Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2007

МЕХАНІКА

УДК 532.59:534.29

О. П. Жук

Рух сферичної краплі рідини під дією радіаційної сили акустичного поля

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

The influence of the radiation force on a liquid droplet in the acoustic field is investigated. The dependence of the force on the ratios of the densities and adiabatic elastic moduli of the droplet and an external liquid is studied.

Радіаційна сила, яка в акустичному полі діє на краплю рідини, спричиняється зміною середнього в часі імпульсу, що переноситься хвилею, і визначається інтегралом по поверхні краплі від середнього в часі радіаційного тиску. Відзначимо, що точні значення радіаційного тиску, взагалі кажучи, різні в ейлеровій і лагранжовій системах координат [1]. В ейлерових координатах тиск визначається як згортка тензора густини потоку імпульса з ортом нормалі до поверхні краплі. В лагранжових координатах радіаційний тиск визначається середнім в часі значенням звукового тиску на поверхню, яка коливається в звуковому полі. При обчисленні радіаційної (незалежної від часу, сталої) сили в акустичному полі тиск в рідині визначають з урахуванням величин другого порядку, які зумовлені нелінійністю звукового поля і не дорівнюють нулю після осереднення в часі.

Задачу обчислення радіаційної сили в лагранжовій системі координат при заданій первинній хвилі можна розділити на три етапи. На першому з них визначається потенціал розсіяної на краплі хвилі. Оскільки визначення тиску в рідині з урахуванням величин другого порядку можливе через потенціали поля вектора швидкості, одержані в лінійному наближенні [2, 3], обмежимося розв'язуванням лінійної задачі дифракції первинної хвилі на краплі. На другому етапі визначимо результуючу силу дії рідини на краплю. І на третьому етапі осередненням останньої в часі відфільтруємо від неї радіаційну силу.

1. Знаходження розв'язку задачі дифракції. Вважатимемо, що весь простір заповнено ідеальною рідиною густиною ρ_0, швидкість звуку в якій a_0. Помістимо в ній сферичну краплю радіусом R, яка утворена іншою рідиною густиною $\overline{\rho}_0$ і зі швидкістю звуку в ній $\overline{a}_0$. Далі риска над символом буде визначати величини, що характеризують краплю.

Виберемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з початком в центрі сферичної краплі (рис. 1). Нехай в просторі, заповненому рідиною, поширюється плоска акустична

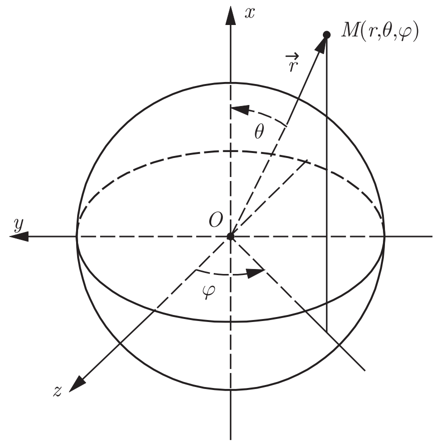

Рис. 1

хвиля, яка задана потенціалом

$$\Phi_i = A\exp[i(kx - \omega t)], \tag{1}$$

де A — амплітуда; $k = \omega/a_0$ — хвильове число; ω — кутова частота.

Під дією первинної акустичної хвилі (1) сферична крапля буде періодично стискатися і розширюватися. Радіус краплі вважатимемо таким, що впливом поверхневого натягу можна знехтувати. Тоді в математичній постановці задача дифракції акустичної хвилі (1) на сферичній краплі зводиться до визначення потенціалу Φ_s розсіяної від краплі хвилі: розв'язку лінійного хвильового рівняння [4]

