Український математичний вісник
Том 16 **(2019)**, № 2, 239 – 276

О рядах и преобразованиях Фурье

Роальд М. Тригуб

*По случаю 100–летия со дня рождения Г. Д. Суворова
и ему посвящена с благодарностью*

Аннотация. Настоящая обзорная статья относится к классическому гармоническому анализу. В ней, в частности, приведен ряд классических теорем с наиболее простыми, на наш взгляд доказательствами, см. также [1] и цитируемую там литературу. Ряд результатов настоящей статьи является новыми и они публикуются впервые.

Ключевые слова и фразы. Теоремы Бернштейна, Винера–Пэли, Левитана, Котельникова–Шеннона, принцип неопределённости, теорема Титчмарша о свёртке, теорема Уитни, обобщённая формула Эйлера–Маклорена, алгебра Винера, положительная определённость, функция Бесселя.

1. Тригонометрические полиномы и целые функции экспоненциального типа. Пространство L_2

Начнём с неравенства Бернштейна для производной целой функции экспоненциального типа и теоремы Винера–Пэли.

Целая функция называется *целой функцией экспоненциального типа (ц.ф.э.т)* не выше $\sigma \geq 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует R_ε:

$$|z| > R_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

Пример. $f(z) = \int\limits_{-\sigma}^{+\sigma} g(x)e^{ixz}dx$, где $g \in L_1\big([-\sigma, +\sigma]\big)$.

Для того чтобы целая функция имела тип не больше σ необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big(n!\big|f^{(n)}(0)\big|\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \sigma.$$

Статья поступила в редакцию 20.05.2019

ISSN 1810 – 3200.

Необходимость следует из формулы Коши для производной в центре $z = 0$ кругов растущих радиусов, а достаточность из оценки модуля суммы степенного ряда Тейлора–Маклорена по его коэффициентам. Отсюда сразу следует, что и производная является ц.ф.э.т. не выше σ.

Если, дополнительно, сужение функции на вещественную прямую принадлежит $L_p(\mathbb{R})$, то будем писать $f \in W_{p,\sigma}$. При $p = +\infty$, когда здесь и далее $||f||_\infty$ – это существенная верхняя грань модуля функции, ограниченной почти всюду, пишут обычно B_σ вместо $W_{\infty,\sigma}$.

Теорема 1.1 (Неравенство Бернштейна)
Если $f \in W_{p,\sigma}$, $p \in [1, +\infty]$, то и $f' \in W_{p,\sigma}$, а

$$||f'||_p \leq \sigma||f||_p = \sigma\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство точное (неулучшаемое). Прямое доказательство приведено ниже. Эта теорема следует и из классической теоремы Винера–Пэли, а из неравенства Бернштейна при $p = 2$ ниже выводится теорема Винера–Пэли.

Теорема 1.2 (Винер–Пэли)
Если $f \in W_{2,\sigma}$, то существует $g \in L_2[-\sigma, +\sigma]$, при которой

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{+\sigma} g(x)e^{ixz}dx.$$

Теорема 1.3 *Из теоремы 1.1 при $p = 2$ сразу следует теорема 1.2 и, наоборот, из теоремы 1.2 следует теорема 1.1.*

Докажем теорему 1.3, а затем теорему 1.1.

Доказательство теоремы 1.3. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с нормой $||f||_2$ оператор Фурье $f \to \widehat{f}$, где

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx,$$

является унитарным оператором (действует на всё пространство с сохранением нормы и скалярного произведения). Кроме того,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)e^{ixy}dy.$$

Интегралы по прямой можно понимать (по Планшерелю) как пределы в L_2 интегралов по $[-n,n]$ при $n\to\infty$ или равенством почти всюду

$$\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{d}{dy}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{1-e^{-ixy}}{ix}dx.$$

Из неравенства Бернштейна при $p=2$, применённого r раз, следует:

$$\int\limits_{\mathbb{R}}y^{2r}\big|\widehat{f}(y)\big|^2dy=\big|\big|f^{(r)}\big|\big|_2^2\le\sigma^{2r}||f||_2^2=\sigma^{2r}\int\limits_{\mathbb{R}}\big|\widehat{f}(y)\big|^2dy.$$

Оставляя в первом интеграле множество $|y|\ge\sigma+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, получаем

$$\Big(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma}\Big)^{2r}\int\limits_{|y|\ge\sigma+\varepsilon}\big|\widehat{f}(y)\big|^2dy\le||f||_2^2$$

и после перехода к пределу при $r\to\infty$ имеем $\displaystyle\int\limits_{|y|\ge\sigma+\varepsilon}\big|\widehat{f}(y)\big|^2dy=0.$

Поэтому $\widehat{f}(y)=0$ почти всюду при $|y|\ge\sigma$ и $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\sigma}^{+\sigma}\widehat{f}(x)e^{ixy}dy$ при $x\in\mathbb{R}$. Но это две целые функции и равенство верно при $x=z\in\mathbb{C}$. См. также ниже теорему 1.7 (обобщение теоремы Винера–Пэли).

Если же $f\in W_{2,\sigma}$, то в силу теоремы Винера–Пэли

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{+\sigma}\widehat{f}(y)e^{ixy}dy$$

и, значит,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{+\sigma}iy\widehat{f}(y)e^{ixy}dy.$$

Но тогда используя унитарность оператора Фурье, получаем

$$||f'||_2^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{+\sigma}\big|iy\widehat{f}(y)\big|^2dy\le\sigma^2\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{+\sigma}|f(y)|^2dy=\sigma^2||f||_2^2.$$

А это и есть неравенство Бернштейна при $p=2$.

Но из теоремы Винера–Пэли можно вывести неравенство Бернштейна при любом $p\ge1$. Дело в том, что можно считать, что ещё

$f \in L_2$, заменяя f на $f_\varepsilon(x) = f(x)\dfrac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x}$ с переходом в ответе к пределу при $\varepsilon \to 0$. А для производной функции $f \in W_{2,\sigma}$ есть представление, вытекающее из теоремы Винера–Пэли. В эту формулу введём функцию $h(y) = \sigma - |y|$ на $[-\sigma, \sigma]$ и $h(y + 2\sigma) = h(y)$, которая представима рядом Фурье, и это главное, с положительными коэффициентами (положительно определённая функция):

$$h(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{ik\pi y}{2\sigma}}, \quad \sum_k |c_k| = \sum_k c_k = h(0) = \sigma.$$

Получаем, что

$$f'(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} h(y-\sigma)\widehat{f}(y) e^{ixy} dy = i \sum_k c_k e^{-ik\frac{\pi}{2}} f\Big(x + \frac{k\pi}{2\sigma}\Big)$$

и, значит, $\big||f'|\big|_p \le \sum\limits_k |c_k| \cdot ||f||_p = \sigma ||f||_p$.

