ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.02.007
УДК 517.988

Я.И. Ведель[1], **В.В. Семёнов**[1], **Л.М. Чабак**[2]

[1] Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
[2] Государственный университет инфраструктуры и технологий, Киев
E-mail: yana.vedel@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com chabaklm@ukr.net

Двухэтапный проксимальный алгоритм для задачи о равновесии в пространстве Адамара

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С.И. Ляшко

Предложен двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в пространствах Адамара. Данный алгоритм является аналогом ранее изученного двухэтапного алгоритма для задач о равновесии в гильбертовом пространстве. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости порожденных алгоритмом последовательностей.

Ключевые слова: *пространство Адамара, задача о равновесии, псевдомонотонность, двухэтапный алгоритм, сходимость.*

Важным и популярным направлением современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии вида [1—3]:

$$\text{найти } x \in C: \ F(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall y \in C, \tag{1}$$

где C — непустое подмножество гильбертова пространства H, $F: C\times C \to \mathbb{R}$ — функция, такая, что $F(x,x)=0 \ \forall x \in C$ (называемая бифункцией). В задачах в виде (1) можно сформулировать задачи математического программирования, вариационные неравенства и многие игровые задачи.

Алгоритмам решения равновесных и близких задач посвящено большое количество работ. Частным случаем задач о равновесии являются вариационные неравенства. Для их решения Г. М. Корпелевич предложила экстраградиентный метод [4]. Аналогу экстраградиентного метода для задач о равновесии и близким вопросам посвящена работа [5]. В 1980 г. Л.Д. Попов [6] предложил для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, интересную модификацию метода Эрроу—Гурвица. В статье [7] был предложен двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задач о равновесии в гильбертовом пространстве, являющийся адаптацией метода Л.Д. Попова к общим задачам равновесного программирования. В последнее время возник обусловленный проблемами математической биологии и машинного обучения интерес к построению теории и алгоритмов решения задач математического программирования в метрических пространствах Адамара [8] (также известных под названием $CAT(0)$ пространств). Еще одной сильной мотивацией для изучения данных задач является возможность записать некоторые невыпуклые задачи в виде выпуклых (точнее, геодезически выпуклых) в пространстве со специально подобранной римановой метрикой [9]. Некоторые авторы начали изучать задачи о равновесии в пространствах Адамара [9—11]. В работе [9] получены теоремы существования для задач о равновесии на многообразиях Адамара, рассмотрены приложения к вариационным неравенствам и обоснован резольвентный метод для аппроксимации решений задач о равновесии и вариационных неравенств. В [10] для более общих задач о равновесии с псевдомонотонными бифункциями в пространствах Адамара получены теоремы существования, предложен проксимальный алгоритм и доказана его сходимость. Более конструктивному подходу посвящена работа [11], авторы которой, отталкиваясь от результатов статьи [5], предложили и обосновали для псевдомонотонных задач о равновесии в пространствах Адамара аналог экстраградиентного метода.

В данной работе предлагается двухэтапный проксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в пространствах Адамара. Алгоритм является аналогом ранее изученных в [7, 12, 13] двухэтапных алгоритмов для вариационных неравенств и задач о равновесии в гильбертовом пространстве или конечномерном линейном нормированном пространстве с дивергенцией Брэгмана. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости (Δ -сходимости) порожденных алгоритмом последовательностей.

Вспомогательные сведения. Приведем несколько фундаментальных понятий и фактов, связанных с пространствами Адамара, используемых в этой работе. С деталями можно ознакомиться в [8].

Пусть (X,d) — метрическое пространство и x, $y\in X$. Геодезическим путем, соединяющим точки x и y, называют изометрию $\gamma:[0,d(x,y)]\to X$ такую, что $\gamma(0)=x$, $\gamma(d(x,y))=y$. Множество $\gamma([0,d(x,y)])\subseteq X$ обозначают $[x,y]$ и называют геодезическим сегментом с концами x и y (или кратко геодезической). Метрическое пространство (X,d) называют геодезическим пространством, если любые две точки X можно соединить геодезической, и однозначно геодезическим пространством, если для любых двух точек X существует в точности одна геодезическая их соединяющая.