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

який згасає на нескінченності. Граничні умови на поверхні сферичної краплі вимагають неперервності тиску і нормальної компоненти швидкості в рідинах при переході через поверхню краплі. Задачу дифракції розв'яжемо в сферичній системі координат $Or\theta\varphi$, в якій кут θ будемо відраховувати від осі Ox (рис. 1). Тоді граничні умови на поверхні сферичної краплі запишемо в такому вигляді:

$$(p_i + p_s)_{r=R} = \overline{p}|_{r=R}, \qquad (v_r^i + v_r^s)_{r=R} = \overline{v}_r|_{r=R}. \tag{3}$$

Тут p_i і v_r^i — тиск і радіальна компонента швидкості в зовнішній рідині, зумовлені первинною хвилею; p_s і v_r^s — аналогічно для розсіяної хвилі; $\overline{p}$ і $\overline{v}_r$ — тиск і радіальна компонента швидкості рідини в краплі. Вказані величини визначаються через потенціали Φ_i і Φ_s за допомогою формул:

$$p = -\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}. \tag{4}$$

При формулюванні граничних умов (3) використано припущення, що амплітуда коливань поверхні краплі мала і можна вважати $R = \text{const}$. Розв'язки рівняння (2) запишемо у вигляді узагальнених рядів Фур'є за сферичними хвильовими функціями:

$$\Phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\theta)\exp(-i\omega t), \tag{5}$$

$$\overline{\Phi}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{A}_n h_n^{(1)}(\overline{k}r)P_n(\cos\theta)\exp(-i\omega t), \tag{6}$$

де $h_n^{(1)}(w)$ — сферичні функції Ганкеля першого роду; $j_n(w)$ — сферичні функції Бесселя; $P_n(\cos\theta)$ — поліноми Лежандра. Коефіцієнти A_n і $\overline{A}_n$ визначимо із граничних умов (3). Для цього потенціал (1) також запишемо у сферичній системі координат

$$\Phi_i=\sum_{n=0}^{\infty}A(2n+1)i^n j_n(kr)P_n(\cos\theta)\exp(-i\omega t). \tag{7}$$

Тепер, використовуючи потенціали (5) і (7) для визначення із формул (4) тиску $p=p_i+ + p_s$ і радіальної компоненти швидкості $v_r=v_r^i+v_r^s$ в зовнішній рідині, а потенціал (6) для визначення тиску $\overline{p}$ і радіальної компоненти швидкості $\overline{v}_r$ в рідині краплі, із граничних умов (3) на поверхні краплі ($r=R$) одержимо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n і $\overline{A}_n$ $(n=0,1,\ldots)$:

$$h_n^{(1)}(\alpha)A_n-\frac{\overline{\rho}_0\overline{k}\overline{a}_0}{\rho_0 k a_0}j_n(\overline{\alpha})\overline{A}_n=-A(2n+1)i^n j_n(\alpha), \tag{8}$$

$$\frac{dh_n^{(1)}(\alpha)}{dr}A_n-\frac{\overline{k}}{k}\frac{dj_n(\overline{\alpha})}{dr}\overline{A}_n=-A(2n+1)i^n\frac{dj_n(\alpha)}{dr}, \tag{9}$$

де $\alpha=kR$, $\overline{\alpha}=\overline{k}R$.

Із системи рівнянь (8) і (9) одержуємо формули для обчислення невідомих коефіцієнтів A_n і $\overline{A}_n$:

$$A_n=A(2n+1)i^n\frac{j_n(\alpha)\dfrac{dj_n(\overline{\alpha})}{dr}-\dfrac{\overline{\rho}_0\overline{a}_0}{\rho_0 a_0}j_n(\overline{\alpha})\dfrac{dj_n(\alpha)}{dr}}{\dfrac{\overline{\rho}_0\overline{a}_0}{\rho_0 a_0}j_n(\overline{\alpha})\dfrac{dh_n^{(1)}(\alpha)}{dr}-\dfrac{dj_n(\overline{\alpha})}{dr}h_n^{(1)}(\alpha)}, \tag{10}$$

$$\overline{A}_n=A(2n+1)i^{n+1}\frac{k}{\overline{k}\alpha^2}\frac{1}{\dfrac{\overline{\rho}_0\overline{a}_0}{\rho_0 a_0}j_n(\overline{\alpha})\dfrac{dh_n^{(1)}(\alpha)}{dr}-\dfrac{dj_n(\overline{\alpha})}{dr}h_n^{(1)}(\alpha)}. \tag{11}$$