Теорема 1.3 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Сначала при $p = \infty$.

По поводу применяемых общих теорем вещественного и комплексного анализа см., напр., [2–4].

Убедимся в том, что в этом случае $|f(z)| \le ||f||_\infty e^{|Imz|\sigma}$. Понадобится следующий принцип Фрагмена–Линделёфа.

Лемма. *Пусть при некотором $\alpha \in (0, 2)$ функция f аналитична внутри угла раствора $\alpha\pi$ с вершиной в нуле. Если еще f непрерывна в замыкании этого угла, на сторонах угла $|f(z)| \le M$ и внутри угла $|f(z)| = O\big(e^{|z|^\rho}\big)$ при $|z| \to \infty$ и некотором $\rho < \dfrac{1}{\alpha}$, то $|f(z)| \le M$ и внутри угла.*

При $\rho > \dfrac{1}{\alpha}$ это не так, вообще говоря.

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем, что для точек угла $|\arg z| \le \dfrac{\alpha\pi}{2}$. При $\rho_1 \in (\rho, 1/\alpha)$ и $\varepsilon > 0$ полагаем, "сбивая" рост функции, $f_\varepsilon(z) = f(z) e^{-\varepsilon z^{\rho_1}}$, $z^{\rho_1} = |z|^{\rho_1} e^{i\rho_1 \arg z}$. Тогда

$$|f_\varepsilon(z)| = |f(z)| e^{-\varepsilon |z|^{\rho_1} \cos(\rho_1 \arg z)}, \quad |\rho_1 \arg z| \le (\rho_1 \alpha)\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

и $\exists \delta > 0:\ \cos(\rho_1 \arg z) \ge \delta$. При $|z| \to \infty$ равномерно внутри угла

$$|f_\varepsilon(z)| = O\big(e^{|z|^\rho - \varepsilon |z|^{\rho_1} \delta}\big) \to 0,$$

а на границе $|f_\varepsilon(z)| \le |f(z)| \le M$. $\exists R : |z| \ge R \ \Rightarrow \ |f_\varepsilon(z)| \le M$. В секторе $|z| \le R$ применяем принцип максимума модуля. При всех z

$$|f(z)|e^{-\varepsilon|z|^{\rho_1}\cos(\rho_1 \arg z)} = |f_\varepsilon(z)| \le M$$

и осталось устремить $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана. □

Считая для определенности $Imz > 0$, введем при $\varepsilon \in (0,1)$ функцию $f_\varepsilon(z) = f(z)e^{i(\sigma+\varepsilon)z}$, $f_\varepsilon \in B_{2\sigma+\varepsilon}$, $\|f_\varepsilon\|_\infty = \|f\|_\infty$.

$\exists R = R_\varepsilon : \ |z| \ge R \Rightarrow |f(z)| \le e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$, откуда при $y = Imz \ge R$

$$|f_\varepsilon(iy)| = |f(iy)|e^{-(\sigma+\varepsilon)y} \le 1.$$

Функция f ограничена на $\mathbb{R}$ и мнимой полуоси $y \ge 0$. Применяя принцип Фрагмена–Линделефа отдельно к I и II четверти ($\alpha = 1/2$, $\rho = 1+\varepsilon$), делаем вывод об ограниченности f_ε при $Imz > 0$. А применяя теперь тот же принцип к верхней полуплоскости ($\alpha = 1$, $\rho = \varepsilon$), получаем

$$e^{-(\sigma+\varepsilon)Imz}|f(z)| = |f_\varepsilon(z)| \le \|f_\varepsilon\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Осталось устремить $\varepsilon \to 0$.

Продолжим доказательство теоремы 1.1. Очевидно,что $|\sin z| \le$ $\le e^{|Imz|}$ и при любом $\delta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $|Rez| \le \dfrac{\pi}{2}$ найдётся $c(\delta) > 0$ такое, что при $|z| \ge \delta \quad |\sin z| \ge c(\delta)e^{|Imz|}$. Учитывая периодичность синуса, можно теперь сделать вывод, что дробь $\left|\dfrac{f(z)}{\sin z}\right|$ ограничена при $\left|z - \dfrac{k\pi}{\sigma}\right| \ge \delta$, $k \in \mathbb{Z}$.

Докажем теперь, что для функций из B_σ для всех $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2(k-1/2)^2} f\left(z + (k-1/2)\frac{\pi}{\sigma}\right),$$

где ряд сходится равномерно в любой полосе $|Imz| \le h$.

Можно ограничиться случаем $\sigma = 1$, а затем сделать замену z на σz. При $z \ne m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=(n+1/2)\pi>|z|} \frac{f(\xi)}{\sin \xi} \cdot \frac{d\xi}{(\xi - z)^2},$$

а затем перейдем к пределу при натуральном $n \to \infty$.

Поскольку $|\xi - k\pi| \geq \pi/2$ при $|k| \leq n$, то модуль интеграла не больше

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\|f\|_\infty}{c} \cdot \frac{1}{\big((n+1/2)\pi - |z|\big)^2} \cdot 2\pi(n+1/2)\pi \to 0.$$

В силу интегральной теоремы Коши интеграл по большой окружности равен сумме интегралов по малым окружностям (в том же направлении против часовой стрелки), отделяющим точки $k\pi$ ($|k| \leq n$) и z. Если f аналитична в окрестности точки $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), то при достаточно малом $r > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - k\pi| = r} \frac{f(\xi)}{\sin\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = r} \frac{f(\xi + k\pi)}{\sin(\xi + k\pi)}\, d\xi$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = r} \frac{\xi}{\sin\xi} \cdot \frac{f(\xi + k\pi)}{\xi}\, d\xi = (-1)^k f(k\pi)$$

(применена интегральная формула Коши в нуле).

Применяем формулу Коши для первой производной

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi)}{\sin\xi} \cdot \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{\sin z}\right\},$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - k\pi| = \delta} \frac{f(\xi)}{\sin\xi} \cdot \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = (-1)^k \frac{f(k\pi)}{(k\pi - z)^2}.$$

Имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{f(k\pi)}{(z - k\pi)^2} = \frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{\sin z}\right\} = \frac{f'(z)}{\sin z} - f(z)\frac{\cos z}{\sin^2 z}.$$

В частности, при $f(z) = \cos z$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k=\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k\pi)^2} \quad (z \neq m\pi,\ m \in \mathbb{Z}).$$

При $z = \pi/2$ получаем формулу для $f'(\pi/2)$. Осталось эту формулу применить к $F(w) = f(z - \pi/2 + w)$ при $w = \pi/2$.