Геодезическое пространство (X,d) называют $CAT(0)$ пространством, если для любой тройки точек y_0, y_1, $y_2\in X$ таких, что $d^2(y_1,y_0)=d^2(y_2,y_0)=\frac{1}{2}d^2(y_1,y_2)$, выполняется неравенство

$$d^2(x,y_0)\leqslant\frac{1}{2}d^2(x,y_1)+\frac{1}{2}d^2(x,y_2)-\frac{1}{4}d^2(y_1,y_2)\quad\forall x\in X. \tag{2}$$

Неравенство (2) называют CN неравенством [8] (в евклидовом пространстве (2) превращается в тождество), а точку y_0 серединой между точками y_1 и y_2 (она всегда существует в геодезическом пространстве). Известно, что $CAT(0)$ пространство является однозначно геодезическим [8]. Примерами $CAT(0)$ пространств являются евклидовы пространства, $\mathbb{R}$ -деревья, многообразия Адамара (полные связные римановы многообразия неположительной кривизны) и гильбертов шар с гиперболической метрикой [8].

Для двух точек x и y $CAT(0)$ пространства (X,d) и $t\in[0,1]$ будем обозначать $tx\oplus(1-t)y$ такую единственную точку z сегмента $[x,y]$, что $d(z,x)=td(x,y)$ и $d(z,y)=$ $=(1-t)d(x,y)$. Множество $C\subseteq X$ называется выпуклым (геодезически выпуклым) если для всех x, $y\in C$ и $t\in[0,1]$ выполняется $tx\oplus(1-t)y\in C$.

Полное $CAT(0)$ пространство называют пространством Адамара.

Пусть (X,d) — метрическое пространство и (x_n) — ограниченная последовательность элементов X. Пусть $r(x,(x_n))=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(x,x_n)$. Число $r((x_n))=\inf_{x\in X} r(x,(x_n))$ называют асимптотическим радиусом (x_n), а множество $A((x_n))=\{x\in X: r(x,(x_n))=r((x_n))\}$ — асимптотическим центром (x_n). Известно, что в пространстве Адамара $A((x_n))$ состоит из одной точки [8].

Последовательность (x_n) элементов пространства Адамара (X,d) слабо сходится (или, как иногда говорят, Δ-сходится [8]) к элементу $x\in X$, если $A((x_{n_k}))=\{x\}$ для любой подпоследовательности (x_{n_k}). Известно, что произвольная последовательность элементов ограниченного, замкнутого и выпуклого подмножества K пространства Адамара имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из K [8].

Пусть (X,d) — пространство Адамара. Функция $\varphi: X\to\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ называется выпуклой (геодезически выпуклой), если для всех x, $y\in X$ и $t\in[0,1]$ выполняется $\varphi(tx\oplus(1-t)y)\leqslant$ $\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$. Например, в пространстве Адамара функции $y\mapsto d(y,x)$ выпуклы. Если же существует такая константа $\mu>0$, что для всех x, $y\in X$ и $t\in[0,1]$ выполняется

$$\varphi(tx\oplus(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)-\mu t(1-t)d^2(x,y),$$

то функция φ называется сильно выпуклой. Известно, что для выпуклых функций полунепрерывность снизу и слабая полунепрерывность снизу эквивалентны [8, с. 64], а сильно выпуклая полунепрерывная снизу функция достигает минимума в единственной точке. Для выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции $\varphi: X\to\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ проксимальный оператор определяется следующим образом [8]

$\mathrm{prox}_\varphi x=\arg\min_{y\in X}\left(\varphi(y)+\dfrac{1}{2}d^2(y,x)\right)$. Поскольку функции $\varphi+\dfrac{1}{2}d^2(\cdot,x)$ сильно выпуклы, то определение проксимального оператора корректно, то есть для каждого $x\in X$ существует единственный элемент $\mathrm{prox}_\varphi x\in X$.

