1. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 520 с.
2. *Гольдберг З. А.* Давление звука // Мощные ультразвуковые поля. – Москва: Наука, 1968. – 267 с.
3. *King L. V.* On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1934. – **147**, No 861. – P. 212–240.
4. *Guz A. N., Zhuk A. P.* Motion of solid particles in a liguid under the action of an acoustic field: the mechanism of radiation pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 3. – P. 246–265.
5. *Морз Ф.* Колебания и звук. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1949. – 496 с.
6. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 336 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 07.12.2006

УДК 517.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк, А. С. Хорошун**

К теории параметрической устойчивости

A general method of analysis based on Lyapunov's direct method is presented for studying the parametric stability of the nonlinear systems of differential equations. The results demonstrate the roles played by (1) estimating the domain of potential asymptotic stability and (2) constructing the auxiliary Lyapunov function.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, p), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m$, $f(x,p) = (f_1(x,p), \ldots, f_n(x,p))^T$, $f_i \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Вектор-функция $f(x,p)$ предполагается достаточно гладкой, и решение $x(t, x_0, p)$ системы (1) существует при всех $t \geqslant t_0$ и $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in P \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $x^e(p)$ — состояние равновесия, соответствующее некоторому значению параметра p.

Относительно системы (1) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. *Система уравнений* (1) *такова, что:*

1) функции

$$f_i(x,p), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

определены и непрерывны на некотором открытом множестве $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *вместе с частными производными*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad i,j = 1,\ldots,n, \qquad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_k}, \qquad i,l,k = 1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial p_s}, \qquad i,l = 1,\ldots,n, \qquad s = 1,\ldots,m;$$

2) для некоторого значения вектор-параметра p^* *существует состояние равновесия* $x^* = x^e(p^*)$ *так, что* $f(x^*, p^*) = 0$ *и точка* (x^*, p^*) *принадлежит множеству* Γ*;*

3) $\det\left(\dfrac{\partial f(x,p)}{\partial x}\bigg|_{(x^*,p^*)}\right) \neq 0$*;*

4) матрица $\dfrac{\partial f(x,p^*)}{\partial x}$ *является устойчивой в точке* $x = x^*$*.*

Определение параметрической асимптотической устойчивости по отношению к области $P \subset \mathbb{R}^m$ введем согласно работам [1, 3].

Определение 1. Система (1) называется параметрически асимптотически устойчивой по отношению к области $P \subset \mathbb{R}^m$, если для любого $p \in P$:

1) существует состояние равновесия $x^e(p) \in \mathbb{R}^n$;

2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon, p) > 0$ такое, что из условия

$$\|x_0 - x^e(p)\| < \delta$$

следует

$$\|x(t; x_0, p) - x^e(p)\| < \varepsilon, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+;$$

3) существует число $\mu(p) > 0$ такое, что из условия

$$\|x_0 - x^e(p)\| < \mu(p)$$

следует

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, p) = x^e(p).$$

Если в пространстве $\mathbb{R}^m$ определена область P и для каждого $p \in P$ уравнение $f(x,p) = 0$ имеет решение $x^e(p) \in X \subset \mathbb{R}^n$, то, согласно теореме 2.25 из [1], вопрос о параметрической асимптотической устойчивости сводится к вопросу о существовании подходящей функции Ляпунова.

Таким образом, целью данной работы является получение условий существования функции Ляпунова, устанавливающей параметрическую асимптотическую устойчивость системы (1).

2. Предварительные результаты. Укажем способ оценки возможной области асимптотической параметрической устойчивости. Исходя из предположения 1, найдем область $P \in \mathbb{R}^m$, для каждого значения p из которой уравнение $f(x,p) = 0$ имеет решение $x^e(p) \in X \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T = (X_1^T, \ldots, X_s^T)^T,$$

где $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leqslant n_i < n$, $i = 1, \ldots, s$, $n_1 + \cdots + n_s = n$, $n_0 = 0$;

$$p = (p_1, \ldots, p_m)^T = (P_1^T, \ldots, P_b^T)^T,$$

где $P_j \in \mathbb{R}^{m_j}$, $1 \leqslant m_j < m$, $j = 1, \ldots, b$, $m_1 + \cdots + m_b = m$, $m_0 = 0$;

$$\Pi_{r,q} = \{(x,p) \mid \Omega_r\colon \|X_i - X_i^*\| < r_i,\ \Omega_q\colon \|P_j - P_j^*\| < q_j,\ i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, b\} -$$

область в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, в которой для каждого значения параметра p из Ω_q уравнение $f(x,p) = 0$ имеет решение $x^e(p)$ из Ω_r.

