ . Необходимо подчеркнуть, что от варианта к варианту величина  $P_0$  убывала, а разность  $1 - \tilde{f}(v)$  возрастала. Таким образом, компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в какой-либо точке на верхней границе зоны предразрушения увеличивалась тогда, когда в этой точке превалировала разность  $1 - \tilde{f}(v)$ .

В заключение следует констатировать, что продольная растягивающая нагрузка сдерживает разрушение у вершины трещины нормального отрыва. Действительно, она способствует меньшему смещению относительно друг друга точек на границах зоны предразрушения, примыкающей к вершине трещины. Благодаря этому оказываются более значительными нормальные компоненты тензора напряжений в упомянутых точках.

*Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы “Поддержка приоритетных направлений научных исследований” (КПКВК 6541230).*

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Каминский А.А., Курчаков Е.Е. Об эволюции зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном анизотропном теле. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 10. С. 44–55. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.044>
2. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A Semi-Analytical Solution Method for Problems of Cohesive Fracture and Some of Its Applications. *Int. J. of Fracture*. 2018. **212**, № 1. P. 113–121.
3. Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 5. С. 25–33. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025>

почти не изменялась. Остается отметить, что компоненты  $S^{11}$ ,  $S^{22}$  изменялись мало. И если компонента  $S^{11}$  уменьшалась, то компонента  $S^{22}$  увеличивалась.

Как было установлено, продольная растягивающая нагрузка сказывается на величине  $P_0$  и модуле вектора  $v$ . Поэтому она должна была сказываться и на компоненте  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения.

На рис. 2 представлен график, построенный по значениям компоненты  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения. Кривые 1–4, изображенные на этом графике, относятся к вариантам 1–4, соответственно.

Представляется интересным то, как именно

4. Курчаков Е.Е. Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 9. С. 46–53.
5. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E., Gavrilov G.V. Study of the Plastic Zone near a Crack in an Anisotropic Body. *Int. Appl. Mech.* 2006. **42**, № 7. P. 749–764.
6. Love A. Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 674 p.
7. Kurchakov E.E. Stress-Strain Relation for Nonlinear Anisotropic Medium. *Sov. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 9. P. 803–807.

Поступило в редакцию 17.01.2020

## REFERENCES

1. Kaminsky, A.A. & Kurchakov, E.E. (2018). On Evolution of Fracture Process Zone near the Crack Tip in Nonlinear Anisotropic Body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 10, pp. 44-55 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.044>
2. Selivanov, M.F. & Chornoivan, Y.O. (2018). A Semi-Analytical Solution Method for Problems of Cohesive Fracture and Some of Its Applications. *Int. J. of Fracture*, 212, No. 1, pp. 113-121.
3. Bogdanova, O.S., Kaminsky, A.A. & Kurchakov, E.E. (2017). On the Fracture Process Zone near the Front of an Arbitrary Crack in a Solid. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 25-33 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025>
4. Kurchakov, E.E. (2015). Thermodynamic Verification of Constitutive Equations for a Nonlinear Anisotropic Body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 9, pp. 46-53 (in Russian).
5. Kaminsky, A.A., Kurchakov, E.E. & Gavrilov, G.V. (2006). Study of the Plastic Zone near a Crack in an Anisotropic Body. *Int. Appl. Mech.*, 42, No. 7, pp. 749-764.
6. Love, A. (1927). *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
7. Kurchakov, E.E. (1979). Stress-Strain Relation for Nonlinear Anisotropic Medium. *Sov. Appl. Mech.*, 15, No. 9, pp. 803-807.

Received 17.01.2020

*Є.О. Дмитрієва, А.О. Камінський, Є.Є. Курчаков*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua)

## ПРО ВПЛИВ ПОЗДОВЖНЬОГО РОЗТЯГУВАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ДЕФОРМАЦІЮ НЕЛІНІЙНОГО ПРУЖНОГО АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ТРІЩИНОЮ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ

Вивчено деформацію нелінійного пружного ортотропного тіла з тріщиною нормального відриву, біля вершини якої утворюється зона передруйнування. Розглянуто випадок плоского напруженого стану. Крайову задачу поставлено в компонентах вектора переміщення. Для цього залучено тензорно-лінійні визначальні рівняння, які зв'язують компоненти тензора напружень із компонентами тензора деформацій, та конститутивні рівняння, які зв'язують компоненти векторів напруження у протилежних точках на межах зони передруйнування із компонентами вектора зміщення відносно одна одної цих точок. Розв'язок крайової задачі отримано чисельно, для чого частинні похідні в основних рівняннях було представлено через скінченні різниці. При розв'язанні крайової задачі використано метод додаткових напружень, запропонований авторами раніше. В результаті розв'язання крайової задачі виявлено вплив поздовжнього розтягувального навантаження на нормальні компоненти тензора деформацій і нормальні компоненти тензора напружень у точках на межах зони передруйнування. Зокрема, установлено, що поздовжнє розтягувальне навантаження суттєво впливає на нормальні компоненти тензора напружень у точках, які зливалися в початковому положенні з вершиною тріщини.

**Ключові слова:** *нелінійне пружне ортотропне тіло, тріщина нормального відриву, зона передруйнування.*

*E.A. Dmitrieva, A.A. Kaminsky, E.E. Kurchakov*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: fract@inmech.kiev.ua

ON THE INFLUENCE OF A LONGITUDINAL TENSILE  
LOAD ON THE DEFORMATION OF A NONLINEAR ELASTIC  
ANISOTROPIC BODY WITH A CRACK OF NORMAL SEPARATION

We study the deformation of a nonlinear elastic orthotropic body with a crack of normal separation. It is assumed that there is a prefracture zone at the crack tip. The plane stress case is considered. The boundary problem is stated in terms of the displacement vector components. It is done using the tensor-linear governing equations which connect the stress tensor components and the strain tensor components and constitutive equations which state the dependence of components of the stress vector at the opposite points on the boundary of prefracture zone on the components of the displacement vector for these points relative to each other. The boundary problem solution is obtained numerically by replacing the partial derivatives with the corresponding finite differences. The supplementary stress method which was proposed in the earlier works by the authors of this paper is used to solve the problem. The results obtained show an influence of the longitudinal tensile loading on the normal components of the strain tensor and the normal components of the stress tensor at the points on the prefracture zone boundary. In particular, it is determined that the longitudinal tensile loading substantially affects the normal components of the stress tensor at the points that initially were at the crack tip.

**Keywords:** *nonlinear elastic orthotropic body, crack of normal separation, prefracture zone.*