Задача о равновесии в пространстве Адамара. Пусть (X,d) — пространство Адамара. Для непустого выпуклого замкнутого множества $C\subseteq X$ и бифункции $F: C\times C\to\mathbb{R}$ рассмотрим задачу о равновесии:

$$\text{найти } x\in C\text{: } F(x,y)\geqslant 0\ \ \forall y\in C. \tag{3}$$

Предположим, что выполнены условия:

1) $F(x,x)=0$ для всех $x\in C$;
2) функции $F(x,\cdot): C\to\mathbb{R}$ выпуклы и полунепрерывны снизу для всех $x\in C$;
3) функции $F(\cdot,y): C\to\mathbb{R}$ слабо полунепрерывны сверху для всех $y\in C$;
4) бифункция $F: C\times C\to\mathbb{R}$ псевдомонотонна, то есть

для всех x, $y\in C$ из $F(x,y)\geqslant 0$ следует $F(y,x)\leqslant 0$;

5) бифункция $F: C\times C \to \mathbb{R}$ липшицевого типа, то есть существуют две константы $a>0$, $b>0$, такие, что

$$F(x,y) \leqslant F(x,z)+F(z,y)+ad^2(x,z)+bd^2(z,y) \quad \forall x,y,z \in C.$$

Замечание 1. Условие 5 типа липшицевости в евклидовом пространстве введено G. Mastroeni [2].

Рассмотрим дуальную задачу о равновесии:

$$\text{найти } x \in C\text{: } F(y,x) \leqslant 0 \quad \forall y \in C. \tag{4}$$

Множества решений задач (3) и (4) обозначим S и S^*. При выполнении условий 1—4 имеем $S=S^*$ [10]. Кроме того, множество S^* выпукло и замкнуто.

Далее будем предполагать, что $S \neq \varnothing$.

Двухэтапный проксимальный алгоритм. Для приближенного решения задачи (3) рассмотрим следующий

Алгоритм 1. Для x_1, $y_0 \in C$ генерируем последовательность элементов x_n, $y_n \in C$ при помощи итерационной схемы

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_{n-1},\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(y_{n-1},y)+\dfrac{1}{2\lambda}d^2(y,x_n)\right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n,\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C}\left(F(y_n,y)+\dfrac{1}{2\lambda}d^2(y,x_n)\right), \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

На каждом шаге алгоритма 1 следует решить две выпуклые задачи с сильно выпуклыми функциями. Предположим возможность их эффективного решения.

Замечание 2. Алгоритм 1 для задач в гильбертовом пространстве был предложен в [7]. Частный случай алгоритма 1 для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, предложен Л.Д. Поповым [6]. Заметим, что в последнее время вариант алгоритма 1 для вариационных неравенств стал известен в среде специалистов по машинному обучению под названием “Extrapolation from the Past”.

Сходимость алгоритма. Имеют место следующие результаты.

Лемма 1. *Для последовательностей* (x_n), (y_n), *порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство*

$$d^2(x_{n+1},z) \leqslant d^2(x_n,z)-(1-2\lambda b)d^2(x_{n+1},y_n)-(1-4\lambda a)d^2(y_n,x_n)+4\lambda a d^2(x_n,y_{n-1}),$$

где $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Из определения x_{n+1} следует

$$F(y_n,x_{n+1})+\frac{1}{2\lambda}d^2(x_{n+1},x_n) \leqslant F(y_n,y)+\frac{1}{2\lambda}d^2(y,x_n) \quad \forall y \in C. \tag{5}$$

Положив в (5) $y = tx_{n+1} \oplus (1-t)z$, $t \in (0,1)$, получим

$$F(y_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) \leqslant F(y_n, tx_{n+1} \oplus (1-t)z) + \frac{1}{2\lambda} d^2(tx_{n+1} \oplus (1-t)z, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant tF(y_n, x_{n+1}) + (1-t)F(y_n, z) + \frac{1}{2\lambda}(td^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(z, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, z)).$$

Из псевдомонотонности бифункции F следует

$$F(y_n, z) \leqslant 0.$$

Таким образом,

$$(1-t)F(y_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2\lambda}(-(1-t)d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(z, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, z)). \qquad (6)$$

