

УДК 519.1

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ГІЛОК І ГРАНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З МЕТОЮ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

І.М. Мельник

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем
НАН та МОН України,
astrid@irtc.org.ua*

В статті пропонується стохастичний метод гілок і границь для розв'язання задачі дискретної оптимізації з метою вибору оптимальної регресійної моделі при мінімакшому функціоналі якості моделі. Для розбиття поточної множини розв'язків задачі на підмножини розгалуження використовується принцип дихотомії. Для підмножин розгалуження обчислюються нижні оцінки значення цільової функції оптимізації моделі. Вибір поточної підмножини розв'язків для процесу розгалуження здійснюється стохастичною процедурою.

Ключові слова: оптимальна регресійна модель, дискретна оптимізація, метод гілок та границь, підмножина розгалуження, цільова функція, нижня оцінка.

Article suggests a stochastic method of leaps and bounds to solve a discrete optimization task for the optimum regression model choice with minimax function of model quality. For partition of a current set of task solutions into parts of branching subsets, the dichotomy principle is used. For a branching subset, the lower estimation is calculated for the goal function of the optimum model. The choice of a current subset of the branching process is carried out by a stochastic procedure.

Keywords: optimum regression model, discrete optimization, method of leaps and bounds, branching subset, goal function.

В статье предлагается стохастический метод ветвей и границ для решения задачи дискретной оптимизации по выбору оптимальной регрессионной модели при минимаксном функционале качества модели. Для разбиения текущего множества решений задачи на подмножества разветвления используется принцип дихотомии. Для подмножеств разветвления вычисляются нижние оценки значения целевой функции оптимальной модели. Выбор текущего подмножества решений для процесса ветвления осуществляется стохастической процедурой.

Ключевые слова: оптимальная регрессионная модель, дискретная оптимизация, метод ветвей и границ, подмножество разветвления, целевая функция, нижняя оценка.

Вступ

Для більшості задач аналізу та прийняття рішень економічного характеру параметри та показники, які характеризують відповідні об'єкти, мають дискретний характер. Це, на наш погляд, часто відображає парадигми сприйняття дійсності суб'єктами прийняття рішень, Пошуки „добрих” рішень такого роду задач, як правило, носять перебірний характер. З математичної точки зору постановки цих задач відноситься до так званих задач дискретної оптимізації. Цей клас задач має свій алгоритмічний апарат, який часто має на меті зменшення трудомісткості перебірного процесу їх розв'язання.

2. Постановка проблеми

Одним з підходів до розв'язання задач дискретної оптимізації є алгоритмічна схема методу гілок і границь. Вперше цей метод був запропонований Лен-

дом і Дойгом [1] у 1960 р. для розв'язання задачі цілочисельного лінійного програмування. Інтерес до цього методу і фактично його “друге народження” пов'язане з роботою Літла, Мурті, Суїні та Керела [2], присвяченою задачі комівояжера. Починаючи з цього моменту, з'явилася велика кількість робіт на основі методу гілок і границь та різних його модифікацій. Такий значний успіх пояснюється тим, що ці автори першими звернули увагу на широту можливостей цього методу, відзначили важливість використання при цьому специфіки розв'язуваної задачі й самі це продемонстрували, скориставшись специфікою задачі при розробці ефективного алгоритму розв'язання задачі комівояжера.

В основі алгоритмічної схеми методу гілок і границь лежить ідея послідовного розбиття поточної множини допустимих розв'язків на підмножини (підмножини розгалуження). На кожному кроці цього методу елементи розбиття (тобто підмножини розв'язків) піддаються перевірці для з'ясування, чи може дана підмножина містити оптимальний розв'язок. Перевірка здійснюється за допомогою обчислення значення *нижньої оцінки* цільової функції (оцінки знизу для задач мінімізації) на цій підмножині розв'язків і співставлення значення оцінки зі значенням *рекорду* на цей момент.