Отсюда для любой функции $f \in B_1$ получаем неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(k-1/2)^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = ||f||_\infty.$$

И неравенство точное (равенство при $f(z) = e^{i\sigma z}$).

Теорема 1.1 доказана при $p = \infty$.

Пусть теперь $f \in W_{1,\sigma}$. Тогда любая первообразная f принадлежит B_σ и в силу доказанного неравенства для производной $W_{1,\sigma} \subset \subset B_\sigma$. А тогда и $W_{p,\sigma} \subset B_\sigma$, т.к. при $p \in (1,\infty)$ $||g||_p \le ||g||_\infty^{\frac{p-1}{p}} ||g||_1^{\frac{1}{p}}$. Теперь можно применить к доказанному представлению производной любой функции из B_σ в виде интерполяционного ряда неравенство Минковского. Получим искомое неравенство для производной любой функции из $W_{p,\sigma}$ при любом $p \ge 1$. Неулучшаемость неравенства легко проверить на функциях $e^{i\sigma z}\Big(\dfrac{\sin(\varepsilon z)}{\varepsilon z}\Big)^2$ при малых $\varepsilon > 0$.

Пример. При $Re\lambda_k \le 0, 1 \le k \le n$,

$$\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k e^{\lambda_k x}\Big|\Big|_\infty \le \max_k |\lambda_k| \cdot \Big|\Big|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}\Big|\Big|_\infty.$$

Теорема 1.4 (Б. М. Левитан) *Для любой функции* $f \in B_\sigma = = W_{\infty,\sigma}$ *найдётся последовательность тригонометрических полиномов растущих периодов, сходящихся к ней равномерно на любом отрезке в* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Для доказательства положим при $h = \dfrac{\sigma}{n}$

$$T_n(x) = T_n(f;x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\Big(x + \frac{2k\pi}{h}\Big)\Big(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\Big)^2.$$

В силу ограниченности функции ряд сходится равномерно на $[-a, a]$.

$$T_n(x) = \sum_k g(hx + 2k\pi), \quad g(x) = f\Big(\frac{x}{h}\Big)\Big(\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\Big)^2 \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R}).$$

Так как g – сужение целой функции типа не больше $\dfrac{\sigma}{h}+1 = n+1$, то по теореме Винера–Пэли $\widehat{g}(y) = 0$ при $|y| \ge n+1$.

После вычисления коэффициентов Фурье (период равен $\frac{2\pi}{h}$)

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\le n} \widehat{g}(k) e^{ikhx}.$$

В частности, при $f(x) \equiv 1$

$$\sum_k \Big(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\Big)^2 = 1$$

и, следовательно, $|T_n(x)| \le ||f||_\infty$.

Кроме того,

$$f(x) - T_n(x) = f(x)\Big[1 - \Big(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\Big)^2\Big] - \sum_{k\neq 0} f\Big(x + \frac{2k\pi}{h}\Big)\Big(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\Big)^2$$

и

$$|f(x) - T_n(x)| \le ||f||_\infty \Big\{1 - \Big(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\Big)^2 + \sum_{k\neq 0}\Big(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\Big)^2\Big\}$$

$$\le 2||f||_\infty \Big[1 - \Big(\frac{2\sin\frac{hx}{2}}{hx+2k\pi}\Big)^2\Big] \le 2||f||_\infty \min\Big\{1, \Big(\frac{hx}{2}\Big)^2\Big\}.$$

При $n \to \infty$ правая часть стремится к нулю равномерно по $x \in [-a, a]$. Легко проверить,что таким же образом $T_n'(f; x) \to f'(x)$.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.5 (Котельников–Шеннон). *Если*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} g(u) e^{iux} du,$$

то при $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{k\pi}{\sigma}\Big) \frac{\sin(\sigma z)}{\sigma z - k\pi}.$$

Этой теореме в теории информации придают следующий смысл. Для восстановления сообщения, описываемого функцией f при $z = t$ (время) с компактным спектром (в полосе частот $|x| \le \sigma$), достаточно передать по каналу связи лишь значения $f\Big(\dfrac{k\pi}{\sigma}\Big)$ через равные промежутки времени $\dfrac{\pi}{\sigma}$.

Для доказательства можно применить следующую лемму к тригонометрической системе $\Big\{\dfrac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{\frac{-ik\pi u}{\sigma}}\Big\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Лемма. *Если* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\sigma}^{\sigma} g(u) e^{iux} du,$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\Big|g(u)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(u)\Big|^2du\to 0\quad(n\to\infty),$$

$\varphi_k(u)=0\quad(|u|\geq\sigma,\ k\geq 0)$, *то* $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\widehat{\varphi}_k(-z)\quad(z\in\mathbb{C})$.

При этом сходимость в любой полосе $|Imz|\leq h$ *равномерная.*

Доказательство леммы. Очевидно, что в такой полосе

$$\left|f(z)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(u)e^{iuz}du\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\Big(g(u)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(u)\Big)e^{iuz}du\right|$$

$$\leq\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\cdot e^{\sigma h}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\Big|g(u)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(u)\Big|^2du\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если ещё система $\{\varphi_k\}_0^\infty$ ортонормированная, то

$$c_k=\int_{-\sigma}^{\sigma}g(u)\overline{\varphi}_k(u)du=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{\widehat{\varphi}_k(-x)}dx.$$

Теорема 1.6 (принцип неопределённости).
Для любой функции $f\in L_2(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right)^2\leq\int_{\mathbb{R}}x^2|f(x)|^2dx\int_{\mathbb{R}}x^2\big|\widehat{f}(x)\big|^2dx.$$

Доказательство. Предполагаем сходимость обоих интегралов справа, т.е. $xf(x)$ и $x\widehat{f}(x)\in L_2(\mathbb{R})$. Тогда f совпадает почти всюду с локально абсолютно непрерывной функцией с производной $f'\in L_2$. Интегрируя по частям, получаем

$$xf^2(x)=\int_0^x 2tf(t)f'(t)\,dt+\int_0^x f^2(t)\,dt.$$

Значит, $xf(x)$, $f'(x)$, и $f(x)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$, пределы функции слева существуют как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. И эти пределы равны нулю, так как $x^2 f^2(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Ещё раз интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{f(x)}\,dx$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\big[f'(x)\,\overline{f(x)} + f(x)\,\overline{f'(x)}\big]\,dx \le 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|\cdot\big|f'(x)\big|\,dx$$

$$\le 2\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f'(x)\big|^2 dx\right)^{1/2}.$$

В силу унитарности оператора Фурье в L_2 последний интеграл равен

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\big|\widehat{f}(x)\big|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Теорема доказана. □

Как видно из доказанного неравенства, если $f \ne 0$ почти всюду, то f и $\widehat{f}$ не могут быть малыми одновременно. А при $f = f_1 - f_2$, видно, что не могут мало отличаться функции f_1 и f_2, и их преобразования Фурье. Это одна из эквивалентных формулировок принципа неопределённости в квантовой механике.