Приведя уравнение $f(x,p) = 0$ к операторному виду и применяя к нему теорему о неподвижной точке для общего итерационного метода в псевдометрическом пространстве (см. [2]), получим следующие условия, которым должны удовлетворять числа r_i, $i = 1, \ldots, s$, и q_j, $j = 1, \ldots, b$:

$$\left\| \left(\frac{\partial f(x,p)}{\partial x} \bigg|_{(x^*,p^*)} \right)^{-1} \right\| \left(\sum_{i=1}^{s} r_i \max_{\Pi_{r,q}} \|A_i(x,p)\| + \sum_{j=1}^{b} q_j \max_{\Pi_{r,q}} \|D_j(x,p)\| \right) \leqslant 1, \tag{2}$$

где

$$A_i(x,p) = \begin{pmatrix} \left|\dfrac{\partial^2 f_1(x,p)}{\partial x_1 \partial X_i}\right| & \ldots & \left|\dfrac{\partial^2 f_1(x,p)}{\partial x_n \partial X_i}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|\dfrac{\partial^2 f_n(x,p)}{\partial x_1 \partial X_i}\right| & \ldots & \left|\dfrac{\partial^2 f_n(x,p)}{\partial x_n \partial X_i}\right| \end{pmatrix},$$

$$D_j(x,p) = \begin{pmatrix} \left|\dfrac{\partial^2 f_1(x,p)}{\partial x_1 \partial P_j}\right| & \ldots & \left|\dfrac{\partial^2 f_1(x,p)}{\partial x_n \partial P_j}\right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|\dfrac{\partial^2 f_n(x,p)}{\partial x_1 \partial P_j}\right| & \ldots & \left|\dfrac{\partial^2 f_n(x,p)}{\partial x_n \partial P_j}\right| \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$r((\alpha_j^k)_{k,j=1}^s) < 1.$$

Здесь $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A,

$$\alpha_j^k = \left\| \begin{pmatrix} \beta_{n_1+\cdots+n_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} & \ldots & \beta_{n_1+\cdots+n_j}^{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n_1+\cdots+n_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k} & \ldots & \beta_{n_1+\cdots+n_j}^{n_1+\cdots+n_k} \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\beta_{n_1+\cdots+n_{j-1}+c}^{n_1+\cdots+n_{k-1}+l} = \sum_{i=1}^{n} |c_i^{n_1+\cdots+n_{k-1}+l}| \times$$
$$\times \left(\sum_{h=1}^{s} \max_{\Pi_{r,q}} \left| \frac{\partial^2 f_i(x,p)}{\partial x_{n_1+\cdots+n_{j-1}+c} \partial X_h^T} \right| r_h + \sum_{a=1}^{b} \max_{\Pi_{r,q}} \left| \frac{\partial^2 f_i(x,p)}{\partial x_{n_1+\cdots+n_{j-1}+c} \partial P_a^T} \right| q_a \right), \tag{4}$$

$$k, j = 1, \ldots, s, \qquad l = 1, \ldots, n_k, \qquad c = 1, \ldots, n_j,$$

$$(E - (\alpha_j^k)_{k,j=1}^s)^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_1^1 & \ldots & \Delta_t^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_1^s & \ldots & \Delta_t^s \end{pmatrix} (q_1^1, \ldots, q_b^1)^T \leqslant (r_1^1, \ldots, r_s^1)^T,$$

где

$$\Delta_j^k = \left\| \begin{pmatrix} \gamma_{m_1+\cdots+m_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} & \ldots & \gamma_{m_1+\cdots+m_j}^{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m_1+\cdots+m_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k} & \ldots & \gamma_{m_1+\cdots+m_j}^{n_1+\cdots+n_k} \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\gamma_{m_1+\cdots+m_{j-1}+c}^{n_1+\cdots+n_{k-1}+l} = \sum_{i=1}^{n} |c_i^{n_1+\cdots+n_{k-1}+l}| \max_{\Pi_{r,q}} \left| \frac{\partial f_i(x^*, p)}{\partial p_{m_1+\cdots+m_{j-1}+c}} \right|,$$

$k = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, b$, $l = 1, \ldots, n_k$, $c = 1, \ldots, m_j$.