Нижня оцінка цільової функції на даній підмножині розв'язків – це таке дійсне число, яке явно не більше (менше) будь-якого значення цільової функції на цій підмножині. *Рекорд* – це значення цільової функції задачі для найкращого на даний момент зі знайдених розв'язків. Якщо нижня оцінка цільової функції на даній підмножині розв'язків не менше (більше) рекорду, то ця підмножина може бути відкинута для подальшого розгляду, оскільки явно не містить оптимальний розв'язок. Підмножина розв'язків, яка перевіряється, може бути відкинута ще й у тому випадку, коли вдається знайти на якомусь кроці розв'язок, кращий нижньої оцінки цільової функції на цій підмножині.

Якщо значення цільової функції для знайденого розв'язку менше раніше обчисленого рекорду, то значення рекорду змінюється на це значення. Якщо на якомусь кроці вдається відкинути всі елементи розбиття (підмножини розв'язків), то значення рекорду — це оптимальне значення розв'язку початкової задачі. В іншому випадку з невідкинутих підмножин розв'язків обирається одне з перспективних (наприклад, з найменшою нижньою оцінкою цільової функції), і воно розбивається на підмножини розгалуження. Ці нові підмножини розв'язків знов перевіряються і т.д. дот, поки на якомусь кроці не вийде, що значення рекорду буде меншим (не більшим) значень нижніх оцінок цільової функції на всіх підмножинах розгалуження. По закінченні цього обчислювального процесу поточне значення рекорду і є оптимальним значенням цільової функції, а відповідний розв'язок є оптимальним розв'язком початкової задачі.

Дамо деякі необхідні означення. Нехай розглядається n -вимірний метричний простір дійсних чисел R^n з заданою нормою (відстанню) $\rho(x, y)$, де x та y – будь-які елементи з простору R^n [3], і нехай X – деяка множина елементів з цього метричного простору R^n .

Множина X є *дискретною* множиною, якщо для будь-якого її елемента $x, x \in X$, існує дійсне число $\varepsilon(x) > 0$ таке, що для кожного іншого елемента y з

цієї множині X має місце нерівність $\rho(x, y) > \varepsilon(x)$. Тобто для кожного елемента з множини X існує область (сфера) в множині X , в якій крім цього елемента не існує інших елементів цієї множини.

Задано деяку функцію $F(x)$ на множині X , яка приймає значення в m -вимірному метричному просторі дійсних чисел R^m . Тобто функція $F(\cdot)$ відображає множину X з метричного простору R^n на деяку множину W дійсних m -вимірних векторів у метричному просторі R^m . Функція $F(\cdot)$ своїми значеннями з множини W задає *часткову впорядкованість* на множині X . Тобто для будь-яких двох елементів x та y з множини X має місце одне з відношень:

1) елемент x *домінує* над елементом y ($x \geq y$), якщо $F(x) \leq F(y)$; елемент x *строго домінує* над елементом y ($x > y$), якщо $F(x) < F(y)$;

2) навпаки, елемент y *домінує* над x ($y \geq x$), якщо $F(x) \geq F(y)$; елемент y *строго домінує* над x ($y > x$), якщо $F(x) > F(y)$.

3) елементи x та y не порівнюються між собою (не домінують один над одним), якщо не виконуються ні $F(x) \leq F(y)$ ($x \geq y$), ні $F(x) \geq F(y)$ ($x \geq y$).

В множині X є підмножина X^d (тобто $X^d \subseteq X$), яка містить тільки *домінуючі* елементи множини X . Тобто в підмножині X^d містяться елементи, які не домінують один над одним і для яких в доповненні до X^d (тобто в $X \setminus X^d$) немає елементів, які б їх домінували. Якщо функція $F(x)$ є числовим вектором (тобто розмірність простору R^m її значень одиниці, $m > 1$), множина X^d ще називається *множиною Парето* для функції $F(x)$ на множині X .