Очевидно, например, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$, f и $\hat{f}$ финитные, то $f(x) = 0$ почти всюду.

Теперь сформулируем и докажем m–мерный аналог теоремы Винера–Пэли. В пространстве $\mathbb{R}^m$ элементы $x = (x_1, x_2, \cdots x_m)$, а скалярное произведение $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j y_j$, $|x| = \sqrt{(x,x)}$. Если $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^m)$, то её преобразование Фурье равно

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-i(x,y)}dx.$$

Пусть K – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$. Тогда множество $K^* = \Big\{y \in \mathbb{R}^m : |(x,y)| \le 1,\ x \in K\Big\}$ называют *полярой* K.

Пример. Если $K = \Big\{x : \sum\limits_{j=1}^{m} |x_j|^p \le 1\Big\}$, то

$$K^* = \Big\{y : \sum_{j=1}^{m} |y_j|^{p'} \le 1\Big\},\ 1/p + 1/p' = 1.$$

Если K произвольный компакт, то для любой функции $g \in L_1(\sigma K)$ имеем для функции

$$f(z) = \int_{\sigma K} g(u) e^{-i(u,z)} du$$

при $\sigma > 0$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ $\;(\, z \in \mathbb{C}^m)$

$$|f(z)| \le \int\limits_{\sigma K} |g(u)| e^{(u,y)} du \le e^{\sigma \|y\|^*} \int\limits_{\sigma K} |g(u)|\, du,$$

где $||y||^* = \sup\limits_{x \in K} |(x, y)|$, и, значит, f – целая функция m комплексных переменных.

Если K – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, симметричный относительно нуля и $z = 0$ является его внутренней точкой, то K (K^*) определяет единичный шар по некоторой норме. Как известно, все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны.

Функция $f : \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}$ называется *ц.ф.э.т.* $\le \sigma$ *относительно* K^*, если она целая, т.е. может быть представлена абсолютно сходящимся степенным рядом m переменных $z_1, \dots, z_m$ в $\mathbb{C}^m$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $R = R_\varepsilon$ такое, что из того, что $\|z\|^* = \sup\limits_{x \in K} \Big| \sum\limits_{j=1}^{m} z_j x_j \Big| \ge R$ следует, что $|f(z)| \le e^{(\sigma + \epsilon)\|z\|^*}$.

Если, например, $p = 2$, когда $K^* = K$ – евклидов шар, то получаем функцию сферического типа $\le \sigma$.

Теорема 1.7. *Если f – ц.ф.э.т. $\le \sigma$ относительно K^* и её сужение на $\mathbb{R}^m$ принадлежит L_2, то $\widehat{f} = 0$ почти всюду вне σK.*

Доказательство. Начнём со случая, когда K – единичный куб $\{x \in \mathbb{R}^m :\ |x_j| \le 1,\ \ 1 \le j \le m\}$. Тогда $|f(z)| \le e^{(\sigma+\varepsilon)\sum |z_j|}$ для z больших по норме и, значит, f – ц.ф.э.т. $\le \sigma$ по z_1 при фиксированных остальных переменных. По теореме Фубини из того, что $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ следует, что $f(x_1, \dots) \in L_2(\mathbb{R})$ по x_1 для всех вещественных значений других переменных:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f'_{x_1}(x_1, \dots)\big|^2 dx_1 \le \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f(x_1, \dots)\big|^2 dx_1$$

и после интегрирования по остальным переменным $\|f'_{x_1}\|_2 \le \sigma\|f\|_2$, (норма в $L_2(\mathbb{R}^m)$.

Тем же приёмом, что и при доказательстве теоремы 1.3, получаем, что $f(x_1, \cdots) = 0$ почти всюду при $|x_1| \ge \sigma$. Так же поступаем по остальным переменным. Следовательно, $\widehat{f} = 0$ почти всюду вне σK.

Отсюда следует теорема для произвольного параллелепипеда K, если учесть линейную замену в преобразовании Фурье (см. ниже после доказательства теоремы 2.6).

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что равенство нулю почти всюду — это локальное свойство и, значит, достаточно доказать, что для некоторой окрестности произвольной точки $x_0 \notin \sigma K \quad \widehat{f} = 0$ почти всюду. Для этого выбираем, используя выпуклость K, параллелепипед K_0 такой, что $K \subset K_0$ и $x_0 \notin \sigma K_0$. Следовательно, любая ц.ф.э.т. $\le \sigma$ относительно K^*, являясь ц.ф.э.т. $\le \sigma$ относительно K_0^*, удовлетворяет условию $\widehat{f} = 0$ почти всюду вне σK_0.

Теорема доказана. Из неё, как и ранее при $m = 1$ (см. доказательство теоремы 1.3), получаем

Следствие. *Если f — ц.ф.э.т. $\le \sigma$ относительно K^* и её сужение на $\mathbb{R}^m$ принадлежит L_2, а $n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \le j \le m$, то*

$$\Big|\Big|\frac{\partial^{\sum\limits_j n_j}}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_m^{n_m}} f(x)\Big|\Big|_2 \le \sigma^{\sum\limits_j n_j} \max_{x \in K} \prod |x_j|^{n_j} ||f||_2.$$

2. Суммируемость рядов Фурье и преобразование Фурье

Рассмотрим комплекснозначные функции на вещественной прямой, имеющие период 2π. Если $f \in L_1(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = [-\pi, +\pi]$, то её ряд Фурье будем писать в виде

$$f \sim \sum_k \widehat{f}_k e_k, \quad \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt, \quad e_k = e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Частная сумма ряда Фурье (D_n – ядро Дирихле)

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x-t) D_n(t) dt,$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Ряд Фурье может расходиться всюду (А. Н. Колмогоров), а если $f \in L_p(\mathbb{T})$ и $p \in (1, \infty)$, то её ряд Фурье сходится в $L_p(\mathbb{T})$ (М. Рисс) и даже почти всюду (Карлесон, Хант). Описаны и все множества нулевой лебеговой меры, на которых может расходиться ряд Фурье непрерывной функции (Кацнельсон–Кахан).