Таким образом, с помощью вышеуказанных соотношений определяются границы возможной области параметрической асимптотической устойчивости.

3. Основная теорема. Установим достаточные условия параметрической асимптотической устойчивости системы дифференциальных уравнений относительно указанной области. Пусть для уравнения $f(x, p) = 0$ с помощью метода, указанного в п. 2, определена область $\Pi_{r,q}$. Имеет место утверждение.

Теорема 1. *Пусть для векторной функции $f(x, p)$, системы* (1) *и области $\Pi_{r,q}$ выполняется условие*

$$-\lambda_{\min}(Q) + 2\|P\| \left(\sum_{i=1}^{s} r_i \max_{\Pi_{r,q}} \|A_i(x, p)\| + \sum_{j=1}^{b} q_j \max_{\Pi_{r,q}} \|B_j(x, p)\| \right) < 0, \tag{5}$$

где

$$A_i(x, p) = \left(\left| \frac{\partial^2 f_k(x, p)}{\partial x_l \partial X_i} \right| \right)_{k,l=1}^{n}, \qquad B_j(x, p) = \left(\left| \frac{\partial^2 f_k(x, p)}{\partial x_l \partial P_j} \right| \right)_{k,l=1}^{n},$$

$\lambda_{\min}(Q)$ *— наименьшее собственное значение матрицы Q; Q — произвольная симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$; P — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения*

$$\left(\frac{\partial f(x, p^*)}{\partial x} \bigg|_{x=x^*} \right)^T P + P \left(\frac{\partial f(x, p^*)}{\partial x} \bigg|_{x=x^*} \right) = -Q. \tag{6}$$

Тогда для любого $x^e(p)$ из Ω_r существует окрестность, полностью включаемая в Ω_r, такая, что функция

$$V(x, x^e(p)) = (x - x^e(p))^T P (x - x^e(p))$$

является функцией Ляпунова в этой окрестности.

Доказательство. Выберем произвольное значение вектор-параметра p из области Ω_q. Согласно определению области $\Pi_{r,q}$, существует состояние равновесия $x^e(p)$ из области Ω_r. Заменой переменной $z = x - x^e(p)$ систему (1) приведем к виду

$$\dot{z} = f(z + x^e(p), p). \tag{7}$$

Пусть Q — симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$. При таком выборе Q, согласно условию (4) предположения 1, существует решение уравнения (6) в виде симметрической положительно определенной матрицы P. Будем строить функцию Ляпунова в виде

$$V(z) = z^T P z.$$

Очевидно, что при таком выборе матрицы P функция $V(z)$ будет принимать только положительные значения при всех $z \neq 0$ и $V(0) = 0$.

Найдем производную по времени функции $V(z)$ в силу системы (7)

$$\dot V(z)\big|_{(7)} = (f(z+x^e(p),p))^T Pz + z^T Pf(z+x^e(p),p) =$$
$$= (f(z+x^*,p^*))^T Pz + z^T Pf(z+x^*,p^*) +$$
$$+(f(z+x^e(p),p)-f(z+x^*,p^*))^T Pz + z^T P(f(z+x^e(p),p)-f(z+x^*,p^*)) =$$
$$= -z^T Qz + z^T\left(\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}\bigg|_{x=x^e(p)} - \frac{\partial f(x,p^*)}{\partial x}\bigg|_{x=x^*}\right)^T Pz +$$
$$+z^T P\left(\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}\bigg|_{x=x^e(p)} - \frac{\partial f(x,p^*)}{\partial x}\bigg|_{x=x^*}\right)z + z^T Po(z) + (o(z))^T Pz \leqslant$$
$$\leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|z\|^2 + 2\|P\|\left\|\left(\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}\bigg|_{x=x^e(p)} - \frac{\partial f(x,p^*)}{\partial x}\bigg|_{x=x^*}\right)\right\|\|z\|^2 +$$
$$+2\|P\|\|o(z)\|\|z\|, \tag{8}$$