Якщо функція $F(x)$ для кожного x має тільки одне дійсне значення, а не є вектором, то функція $F(\cdot)$ своїми значеннями з множини W задає *повну впорядкованість* на множині X . В цьому випадку підмножина X^d називається підмножиною *оптимальних* елементів для функції $F(x)$ в множині X . При цьому для всіх елементів у X^d (якщо їх більше одного) значення функції $F(x)$ однакові (рівні між собою), і в множині X немає елементів, для яких значення функції $F(x)$ менше значення цієї функції для елементів в X^d .

У загальному випадку задача дискретної оптимізації формулюється так: необхідно знайти оптимум (мінімум) функції $F(x)$, де елемент x вибирається з деякої дискретної множини X , тобто розглядається така задача:

$$F(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$x \in X, \quad (2)$$

де X - дискретна множина.

В даному дослідженні розглядається задача вибору оптимальної регресійної моделі як однокритеріальна задача дискретної оптимізації.

3. Постановка задачі

Задача вибору оптимальної регресійної моделі полягає у виборі з множини факторів, що описують економічний процес, таку їх підмножину, яка достатньо адекватно представляє функціонування цього процесу і при цьому оптимізує деякий функціонал якості моделі. Ця задача має дискретний характер і відноситься до так званих *NP*-повних задач. Пошук її розв'язання носить перебірний характер і є дуже трудомістким обчислювальним процесом.

Нехай розглядається складна система, яка характеризується n вхідними (незалежними) змінними $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ та однією вихідною (залежною) змінною y , що мають стохастичний характер і задані вибіркою з m статистичних спостережень цих змінних. В процесі ідентифікації генеруються структури лінійних регресійних моделей, параметри яких оцінюються за методом найменших квадратів (МНК). Задано функціонал оцінки моделі $F(\cdot)$, тобто функціонал вибору оптимальної моделі, який має мінімаксийний характер.

Розглядається такий критерій вибору регресійної моделі. Задано множину точок вибірки спостережень $S = \{1, \dots, m\}$. Нехай маємо деяку підмножину вхідних (незалежних) змінних із загальної множини $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$. На цій підмножині буде будуватися відповідна регресійна модель типу $y = \sum a_i x_i$, де сумування проводиться по тих змінних із загальної множини, які включені у вибрану підмножину, а коефіцієнти a_i обчислені за МНК для цієї підмножини. Хай J – це номери змінних з вибраної підмножини, або підмножина з множини номерів незалежних змінних $I = \{1, \dots, n\}$, $J \subseteq I = \{1, \dots, n\}$. Значення функціоналу оцінки регресійної моделі $F(J)$ обчислюється так:

$$F(J) = \max_{l \in S} (y^l - \sum_{i \in J} a_i(J) x_i^l)^2, \quad (3)$$

де $J = \{i \mid x_i \in X_1\}$ – підмножина з множини номерів незалежних змінних I , а X_1 – вибрана підмножина вхідних змінних, на яких буде будуватись регресійна модель, а через $a_i(J), i \in J$, позначаються коефіцієнти регресійної моделі, які знайдені за МНК для набору регресорів X_1 . Значення функціоналу (3) обчислюється як максимальне значення квадрата нев'язок між статистичним значенням вихідної змінної y та значенням відповідної регресійної моделі за всіма k -ми, $k \in S$, спостереженнями значень вхідних змінних з X_1 . Отже, для розв'язання початкової задачі необхідно знайти таку підмножину J^* з множини I , $J^* \subseteq I$, яка би мінімізувала значення функціоналу (3), тобто

$$F(J^*) = \min \max_{l \in S} (y^l - \sum_{i \in J} a_i(J) x_i^l)^2, \quad (4)$$

де мінімум береться за всіма підмножинами J з множини I .