Известно много разных примеров расходящихся рядов Фурье непрерывных функций ([5–8]). Приведём наглядный пример Шварца, который используется ниже. Начнём с леммы Римана–Лебега.

Лемма. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то её преобразование Фурье непрерывно и*

$$\lim_{y\in\mathbb{R},\ |y|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixy}dx = 0.$$

Докажем более общее утверждение: *если $g \in L_\infty[0, +\infty)$ (ограничена почти всюду на полуоси), то для того чтобы для любой функции $f \in L_1[0, +\infty)$ существовал предел $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} g(\lambda x)f(x)dx$ необходимо и достаточно существование предела*

$$g_\infty = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \int_0^N g(x)dx.$$

При этом искомый предел равен $g_\infty \int\limits_0^\infty f(x)dx$.

Подобное утверждение имеет место и при $\lambda \to +0$.

Доказательство. При фиксированной функции g норма линейного функционала в L_1 при любом λ не больше $||g||_\infty$. Поэтому достаточно проверить сходимость на плотном в L_1 множестве и найти предел. В качестве такого множества возьмём финитные ступенчатые функции или просто функции h_b, $b > 0$, равные единице на $[0, b]$ и нулю на $(b, +\infty)$. Имеем

$$\int_0^{+\infty} g(\lambda x)h_b(x)dx = \int_0^b g(\lambda x)dx = \frac{b}{b\lambda} \int_0^{b\lambda} g(x)dx \quad \to \quad bg_\infty = g_\infty \int_0^\infty h_b.$$

Это утверждение, а так как $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N e^{ix}dx = 0$, то и лемма Римана–Лебега, доказано. Поэтому, напр.,

$$\lim_{n\to\infty} \left(S_n(f;x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt \right) = 0.$$

Отметим ещё, что при $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(f(x)-f\Big(x+\frac{\pi}{y}\Big)\Big)e^{ixy}dx\right| \le \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big|f(x)-f\Big(x+\frac{\pi}{y}\Big)\Big|dx.$$

Теорема 2.1 (пример Шварца). *Пусть* $n_0 = 1$, *отношение* $\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge 3$ *и число нечётное, функция* f_1 *чётная,* 2π*–периодическая, а на* $[0,\pi]$ *определена равенствами:* $f_1(0) = 0$, $f_1(x) = a_m \sin n_m x$ $\Big(x \in \Big[\frac{\pi}{n_m}, \frac{\pi}{n_{m-1}}\Big],\ m \ge 1\Big)$, *где* $a_m > 0$, $\sum\limits_m a_m < \infty$, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} a_m log\frac{n_m}{n_{m-1}} = \infty$. *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}(f_1;0) = \infty$.

Доказательство. Функция f_1 непрерывна. В силу чётности функции и леммы Римана–Лебега при $k \to \infty$

$$S_{n_k}(f_1;0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f_1(t)\frac{\sin n_k t}{t}dt + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_m a_m \int\limits_{\frac{\pi}{n_m}}^{\frac{\pi}{n_{m-1}}} \frac{\sin n_m t \sin n_k t}{t}dt + o(1) = \frac{1}{\pi}\sum_m a_m\gamma(m,k) + o(1),$$

где $\gamma(m,k) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{n_m}}^{\frac{\pi}{n_{m-1}}} \frac{\cos|n_m-n_k|t - \cos(n_m+n_k)t}{t}dt.$

Учитывая, что при $\lambda > 0$ и $b\lambda > a\lambda \ge 1$

$$\int\limits_a^b \frac{\cos\lambda t}{t}dt = \int\limits_1^{b\lambda}\frac{\cos t}{t}dt - \int\limits_1^{a\lambda}\frac{\cos t}{t}dt = O(1),$$

получаем при $k \ne m$ ограниченность $\gamma(m,k)$, так как в этом случае оба значения $\lambda \ge \dfrac{\pi|n_m-n_k|}{n_m} \ge \dfrac{2}{3}\pi$. А $\gamma(k,k) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{1}{t}dt + O(1) =$
$= \frac{1}{2}\ln\frac{n_k}{n_{k-1}} + O(1)$ и $S_{n_k}(f_1;0) = \dfrac{1}{2\pi}a_k\ln\dfrac{n_k}{n_{k-1}} + O(1) \to \infty.$

Теорема доказана. □

Существование расходящегося по норме ряда Фурье функции из $C(\mathbb{T})$ или $L_1(\mathbb{T})$ объясняется в силу теоремы Банаха–Штейнгауза тем, что нормы операторов S_n (константы Лебега) неограничены:

$$||S_n||_{C\to C} = ||S_n||_{L_1\to L_1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} |D_n(t)|dt = \frac{4}{\pi}\ln n + O(1).$$

Такие же нормы функционалов $S_n(f;x_0)$ в $C(\mathbb{T})$.

Есть много разных признаков сходимости рядов Фурье (см., напр., [5–7]). Следующий признак Жордана далее используется.

Теорема 2.2. *Если $f \in V(\mathbb{T})$ (ограниченной вариации), то её ряд Фурье сходится всюду и*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x) = s(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big)$$

(полусумма односторонних пределов) и если ещё функция непрерывна, то сходимость равномерная.

Доказательство. В силу чётности ядра Дирихле D_n

$$s(x) - S_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \Big[s(x) - \frac{1}{2}\big(f(x+t) + f(x-t)\big)\Big] D_n(t)dt.$$

При $n \to \infty$ интеграл по $[\delta,\pi] \subset (0,\pi]$ стремится к нулю в силу леммы Римана–Лебега. После интегрирования по частям и отбрасывания в силу леммы Римана–Лебега интеграла по $[\delta,\pi]$ получаем

$$-\int_0^{\delta}\int_t^{\pi} D_n(u)du \cdot d\Big[s(x) - \frac{1}{2}\big(f(x+t) + f(x-t)\big)\Big] dt.$$

Но интеграл от ядра Дирихле ограничен, так как график D_n – затухающие колебания, а $\int\limits_0^{\pi} D_n = \frac{\pi}{2}$ и $|D_n(t)| \le n + \frac{1}{2}$:

$$\max_{[0,\pi]}\left|\int\limits_0^{x} D_n(t)dt\right| = \max_{1\le m\le n}\left\{\Big|\int\limits_0^{\frac{2m\pi}{2n+1}} D_n(t)dt\Big|, \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \max\left\{\int\limits_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} D_n, \frac{\pi}{2}\right\} \le \pi.$$