Надалі обмежимося випадком, коли радіус сферичної краплі малий порівняно з довжиною звукової хвилі. Для цього випадку справедлива умова $\alpha\ll 1$. Легко показати, що тоді і $\overline{\alpha}\ll 1$. При цих умовах вирази (10) і (11) для коефіцієнтів A_n і $\overline{A}_n$ можна спростити, скориставшись асимптотичними формулами для функцій $j_n(w)$ і $h_n^{(1)}(w)$ і для їх похідних при малих значеннях аргумента w [5, 6]. В результаті перші три коефіцієнти A_n $(n=0,1,2)$ матимуть такий вигляд:

$$A_0=\frac{i}{3}A\alpha^3\frac{\dfrac{\varkappa-\overline{\varkappa}}{\overline{\varkappa}}}{1-\dfrac{\alpha^2}{3}\dfrac{\varkappa}{\overline{\varkappa}}},\qquad A_1=A\alpha^3\frac{\rho_0-\overline{\rho}_0}{2\overline{\rho}_0+\rho_0},\qquad A_2=i\frac{2}{9}A\alpha^5\frac{1-\dfrac{\overline{\rho}_0}{\rho_0}}{2+3\dfrac{\overline{\rho}_0}{\rho_0}}, \tag{12}$$

де $\varkappa=\rho_0 a_0^2$, $\overline{\varkappa}=\overline{\rho}_0\overline{a}_0^2$ — адіабатичні модулі пружності зовнішньої рідини і рідини краплі. Оскільки вже коефіцієнт A_2 відрізняється від коефіцієнтів A_0 і A_1 на величину порядку α^2, маючи при цьому порядок α^5, то можна стверджувати, що розсіяна на сферичній краплі хвиля визначається першими трьома доданками в потенціалі (5). Зауважимо при цьому, що нульовий доданок ($n = 0$) описує пульсаційні коливання сферичної краплі, а перший ($n = 1$) — осциляційні. Якщо умова $\overline{\varkappa} \gg \varkappa$ не виконується, то, як випливає із виразу для A_0, амплітуда пульсаційних коливань буде зростати при наближенні α до значення $\sqrt{3\overline{\varkappa}/\varkappa}$, яке відповідає резонансу пульсаційних коливань [6]. Надалі потенціал $\overline{\Phi}$ використовувати не будемо, тому вирази для $\overline{A}_n$ не наводимо.

2. Визначення радіаційної сили, яка діє на краплю рідини. Радіаційну силу обчислимо, осереднивши в часі гідродинамічну силу, яка діє в звуковому полі на краплю з боку рідини. Завдяки осьовій симетрії поля вона направлена вздовж осі Ox

$$F_x = -2\pi R \int\limits_0^\pi p \sin\theta \cos\theta \, d\theta. \tag{13}$$

Тиск p в (13) будемо визначати із співвідношення [3, 4]

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0 (\mathrm{grad}\Phi)^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{a_0^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2, \tag{14}$$

в якому потенціал $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$ є розв'язком лінійної задачі дифракції [3, 4]. Вкажемо, що в (14) похідну $\partial\Phi/\partial t$ необхідно обчислювати за формулою [4]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - V_x \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + V_x \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \tag{15}$$