В [4] задачу вибору оптимальної регресійної моделі формулювалась і

розв'язувалась як задача дискретної оптимізації на спеціальному графі (I, U) . Множина вершин I цього графа формується так. Кожній незалежній змінній $x_i, i = 1, \dots, n$, ставиться у відповідність вершина графа i . Додаються також ще дві вершини: 0 та $n+1$. Множина дуг U будується таким чином: вершина 0 з'єднується з кожною вершиною i ($i = 1, \dots, n$) дугою $(0, i)$, далі кожна вершина i з'єднується з кожною вершиною $j, j > i$, дугою (i, j) .

Кожному шляху з вершини 0 у вершину $n+1$ відповідає певний варіант побудови регресійної моделі, а саме такої, в яку у вигляді регресорів включаються незалежні змінні x_i , що відповідають вершинам графа (I, U) , через які проходить цей шлях. Кожному шляху μ з вершини 0 у вершину $n+1$ ставиться у відповідність його "довжина", яка дорівнює значенню функціонала вибору оптимальної моделі $F(\cdot)$. Отже, початкова задача побудови регресійної моделі (задача вибору оптимального набору регресорів) зводиться до знаходження найкоротшого шляху з вершини 0 у вершину $n+1$ на графі (I, U) .

Для так сформульованої задачі вибору оптимальної регресійної моделі як дискретної задачі оптимізації на графі був запропонований генетичний метод [4] розв'язання цієї задачі як ефективний наближений метод.

4. Основний матеріал дослідження

В статті задачу вибору оптимальної регресійної моделі пропонується формулювати і розв'язувати як задачу дискретної оптимізації в загальній постановці. Для цієї задачі, з врахуванням її специфіки, розроблено спеціальний точний метод її розв'язання – стохастичний аналог методу гілок та границь. Для цього методу суттєво необхідно мати процедуру (формулу) обчислення оцінки знизу (нижньої оцінки) значення цільової функції задачі, яка підлягає розв'язанню, на довільній підмножині розв'язків цієї задачі.

Будемо розв'язувати загальну задачу як послідовність n часткових задач, тобто виконувати відповідну декомпозицію загальної задачі на n часткових задач. Кожна k -та ($k = 1, \dots, n$) часткова задача полягає в пошуку методом гілок і границь найкращого (субоптимального) розв'язку на відповідній підмножині розв'язків з усієї множини розв'язків задачі вибору оптимальної регресійної моделі як задачі дискретної оптимізації.

Отже, розглядаємо розв'язання k -ї часткової задачі методом гілок та границь. При цьому оцінка знизу функціоналу оцінки моделі (3) буде визначатись (обчислюватись) так. Підмножина номерів змінних k -ї часткової задачі задається так: $J_k = \{k, k+1, \dots, n\}$ ($J_k \subseteq I = \{1, \dots, n\}$). Відповідною для J_k підмножиною розв'язків k -ї часткової задачі є всі набори змінних з номерами, компільованими з підмножини J_k , тобто це всі набори змінних, які взяті з підмножини змінних $X_k = \{x_i, i \in J_k\} = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$. Тоді *нижньою оцінкою* $R(J)$ цільової функції (3) для підмножини розв'язків k -ї часткової задачі, яка складається з множини всіх наборів змінних з X_k , означимо так обчислене дійсне число:

$$R(J_k) = (\sum_{l=1}^m (y^l - \sum_{i \in J_k} a_i(J_k) x_i^l)^2) / (n - k + 1). \quad (5)$$

Щоб показати, що значення функції $R(J_k)$ є нижньою оцінкою для значень функціоналу оцінки моделі $F(X_k^1 \subseteq X_k)$, необхідно довести, що для довільної підмножини X_k^1 з множини X_k виконується нерівність

$$F(X_k^1) \geq R(X_k).$$

Доведення цього факту проводиться від протилежного.

Також доводиться, що функція $R(J)$ монотонно зростає в процесі процедури розгалуження (що є необхідною методологічною вимогою для процедури визначення нижньої оцінки цільової функції в методі гілок і границь).