Осталось применить обычную оценку интеграла Римана–Стилтьеса и учесть, что $\lim\limits_{\delta\to+0} V_0^\delta\Big(s(x)-\dfrac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big)\Big)=0$ в силу непрерывности полной вариации в точках непрерывности функции. Если функция f непрерывна всюду, то для доказательства равномерной сходимости годится то же самое рассуждение. Теорема доказана. $\square$

Фейер изучил сходимость средних арифметических частных сумм Фурье

$$\sigma_n(f)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)=\sum_{k=-n}^{+n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)\widehat{f}_k e_k$$

При этом, $\sigma_n(f;x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}f(x-t)\Phi_n(t)dt$, где ядро Фейера интегрального оператора оказалось положительным:

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t)=\frac{1}{2n+2}\left(\frac{\sin\big((n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2\geq 0.$$

Применяя неравенство Минковского и выбирая $f(x)\equiv 1$, из-за положительности ядра получаем, что операторная норма

$$||\sigma_n||_{L_p\to L_p}=1,\quad p\in[1,+\infty].$$

А так как ещё $\sigma_n(e_k)\to e_k$ при любом k и значит, сходимость есть на конечных суммах гармоник e_k, которые образуют в силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса всюду плотное множество, то средние $\sigma_n(f)$ сходятся при $n\to\infty$ на всём пространстве $L_p(\mathbb{T})$, $p\in[1,\infty)$ и $C(\mathbb{T})$.

Если σ_n^m, $m\in\mathbb{N}$, – степень оператора σ_n, то при $m\geq 2$

$$f-\sigma_n^m(f)=f-\sigma_n^{m-1}(f)-\sigma_n(f-\sigma_n^{m-1}(f))$$

и, значит,

$$\left|\left|f-\sum_{k=-n}^{+n}\Big(1-\frac{|k|}{n+1}\Big)^m\widehat{f}_k e_k\right|\right|_p=\big|\big|f-\sigma_n^m(f)\big|\big|_p\leq m\big|\big|f-\sigma_n(f)\big|\big|_p,$$

$p\in[1,\infty]$ (нормы в $L_p(\mathbb{T})$). Поэтому, если $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$, а при $x\in[0,1]$ $\quad\varphi(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(1-x)^\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu|a_\nu|<\infty$, то

$$\left|\left|f-\sum_{k=-n}^{n}\varphi\Big(\frac{|k|}{n+1}\Big)\widehat{f}_k e_k\right|\right|_p\leq\big|\big|f-\sigma_n(f)\big|\big|_p\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|a_\nu|.$$

Отсюда следует, напр., сходимость к f средних Рогозинского

$$\frac{1}{2}\Big(S_n\Big(f;x+\frac{\pi}{2n+2}\Big)+S_n\Big(f;x-\frac{\pi}{2n+2}\Big)\Big),\quad \varphi(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$$

и средних Бернштейна

$$\frac{1}{2}\Big(S_n(f;x)+S_n\Big(f;x+\frac{\pi}{n+1}\Big)\Big),$$

так как ещё $||f(\cdot+h)||_p=||f||_p$.

Если $f\in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье равно, по определению, $\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ixy}dx$.

Теорема 2.3 (формула суммирования Пуассона).
Если $f\in L_1\cap V(\mathbb{R})$, то при всех $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\big(f(x+2k\pi+0)+f(x+2(k+1)\pi-0)\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(m)e^{imx}.$$

Доказательство. Самое существенное здесь, а это верно и в кратном случае, что тригонометрический ряд справа является рядом Фурье левой части, которую обозначим через f^*. А чтобы получить указанное равенство нужно применить к функции f^* признак Жордана сходимости рядов Фурье, учитывая, что коэффициент Фурье $\widehat{f^*}_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}(m)$.

Лемма. *Если $f\in V(\mathbb{R})$ и $\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty$, то ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2k\pi)$ сходится на $[0,2\pi]$ абсолютно и равномерно и его сумма f^* (периодизация функции f) принадлежит $V([0,2\pi])$.*

Доказательство. Если

$$F_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x+2k\pi}^{x+2(k+1)\pi}f(t)dt,\quad |F_k(x)|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x+2k\pi}^{x+2(k+1)\pi}|f(t)|dt,$$

то ряд $\sum\limits_k|F_k(x)|$ сходится на $[0,2\pi]$ равномерно, т.к. $\int|f(x)|dx<\infty$.

$$|f(x+2k\pi)|=\left|F_k(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x+2k\pi}^{x+2(k+1)\pi}\big(f(x+2k\pi)-f(t)\big)dt\right|$$
$$\le|F_k(x)|+V_{x+2k\pi}^{x+2(k+1)\pi}(f)$$

и ряд для f^* сходится абсолютно и равномерно на $[0, 2\pi]$, так как ещё $f \in V(\mathbb{R})$. Кроме того, $V_0^{2\pi}(f^*) \le V_{-\infty}^{\infty}(f)$. Теорема 2.3 доказана. $\square$

Теорема 2.4 (Обратное преобразование Фурье).
Для любой функции $f \in L_1 \cap V(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2}\bigl(f(x+0) + f(x-0)\bigr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy.$$

Доказательство. В силу формулы суммирования Пуассона, применённой к функции $f_\lambda(x) = f(x)e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\bigl(f(x+2k\pi+0)+f(x+2k\pi-0)\bigr)e^{i2k\pi\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m-\lambda)e^{i(m-\lambda)x},$$

откуда следует, что интегральное среднее левой части равно

$$\frac{1}{2}\bigl(f(x+0) + f(x-0)\bigr) = \int_0^1 \sum_m \widehat{f}(m-\lambda)e^{i(m-\lambda)x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Следствие. *Если $f \in L_1$ и $\widehat{f} \in L_1$, то почти всюду*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} dy.$$

Действительно, применяем теорему к функции Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} f(x+t)dt$ $(h > 0)$ и в равенстве

$$f_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_h(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin hy}{hy} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy$$

переходим к пределу при $h \to 0$.

Функции, представимые в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье, образуют винеровскую банахову алгебру (нормированное кольцо с обычным умножением функций). Это

$$W_0(\mathbb{R}) = \left\{ f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iyx}dy, \quad ||f||_{W_0} = ||g||_{L_1} < \infty \right\}.$$

Отметим простое необходимое условие: *если $f \in W_0$, то f равномерно непрерывна на прямой и при $x \in \mathbb{R}$ сходится в смысле Коши интеграл (не обязательно абсолютно)*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+y) - f(x-y)}{y} dy$$

и два простейших достаточных условия: $f \in C \cap L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, когда $||f||_{W_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||\widehat{f}||_{L_1(\mathbb{R})}$ (см. выше следствие) и $f \in AC_{loc} \cap L_2(\mathbb{R})$, $f' \in L_2(\mathbb{R})$ (Титчмарш, Бёрлинг).