де $d\Phi/dt$ — повна похідна за часом; V_x — швидкість сферичної краплі, яку визначимо, обчисливши $v_r = \partial\Phi/\partial r$ при $r = R$ і $\theta = 0$. В результаті маємо

$$V_x = v_r(r = R, \theta = 0, t) = Ak\left(1 - 2\frac{\overline{\rho}_0 - \rho_0}{2\overline{\rho}_0 + \rho_0}\right)\sin\omega t. \tag{16}$$

Вкажемо, що при визначенні тиску p у формулі (14) необхідно взяти дійсну частину ($\mathrm{Re}\,\Phi$) комплексної величини Φ. Враховуючи (14), (15), (7), (5) і (12), визначимо гідродинамічну силу (13), після осереднення якої за періодом первинної хвилі (1) одержимо радіаційну силу, що діє на краплю в акустичному полі

$$\langle F_x \rangle = \frac{2}{27} A^2 \pi \rho_0 \frac{1}{2+\eta}\left[\frac{\dfrac{\varkappa - \overline{\varkappa}}{\overline{\varkappa}}}{1 - \dfrac{\alpha^2}{3}\dfrac{\varkappa}{\overline{\varkappa}}}(\eta - 10) + 4(1-\eta)\right]\alpha^6 + O(\alpha^8). \tag{17}$$

3. Отже, із аналізу формули (16) випливає, що при наближенні значення α до величини свого резонансного значення $\sqrt{3\overline{\varkappa}/\varkappa}$ радіаційна сила (17) буде зростати. В тому випадку, коли крапля рідини за своїми механічними властивостями не відрізняється від зовнішньої рідини ($\overline{\rho}_0 = \rho_0$, $\overline{\varkappa} = \varkappa$), радіаційна сила дорівнює нулю. Це пов'язано з тим, що середній в часі тиск з'являється в неоднорідному звуковому полі, зумовленому наявністю розсіяної звукової хвилі, або при поглинанні первинної хвилі. В межах прийнятого при дослідженні наближення, як випливає із (17), можна стверджувати, що крапля рідини під дією радіаційної сили може рухатися як у напрямі поширення акустичної хвилі, так і в протилежному напрямі (при $\overline{\rho}_0 < \rho_0$).

1. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 520 с.
2. *Гольдберг З. А.* Давление звука // Мощные ультразвуковые поля. – Москва: Наука, 1968. – 267 с.
3. *King L. V.* On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1934. – **147**, No 861. – P. 212–240.
4. *Guz A. N., Zhuk A. P.* Motion of solid particles in a liguid under the action of an acoustic field: the mechanism of radiation pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 3. – P. 246–265.
5. *Морз Ф.* Колебания и звук. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1949. – 496 с.
6. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 336 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 07.12.2006

УДК 517.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк, А. С. Хорошун**

К теории параметрической устойчивости

A general method of analysis based on Lyapunov's direct method is presented for studying the parametric stability of the nonlinear systems of differential equations. The results demonstrate the roles played by (1) estimating the domain of potential asymptotic stability and (2) constructing the auxiliary Lyapunov function.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, p), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m$, $f(x,p) = (f_1(x,p), \ldots, f_n(x,p))^T$, $f_i\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Вектор-функция $f(x,p)$ предполагается достаточно гладкой, и решение $x(t, x_0, p)$ системы (1) существует при всех $t \geqslant t_0$ и $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in P \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $x^e(p)$ — состояние равновесия, соответствующее некоторому значению параметра p.

Относительно системы (1) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. *Система уравнений* (1) *такова, что:*

1) функции

$$f_i(x,p), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

определены и непрерывны на некотором открытом множестве $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *вместе с частными производными*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad i,j = 1, \ldots, n, \qquad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_k}, \qquad i,l,k = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial p_s}, \qquad i,l = 1, \ldots, n, \qquad s = 1, \ldots, m;$$

2) для некоторого значения вектор-параметра p^* *существует состояние равновесия* $x^* = x^e(p^*)$ *так, что* $f(x^*, p^*) = 0$ *и точка* (x^*, p^*) *принадлежит множеству* Γ*;*