$o(z)$ — бесконечно малая величина по сравнению с z в некоторой окрестности 0,

$$\left\|\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}\bigg|_{x=x^e(p)} - \frac{\partial f(x,p^*)}{\partial x}\bigg|_{x=x^*}\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{s} r_i \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|A_i(x,p)\| + \sum_{j=1}^{b} q_j \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|B_j(x,p)\|. \tag{9}$$

Оценку (9) получаем, учитывая, что

$$\left|\frac{\partial f_k(x,p)}{\partial x_l} - \frac{\partial f_k(x^*,p^*)}{\partial x_l}\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k(x,p)}{\partial x_l \partial x_i}\bigg|_{\substack{x=x^*+\theta(x-x^*)\\ p=p^*+\theta(p-p^*)}}(x_i-x_i^*) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_k(x,p)}{\partial x_l \partial p_j}\bigg|_{\substack{x=x^*+\theta(x-x^*)\\ p=p^*+\theta(p-p^*)}}(p_j-p_j^*)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{s} \max_{\overline{\Pi_{r,q}}}\left|\frac{\partial^2 f_k(x,p)}{\partial x_l \partial X_i}\right||X_i - X_i^*| + \sum_{j=1}^{b} \max_{\overline{\Pi_{r,q}}}\left|\frac{\partial^2 f_k(x,p)}{\partial x_l \partial P_j}\right||P_j - P_j^*|,$$

где $k,\ l = 1,\ldots,n$.

Продолжим оценку (8), учитывая (9):

$$\dot V(z\big|_{(3.2)} \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|z\|^2 + 2\|P\|\|o(z)\|\|z\| +$$
$$+ 2\|P\|\left(\sum_{i=1}^{s} r_i \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|A_i(x,p)\| + \sum_{j=1}^{b} q_j \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|B_j(x,p)\|\right)\|z\|^2. \tag{10}$$

Выберем окрестность Ω_z точки $z = 0$ так, чтобы для всех значений переменной $z \in \Omega_z$ выполнялось соотношение

$$\|o(z)\| \leqslant \frac{-\lambda_{\min}(Q) + 2\|P\|\left(\sum_{i=1}^{s} r_i \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|A_i(x,p)\| + \sum_{j=1}^{b} q_j \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|B_j(x,p)\|\right)}{2\|P\|}\|z\|. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получим, что в Ω_z

$$\dot V(z)\big|_{(7)} \leqslant \left(-\lambda_{\min}(Q) + 2\|P\|\left(\sum_{i=1}^{s} r_i \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|A_i(x,p)\| + \sum_{j=1}^{b} q_j \max_{\overline{\Pi_{r,q}}} \|B_j(x,p)\|\right)\right)\|z\|^2. \quad (12)$$

Таким образом, при выполнении условия (5), функция $V(z) = z^T P z$ суть $V(x, x^e(p)) = (x - x^e(p))^T P(x - x^e(p))$, является функцией Ляпунова в окрестности Ω_z точки $z = 0$, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Для параметрической асимптотической устойчивости системы* (1) *относительно области* $\Omega_q \subset \mathbb{R}^m$ *достаточно выполнения условия* (5).

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было показано, что для всех $p \in \Omega_q$ существует состояние равновесия $x^e(p) \in \Omega_r$ и некоторая его окрестность, в которой оно асимптотически устойчиво в силу теоремы 2.25 из [1] и теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости из [3]. Согласно определению 1, система (1) параметрически асимптотически устойчива относительно области $\Omega_q \subset \mathbb{R}^m$.