Разные свойства этой алгебры собраны в обзорной статье [9].

Для того чтобы линейные средние рядов Фурье, определяемые функцией φ, а именно, $\sum\limits_k \varphi(\varepsilon k)\widehat{f}_k e_k$ сходились к f на $C(\mathbb{T})$ или $L_1(\mathbb{T})$ при $\varepsilon \searrow 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1$ и

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \int\limits_{\mathbb{T}} \Big| \sum_k \varphi(\varepsilon k) e^{ikt} \Big| dt < \infty.$$

Теорема 2.5 *Для того чтобы тригонометрический ряд $\sum\limits_k c_k e_k$ был рядом Фурье функции необходимо и достаточно существование функции $\varphi \in W_0(\mathbb{R})$, для которой $\varphi(k) = c_k$, $k \in \mathbb{Z}$. А если это ряд Фурье функции $\Phi \in L_1(\mathbb{T})$, то*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |\Phi(t)| dt = \min_{\varphi_c} ||\varphi_c||_{W_0},$$

где $\varphi_c(k) = c_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

При этом $\Phi(t) \geq 0$ почти всюду в том и только в том случае, когда существует положительно определённая функция φ_c.

Доказательство. Если это ряд Фурье, когда

$$\varphi(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t)e^{-ikt}dt,$$

то полагая $\varphi_{c_0}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t)e^{-ixt}dt$, получаем, что при любом продолжении $\min\limits_{\varphi_c} \|\varphi_c\|_{W_0} \le \|\varphi_{c_0}\|_{W_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(t)|dt$. С другой стороны, если $\varphi_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-itx}dt$, $\|\varphi_c\|_{W_0} = \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} < \infty$, то при $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k = \varphi_c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ikt}dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} g(t)e^{-ik(t-2m\pi)}dt$$

$$= \sum_m \int_{-\pi}^{\pi} g(t+2m\pi)e^{-ikt}dt = \int_{-\pi}^{\pi} g_{_T}(t)e^{-ikt}dt,$$

где $g_{_T}(t) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} g(t+2m\pi)$, $\|g_{_T}\|_{L_1(\mathbb{T})} \le \|g\|_{L_1(\mathbb{R})}$.

Здесь применена теорема Беппо Леви. Ряд для $g_{_T}$ сходится почти всюду абсолютно. А так как еще $g_{_T} \sim \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)e_k$ (ряд Фурье), то при любом продолжении φ_c

$$\|\varphi_{c_0}\|_{W_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\Phi(t)|\,dt = \|g_{_T}\|_{L_1(\mathbb{T})} \le \|g\|_{L_1(\mathbb{R})} = \|\varphi_c\|_{W_0}.$$

Ещё нужно учесть, что $\Phi(t) \ge 0$ почти всюду тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\mathbb{T}} |\Phi(t)|dt = \int\limits_{\mathbb{T}} \Phi(t)dt$, а $\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx}dt$, где $g(t) \ge 0$ почти всюду тогда и только тогда, когда $||\varphi||_{W_0} = \varphi(0)$.

Теорема 2.5 доказана. $\square$

В силу этой теоремы сходятся, напр., на всём пространстве $C(\mathbb{T})$ или $L_1(\mathbb{T})$ средние типа Гаусса–Вейерштрасса ($\varphi(x) = e^{-|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$) и средние Рисса ($\varphi(x) = (1-|x|^\alpha)_+^\beta, \alpha > 0, \beta > 0$).

Ещё пример. Для того чтобы для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\mu_1\Big(S_n\Big(f;t+\frac{\alpha}{n}\Big)+S_n\Big(f;t+\frac{\beta}{n}\Big)\Big)-\mu_2 S_n(f;t)\Big]=f(t)$$

необходимо и достаточно, чтобы в случае $\mu_1 = \dfrac{1}{4}$ было $\mu_2 = -\dfrac{1}{2}$ и $\cos\alpha+\cos\beta = 0$, а в случае $\mu_1 \neq \dfrac{1}{4} - Re\mu_1 \leq \dfrac{3}{8}$, $\mu_2 = 2\mu_1 - 1$ и $\cos\alpha = \cos\beta$.

См. исследование сходимости общих средних типа Рогозинского–Бернштейна рядов Фурье функций двух переменных в [8].

Теорема 2.6. *Если $f \in W_0(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье $\widehat{f} \in L_1$ и, значит, $||f||_{W_0} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}||\widehat{f}||_1$.*

Доказательство. Если $g \in L_1$, а преобразование Фурье

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx,$$

то $\check{g}(y) = \widehat{g}(-y)$ — обратное преобразование Фурье. Если и $\widehat{g} \in L_1$, то почти всюду (см. выше следствие из теоремы 2.4) $\quad g = \check{\widehat{g}} = \widehat{\check{g}}$.

Докажем, что если

$$F = \widehat{F_1}, \quad F_1 \in L_1, \quad F_1 = \check{F}_2, \quad F_2 \in L_1,$$

то $F = F_2$ почти всюду.

Если f и $g \in L_1(\mathbb{R})$, то $\int\limits_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}g$ (формула умножения). Для доказательства этой формулы нужно подставить $\widehat{g}$ и поменять порядок интегрирования на основании теоремы Фубини.

В силу формулы умножения, применённой дважды (считаем g и $\widehat{g} \in L_1$),

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Fg = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{F}_1 g = \int\limits_{\mathbb{R}} F_1\widehat{g} = \int\limits_{\mathbb{R}} \check{F}_2\widehat{g} = \int\limits_{\mathbb{R}} F_2 g.$$

Так что для всех таких функций g

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (F - F_2)g = 0,$$

где $F \in C(\mathbb{R})$, а $F_2 \in L_1(\mathbb{R})$.

Докажем, что $F = F_2$ почти всюду на любом отрезке $[a, b]$. Для этого достаточно доказать, что $\int\limits_a^b (F - F_2) = 0$, так как тогда из равенства $\int\limits_a^x (F - F_2) = 0$ сразу следует, что производная $F - F_2 = 0$ почти всюду.

Для аппроксимации функции g_0, которая равна единице на $[a, b]$ и нулю вне $[a, b]$, возьмём непрерывную функцию g_n, которая равна единице на $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$, $g_n(a) = g_n(b) = 0$ и линейная на $[a, a + \frac{1}{n}]$ и $[b - \frac{1}{n}, b]$. Очевидно, что g_n и $\widehat{g}_n \in L_1$, поэтому $\int\limits_a^b (F - F_2) g_n = 0$.