Отже, загальне розв'язання початкової задачі вибору оптимальної регресійної моделі розкладається на послідовне розв'язання n часткових задач дискретної оптимізації. Кожна k -а часткова задача дискретної оптимізації – це вибір найліпшого розв'язку на так званій множині розв'язків k -го типу I_k ($k = 1, \dots, n$). Множина розв'язків k -го типу I_k ($k = 1, \dots, n$) – це множина таких розв'язків початкової задачі, які обов'язково містять змінну з номером k , $k > 0$ (тобто змінну x_k), а також, можливо, ще всі або частину змінних x_i , номери яких більше k ($i > k$). Таким чином, загальна множина розв'язків I розбивається на n підмножин I_k (розв'язків n типів), які не перетинаються і в сумі дають загальну множину розв'язків.

Опишемо використання методу гілок і границь для пошуку найкращого розв'язку на множині розв'язків k -го типу I_k ($k = 1, \dots, n$).

Здійснюємо розбиття (розгалуження) цієї множини I_k на дві підмножини за принципом дихотомії (навпіл). Перша підмножина I_k^1 включає розв'язки, що містять змінні з номерами $(k, k+1, \dots)$, $(k, k+2, \dots)$, ..., $(k, k + [(n-k)/2], \dots)$, де $[(n-k)/2]$ – ціла частина від значення $(n-k)/2$. Друга підмножина I_k^2 включає розв'язки, що містять змінні з наборами номерів $(k, k + [(n-k)/2] + 1, \dots)$, $(k, k + [(n-k)/2] + 2, \dots)$, $(k, k + [(n-k)/2] + 3, \dots)$, ..., $(k, n-2, \dots)$, $(k, n-1, \dots)$, (k, n) . Позначимо $[(n-k)/2]$ через p , тобто $p = [(n-k)/2]$. Значення нижньої оцінки цільової функції обчислюємо аналогічно (5), для першої підмножини I_k^1 це буде $R_1^{(1)}$. Для підмножини розв'язків I_k^1 формула (5) приймає такий вигляд:

$$R_1^{(1)} = R(I_k^1) = (\sum_{l=1}^m (y^l - \sum_{i=k}^{k+p} a_i(I_k^1) x_i^l)^2) / (p+1), \quad (5')$$

де коефіцієнти $a_i(I_k^1)$, $i = k, k+1, \dots, k+p$, знайдені за МНК для набору регресорів $\{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}\}$.

Аналогічно (5) обчислюємо значення нижньої оцінки цільової функції для другої підмножини розв'язків I_k^2 – це буде $R_2^{(1)}$. Для цієї підмножини розв'язків

формула (5) приймає такий вигляд:

$$R_2^{(1)} = R(I_k^2) = \left(\sum_{l=1}^m (y^l - \sum_{i=k+p+1}^n a_i (I_k^2) x_i^l)^2 \right) / (n - k - p), \quad (5'')$$

де коефіцієнти $a_i(I_k^1)$, $i = k + p + 1, \dots, n$, знайдені за МНК для набору регресорів $\{x_{k+p+1}, \dots, x_n\}$.

На основі значень нижніх оцінок цільової функції на підмножинах розв'язків I_k^1 та I_k^2 обчислюються відповідні значення ймовірностей для цих підмножин. Для першої підмножини I_k^1 це буде $P_1^{(1)} = R_2^{(1)} / (R_1^{(1)} + R_2^{(1)})$, а для другої підмножини I_k^2 , відповідно, $P_2^{(1)} = R_1^{(1)} / (R_1^{(1)} + R_2^{(1)})$. Далі, стохастично „розігруються” за допомогою обчислених імовірностей підмножини розв'язків (I_k^1 або I_k^2) для подальшого розгалуження.