4. Пример. Рассмотрим систему

$$\dot x_1 = p - x_1 + x_1^3 + p x_2^3, \qquad \dot x_2 = p - x_2 + x_2^3 + p x_1^3. \quad (13)$$

Для значения параметра $p^* = 0$ решим систему

$$p - x_1 + x_1^3 + p x_2^3 = 0, \qquad p - x_2 + x_2^3 + p x_1^3 = 0$$

и выберем в качестве известного состояние равновесия $x^* = (x_1^*, x_2^*) = 0$. Применяя метод, указанный в п. 2, вычислим область

$$\Pi_{r,q} = \{(x,p) | |x_1| < 0,2,\ |x_2| < 0{,}2,\ |p| < 0{,}14\} \quad (14)$$

и значения

$$\left.\frac{\partial f(x,p^*)}{\partial x}\right|_{x=x^*} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\frac{\partial^2 f_h(x,p)}{\partial x_a \partial x_1}\right)_{h,a=1}^{n} = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 6px_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_h(x,p)}{\partial x_a \partial x_2}\right)_{h,a=1}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & 6px_2 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}, \qquad \left(\frac{\partial^2 f_h(x,p)}{\partial x_a \partial p}\right)_{h,a=1}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ матрица $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Условие (5) выполняется относительно области (14). Таким образом, система (13) параметрически асимптотически устойчива относительно области $P = \{p \in \mathbb{R}\colon |p| < 0{,}14\}$.

5. Замечания. Проблема параметрической устойчивости (неустойчивости) является одной из центральных проблем динамического анализа нелинейных систем, включая анализ структур (см. [4]). В работе [1] понятие параметрической устойчивости было связано с проблемой динамического анализа неточных систем (см. [5]), чем стимулировало дальнейшее развитие этой теории. В отличие от работы [1], где постулируется существование областей Ω_x и Ω_p, входящих в оценку области $\Pi_{r,q}$, в данной работе указывается алгоритм оценки этой области. Кроме того, здесь указан способ построения функции Ляпунова, разрешающей задачу об асимптотической параметрической устойчивости системы (1).

Авторы выражают благодарность проф. Д. Д. Шильяку за возможность ознакомления с работой [1].

1. *Ikeda M., Ohta Y., Šiljak D. D.* Parametric stability // Proceedings of the Univesit ä di Genova – The Ohio State University Joint Conference. – Boston: Birkhäuser, 1991.
2. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969. – 447 с.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. в 5-ти т. – Москва: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–264.
4. *Wei-Chan* Xie. Dynamic stability of structures. – Cambridge University Press, 2006. – 448 p.
5. *Martynyk-Chernienko Yu. A.* Stability analysis of uncertain systems via matrix-valued Liapunov functions // Nonlin. Anal. – 2005. – **63**. – P. 388–404.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 05.12.2006

УДК 539.374

В. А. Мерзляков

Упругопластическое состояние цилиндрических оболочек некругового сечения

(Представлено академиком НАН Украины Ю. Н. Шевченко)

A method to determine a thermal-elastic-plastic stress-strain state of non-circular cylindrical shells has been developed. The mechanical properties of the material are considered as temperature-dependent. A non-linear shell theory, which is based on the Kirchhoff–Love hypotheses, is used. A modified method of successive elastic solutions is applied to linearize the equations of the theory of simple path-dependent processes of loading. To verify the proposed method, a solution for a cylindrical shell that is obtained by the numerical integration along the directrix is compared with a solution based on the application of the trigonometric Fourier series in cyclic coordinates.

В роботах [1, 2] приведены методы расчета некруговых цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения в упругой постановке. В отличие от этого, рассмотрим термоупругопластическое напряженно-деформированное состояние (НДС) указанного класса оболочек.

Рассматривается термоупругопластическое НДС некруговой цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения и переменной в двух направлениях толщины. Первоначально оболочка находится в ненапряженном состоянии при температуре T_0, а затем подвергается действию силовых и тепловых нагрузок, не вызывающих ее потери устойчивости. Задача рассматривается в несвязанной квазистатической постановке с использованием геометрически нелинейной теории оболочек. Меридиан и толщина оболочки, а также характер приложенных силовых и тепловых нагрузок допускают выполнение гипотез Кирхгофа–Лява. Предполагается зависимость механических характеристик материала от температуры.

Положение точек срединной поверхности оболочки определяется длиной образующей s ($s_0 \leqslant s \leqslant s_N$) и длиной дуги q ($q_0 \leqslant q \leqslant q_N$) направляющей (рис. 1). Ограничивают