Сократив в (6) $1-t$ и совершив предельный переход при $t \to 1$, получим

$$F(y_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2\lambda}(d^2(z, x_n) - d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(x_{n+1}, z)). \qquad (7)$$

Из определения y_n следует

$$F(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y_n, x_n) \leqslant F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \quad \forall y \in C. \qquad (8)$$

Положив в (8) $y = tx_{n+1} \oplus (1-t)y_n$, $t \in (0,1)$, получим

$$F(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y_n, x_n) \leqslant F(y_{n-1}, tx_{n+1} \oplus (1-t)y_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(tx_{n+1} \oplus (1-t)y_n x_n) \leqslant$$

$$\leqslant tF(y_{n-1}, x_{n+1}) + (1-t)F(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2\lambda}(td^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(y_n, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, y_n)).$$

Таким образом,

$$tF(y_{n-1}, y_n) - tF(y_{n-1}, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2\lambda}(td^2(x_{n+1}, x_n) - td^2(y_n, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, y_n)). \qquad (9)$$

Сократив в (9) t и совершив предельный переход при $t \to 0$, получим

$$F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2\lambda}(d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n)). \qquad (10)$$

Сложив неравенства (7) и (10), имеем

$$F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\lambda}(d^2(z, x_n) - d^2(x_{n+1}, z) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n)). \qquad (11)$$

Из условия типа липшицевости следует

$$F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1}) \geqslant -bd^2(y_n, x_{n+1}) - ad^2(y_{n-1}, y_n). \qquad (12)$$

Комбинируя (11) и (12), получим

$$d^2(x_{n+1},z)\leqslant d^2(z,x_n)-d^2(y_n,x_n)-d^2(x_{n+1},y_n)+2\lambda ad^2\left(y_{n-1},y_n\right)+2\lambda bd^2(y_n,x_{n+1}).$$

Поскольку $d^2(y_{n-1},y_n)\leqslant 2d^2(y_{n-1},x_n)+2d^2(x_n,y_n)$, то

$$d^2(x_{n+1},z)\leqslant d^2(z,x_n)-d^2(y_n,x_n)-d^2(x_{n+1},y_n)+$$

$$+4\lambda ad^2(y_{n-1},x_n)+4\lambda ad^2(x_n,y_n)+2\lambda bd^2(y_n,x_{n+1}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть (X,d) — пространство Адамара, $C\subseteq X$ — непустое выпуклое замкнутое множество, для бифункции $F:C\times C\to\mathbb{R}$ выполнены условия 1—5 и $S\neq\varnothing$. Предположим, что $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{2(2a+b)}\right)$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности $(x_n),(y_n)$ слабо сходятся к решению $z\in S$ задачи о равновесии (3), причем $\lim_{n\to\infty}d(y_n,x_n)=0$.*

Замечание 3. Аналогичный теореме 1 результат имеет место и для нестационарной последовательности (λ_n) такой, что $\{\inf_n\lambda_n,\sup_n\lambda_n\}\subseteq\left(0,\dfrac{1}{2(2a+b)}\right)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Украины (проект “Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування”, номер госрегистрации 0119U101608).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Antipin A.S. Equilibrium programming: Proximal methods. *Comput. Math. Math. Phys.* 1997. **37**. P. 1285—1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044
2. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. In: Daniele, P. et al. (eds.) Equilibrium Problems and Variational Models. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. P. 289—298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1
3. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. **6**. P. 117—136.
4. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon.* 1976. **12**. № 4. P. 747—756.
5. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization.* 2008. **57**. P. 749—776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876
6. Popov L.D. A modification of the Arrow—Hurwicz method for search of saddle points. *Math. notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. **28**. Iss. 5. P. 845—848. https://doi.org/10.1007/BF01141092
7. Lyashko S.I., Semenov V.V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: Goldengorin, B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115, Springer, Cham, 2016. P. 315—325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
8. Bacak M. Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces. Berlin-Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.
9. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *J. Math. Analysis and Applications.* 2012. **388**. P. 61—77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001
10. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *J. the Austral. Math. Society.* 2019. P. 1—23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041

11. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Math. Notes*. 2019. **20**. No. 1. P. 281—297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361
12. Chabak L., Semenov V., Vedel Y.A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 836. Springer, Cham, 2019. P. 50—58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6
13. Semenov V.V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**. Iss. 2. P. 234—243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9

Поступило в редакцию 03.12.2019

REFERENCES

1. Antipin, A. S. (1997). Equilibrium programming: Proximal methods. Comput. Math. Math. Phys., 37, pp. 1285-1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044
2. Mastroeni, G. (2003). On auxiliary principle for equilibrium problems. In: Daniele, P. et al. (eds.) Equilibrium Problems and Variational Models. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., pp. 289-298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1
3. Combettes, P. L. & Hirstoaga, S. A. (2005). Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. J. Nonlinear Convex Anal., 6, pp. 117-136.
4. Korpelevich, G. M. (1976). An extragradient method for finding saddle points and for other problems. Matecon, 12, No. 4, pp. 747-756.
5. Quoc, T. D., Muu, L. D. & Hien, N. V. (2008). Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Optimization, 57, pp. 749-776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876
6. Popov, L. D. (1980). A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 28, Iss. 5, pp. 845-848. https://doi.org/10.1007/BF01141092
7. Lyashko, S. I. & Semenov, V. V. (2016). A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: Goldengorin, B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, Cham, pp. 315-325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
8. Bacak, M. (2014). Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces. Berlin-Boston: De Gruyter, viii+185 p.
9. Colao, V., Lopez, G., Marino, G. & Martin-Marquez, V. (2012). Equilibrium problems in Hadamard manifolds. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 388, pp. 61-77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001
10. Khatibzadeh, H. & Mohebbi, V. (2019). Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. J. the Australian Mathematical Society. pp. 1-23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041
11. Khatibzadeh, H. & Mohebbi, V. (2019). Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. Miskolc Mathematical Notes, 20, No. 1, pp. 281-297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361
12. Chabak, L., Semenov, V., Vedel, Y. (2019). A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V. & Stefanuk V. (eds.) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 836. Springer, Cham, pp. 50-58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6
13. Semenov, V. V. (2017). A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. Cybernetics and Systems Analysis, 53. Iss. 2, pp. 234-243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9

Received 03.12.2019

Я.І. Ведель [1], *В.В. Семенов* [1], *Л.М. Чабак* [2]

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
[2] Державний університет інфраструктури і технологій, Київ
E-mail: yana.vedel@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com chabaklm@ukr.net

ДВОЕТАПНИЙ ПРОКСИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ
ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ В ПРОСТОРАХ АДАМАРА

Запропоновано двоетапний проксимальний алгоритм для наближеного розв'язання задач про рівновагу в просторах Адамара. Даний алгоритм є аналогом раніше дослідженого двоетапного алгоритму для задач про рівновагу в гільбертовому просторі. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теорему про слабку збіжність послідовностей, що породжені алгоритмом.

Ключові слова: *простір Адамара, задача про рівновагу, псевдомонотонність, двоетапний алгоритм, збіжність.*

Ya.I. Vedel [1], *V.V. Semenov* [1], *L.M. Chabak* [2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv
[2] State University of Infrastructure and Technologies, Kyiv
E-mail: yana.vedel@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com chabaklm@ukr.net

A TWO-STAGE PROXIMAL ALGORITHM
FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HADAMARD SPACES

We consider the equilibrium problem in Hadamard spaces, which extends and unifies several problems in optimization, variational inequalities, fixed-point theory, and many other parts in nonlinear analysis. First, we give the necessary facts about Hadamard metric spaces and consider the statements of equilibrium problems associated with pseudo-monotone bifunctions with suitable conditions on the bifunctions in Hadamard spaces. Then, to approximate an equilibrium point, we consider the two-stage proximal algorithm for pseudo-monotone bifunctions. This algorithm is an analog of the previously studied two-stage algorithm for equilibrium problems in a Hilbert space. For Lipschitz-type pseudo-monotone bifunctions, a theorem on the weak convergence of sequences generated by the algorithm is proved.

Keywords: *Hadamard space, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, two-stage algorithm, convergence.*