З обраною таким чином підмножиною розв'язків діємо аналогічно. Наприклад, в результаті „розіграшу” отримали для подальшого розгалуження підмножину I_k^1 . Розділяємо її на дві підмножини розв'язків: I_k^{11} та I_k^{12} . Підмножина I_k^{11} містить змінні з $(k, k + 1, \dots), (k, k + 2, \dots), \dots, (k, k + [p/2])$, а I_k^{12} – з номерами $(k, k + [p/2] + 1, \dots), (k, k + [p/2] + 2, \dots), \dots, (k, k + p)$. Згідно з формулами (5), (5') та (5'') обчислюються значення нижніх оцінок цільових функцій для цих двох підмножин розв'язків. Нехай для підмножин I_k^{11} та I_k^{12} це будуть $R_1^{(2)}$ та $R_2^{(2)}$. На основі значень цих нижніх оцінок обчислюються відповідні ймовірності вибору підмножини (I_k^{11} або I_k^{12}) для продовження процесу розгалуження: $P_1^{(2)} = R_2^{(2)} / (R_1^{(2)} + R_2^{(2)})$ для I_k^{11} та $P_2^{(2)} = R_1^{(2)} / (R_1^{(2)} + R_2^{(2)})$ для I_k^{12} .

Відповідно до цих ймовірностей виконується стохастична процедура „розіграшу” для вибору підмножини розв'язків (I_k^{11} або I_k^{12}) для подальшого розгалуження. Після вибору такої підмножини розбиваємо її знову на дві нові підмножини розв'язків. Для них знову обчислюються значення нижніх оцінок цільової функції, потім обчислюються відповідні ймовірності для стохастичного вибору наступної підмножини розв'язків для продовження процесу розгалуження, і так далі, поки на черговому етапі розгалуження не одержиться підмножина розв'язків з одним елементом (розв'язком). Обчислюється значення цільової функції (3) для цього розв'язку і це значення приймається за рекорд.

На кожному кроці алгоритмічного процесу проводиться співставлення цього значення рекорду зі значеннями нижніх оцінок цільової функції для всіх визначених у процесі розгалуження підмножин розв'язків. Ті підмножини розв'язків, які ще не піддавалися процедурі подальшого розгалуження і для яких значення оцінок знизу не менше (більше) значення рекорду, є *неперспективними* для подальшого розгалуження і відкидаються з подальшого розгляду. З тих підмножин розв'язків, які залишилися для подальшого процесу розгалу-

ження, вибирається деяка їх підмножина як початкова, і обчислювальний процес розгалуження продовжується. Для вибраної підмножини розв'язків здійснюється, аналогічно описаному вище, процес розгалуження на основі принципу дихотомії. Якщо при цьому на якомусь кроці цього процесу виникають підмножини розв'язків, для яких нижні оцінки не менше рекорду, то вони відкидаються з подальшого розгляду для процесу розгалуження.

Обчислювальний процес продовжується доти, поки в решті-решт на якомусь кроці не виникне ситуація, що всі підмножини, збудовані при розгалуженні, мають значення нижніх оцінок цільової функції більше (не менше) значення рекорду, або матимемо підмножину, яка має лиш один розв'язок. В першому випадку процедура закінчується, розв'язок уже знайдено. В другому випадку порівнюємо значення цільової функції знайденого розв'язку зі значенням рекорду, і якщо це значення менше рекорду, то беремо його за рекорд. Потім знову переходимо на початок процесу розгалуження для продовження обчислювального процесу. Процес обчислення закінчується, коли маємо такий рекорд, що його значення не більше значення нижніх оцінок для всіх підмножин, які виникли в процесі розгалуження. Значення цього рекорду і є розв'язком k -ої часткової задачі для задачі вибору оптимальної регресійної моделі.

Для загальної задачі розв'язуємо почергово стохастичним методом гілок і границь n часткових задач, тобто розв'язуємо послідовно такі задачі для $k = 1$, $k = 2$, і так далі, до $k = n$. Потім з усіх субоптимальних розв'язків, які були знайдені при розв'язанні часткових задач, вибирається найкращий – він і буде розв'язком загальної задачі вибору оптимальної регресійної моделі.

В описаній вище алгоритмічній схемі методу гілок і границь для розв'язання задачі вибору оптимальної регресійної моделі послідовно ділили кожен підмножину розгалуження на дві підмножини і з них вибирали одну (випадково), для якої знову виконувалося розгалуження розбиттям її також на дві підмножини. З них знову вибиралася одна підмножина і так далі за відповідною ієрархічною схемою. Цей процес розгалуження здійснюється доти, поки не визначиться підмножина, яка містить лише один розв'язок. Після переозначення рекорду робиться перехід на початок процесу розгалуження.

За аналогічною загальною схемою здійснюється лінійний ієрархічний процес розгалуження підмножин доти, поки знову не визначимо підмножину, яка міститиме лише один розв'язок. Визнається нове значення рекорду і так далі, поки не буде визначено оптимальний розв'язок початкової задачі. В цій алгоритмічній схемі методу гілок і границь переслідувалася мета, щоб на кожному кроці повної ітерації процесу розгалуження вийти на підмножину з одним розв'язком для уточнення значення рекорду.

Отже, в описаній вище схемі обчислювального процесу методу гілок і границь для розв'язання задачі вибору регресійної моделі послідовно на кожному кроці розгалуження ділили (дробили) на дві підмножини розв'язків (стохастичною процедурою) тільки ту підмножину, яка перед цим розгалужувалася.

Проте процес розгалуження можна змінити таким чином, щоб на кожному кроці для вибору кандидатури підмножини розв'язків для подальшого розгалуження розглядалися всі підмножини розв'язків, які були отримані на попере-

дніх кроках, і для яких не здійснювалась процедура розгалуження. Для цього одночасно визначаються значення ймовірностей для всіх цих підмножин розв'язків, на основі яких виконується стохастичний „розіграш” для вибору підмножини для подальшого розгалуження. Яка, у свою чергу, буде піддаватись процедурі розгалуження з розбиттям її відповідно до принципу дихотомії на дві підмножини. Для цих двох підмножин розв'язків будуть визначатися нижні оцінки значень цільової функції, як і для інших підмножин, за формулами (5') та (5''). Ці дві підмножини приєднуємо замість підмножини, яка перед цим дробилася, до множини підмножин розв'язків, які до цього моменту не піддавалися процедурі розгалуження.

Для нової множини підмножин розв'язків, які не піддавалися процедурі розгалуження, на основі значень нижніх оцінок обчислюються відповідні ймовірності. На основі цих ймовірностей зі всієї множини підмножин розв'язків за допомогою стохастичного „розіграшу” вибирається поточна підмножина для подальшого процедури. Далі для цієї підмножини розв'язків знову здійснюється розгалуження на дві підмножини, потім проводиться обчислення для них нижніх оцінок значення цільової функції, і так далі поки не отримаємо ситуацію, коли поточне значення рекорду (тобто значення цільової функції відповідного розв'язку) не більше значень нижніх оцінок цільової функції для всіх підмножин розв'язків, отриманих у процесі виконання процедур розгалуження.

5. Висновки

В статті описано стохастичний метод гілок і границь для розв'язання задачі дискретної оптимізації з метою вибору оптимальної регресійної моделі для мінімаксного функціоналу якості. Для розбиття поточної множини розв'язків задачі на підмножини розгалуження використовується принцип дихотомії. Для підмножин розгалуження обчислюються нижні оцінки значень цільової функції вибору оптимальної моделі. Вибір підмножини розв'язків для процесу розгалуження здійснюється стохастичною процедурою. Метод суттєво використовує специфіку задачі, завдяки чому ефективно її розв'язує.

Література

1. Land A.H., and Doig A.G. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrics*. V. 28 (1960), pp. 497-520.
2. Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., and Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operations Research*. V. 11 (1963), pp. 972-989.
3. А.Н.Колмогоров, С.Ф.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Издательство “Наука”, Москва, 1976. - 544 с.
4. Мельник И.М. Генетический алгоритм решения задачи построения оптимальной регрессионной модели как задачи дискретной оптимизации // Проблемы управления и информатики. – 2008. - №3. – с.30-43