Кроме того, $\left| \int\limits_a^b F \cdot (g - g_n) \right| \leq \|F\|_{C_{[a,b]}} \int\limits_a^b |g - g_n| \leq \dfrac{2}{n} \|F\|_{C_{[a,b]}}$ и

$$\left| \int\limits_a^b F_2 \cdot (g - g_n) \right| \leq \int\limits_a^b |F_2| \cdot |g - g_n|$$

и учитывая ещё, что $|g - g_n| \leq 1$, можно перейти к пределу при $n \to \infty$ в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Получаем, что $\int\limits_a^b (F - F_2) = 0$, и $F = F_2$ почти всюду.

При условиях теоремы берём $F = \widehat{f}, f \in L_1$. Тогда $F_1 = f \in W_0(\mathbb{R})$. Поэтому $F_1 = \check{F}_2, F_2 \in L_1$. По доказанному $\widehat{f} = F = F_2 \in L_1$.

Теорема доказана. $\square$

Подобные вопросы изучаются и для функций любого числа переменных ([10, 8]). Рассмотрим, напр., преобразование Фурье радиальных функций m переменных.

Если $\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx < \infty$, то преобразование Фурье равно

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-i(x,y)} dx.$$

Если A – матрица $m \times m$ с определителем $\det A \neq 0$, то после линейной замены переменных в интеграле

$$|\det A| \, \widehat{f(A\cdot)}(y) = \widehat{f}(By),$$

где $B = (A')^{-1}$, а A' – транспонированная матрица. Поэтому преобразование Фурье радиальной функции $f(x) = f_0(|x|)$ – функция радиальная, так как если A – вращение вокруг нуля, то $|\det A| = 1$.

А именно, преобразование Фурье радиальной функции $f(x) = f_0(|x|)$ из $L_1(\mathbb{R}^m)$ равно

$$\widehat{f}(y) = |y|^{1-\frac{m}{2}} \int\limits_0^\infty f_0(t) t^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(t|y|)dt,$$

где при $x \neq 0$ и $\lambda > -\frac{1}{2}$ функция Бесселя равна

$$J_\lambda(x) = \frac{x^\lambda}{2^\lambda \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int\limits_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} e^{itx} dt.$$

(функция $j_\lambda(x) = \int\limits_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{itx} dt$ – целая функция, коэффициенты степенного ряда которой выражаются через Γ–функцию).

Для доказательства указанной формулы можно ограничиться финитной функцией f_0, когда $\widehat{f}$ – целая функция от $|z|$. А коэффициенты аналитической в окрестности нуля функции F_0, когда $F_0(|x|^2) = \sum\limits_{k=0}^\infty c_k |x|^{2k}$, можно найти по ней, используя оператор Лапласа с учётом легко проверяемой формулы $(x \neq 0, k \in \mathbb{N})$

$$\Delta^k |x|^n = \prod_{\nu=0}^{k-1} (n - 2\nu)(n - 2\nu + m - 2)|x|^{n-2k}.$$

и, значит, $\Delta(|x|^2 F_0(|x|))_{x=0} = 2mc_0$, $\Delta(F_0(|x|) - c_0)_{x=0} = 2mc_1$, $\Delta^2(f_0(|x|) - c_0 - c_2|x|^2)_{x=0} = 8m(m+2)c_2$ и так далее.

Теперь легко проверить искомую формулу в случае финитной функции f_0, сравнивая значения оператора Лапласа в нуле.

Теорема 2.7 (Бохнер). *Для того чтобы средние Бохнера–Рисса* $\sum\limits_k (1 - |\varepsilon k|^2)_+^\delta \widehat{f}_k e_k$ *сходились к* f *при* $\varepsilon \searrow 0$ *на* $C(\mathbb{T}^m)$ *или на* $L_1(\mathbb{T}^m)$ *необходимо и достаточно:* $\delta > \dfrac{m-1}{2}$.

В силу теорем 2.5 и 2.6 нужно доказать, что если $\varphi(x) = (1 - |x|^2)_+^\delta$, то $\widehat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ в том и только в том случае, когда $\delta > \frac{m-1}{2}$.

В силу предыдущего

$$\hat{\varphi}(y) = |y|^{1-\frac{m}{2}} \int\limits_0^1 (1-t^2)^\delta t^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m}{2}-1}(t|y|)dt$$

и

$$\widehat{\varphi}(y) = 2^{\delta}\Gamma(1+\delta)\frac{1}{|y|^{\frac{m}{2}+\delta}} J_{\frac{m}{2}+\delta}(|y|).$$

Совпадение этих функций можно проверить, напр., разложением обеих формул в степенной ряд.

Для определения поведения гладкой функции φ около бесконечности можно воспользоваться асимптотикой функции Бесселя: при $t \to \infty$

$$J_{\lambda}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\Big(t - \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

Следовательно, $\widehat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R}^m)$ только при $\delta > \frac{m-1}{2}$, что и требовалось доказать.

Более глубоким является вопрос о суммируемости рядов Фурье почти всюду с указанием множества сходимости.

Ещё Лебег доказал, что для любой функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ почти всюду, а именно в точках, в которых $\lim\limits_{|h|\to 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_0^h \big|f(x+t) - f(x)\big| dt = 0$ (точки Лебега) предел $\sigma_n(f;x)$ при $n \to \infty$ равен $f(x)$. Есть уже критерий, т.е., необходимое и достаточное условие одновременно, в терминах преобразования Фурье функции-множителя φ (см. [8]). А из сходимости в точках Лебега следует сходимость по норме в $C(\mathbb{T})$, а значит, и в $L_1(\mathbb{T})$.

А здесь рассмотрим вопрос о сходимости сумм Фейера σ_n в точках дифференцируемости интеграла $\int\limits_0^x f(t)dt$. Это множество более широкое и, как оказалось, может быть и расходимость.

Теорема 2.8. *Пусть $f_0 \in L_1(\mathbb{T})$ и существует производная интеграла $\displaystyle\int\limits_0^x f_0$ в нуле и она равна нулю, т.е., $\lim\limits_{|t|\to 0} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t f_0(u)du = 0$.*

Тогда при $F_0(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t f_0(u)du \quad \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sigma_n(f_0;0) + S_n(F_0;0)\big) = 0,$

а ряд Фурье функции F_0 может и расходиться в нуле.

Доказательство. Ядро Дирихле равно

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

а ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) \cos kt = \frac{\sin^2 (n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Заменяя F_0 на $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \displaystyle\int_0^t f_0(u)du$ и интегрируя по частям, получаем

$$\left[\frac{\sin^2 (n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \int_0^t f_0(u)du\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_0(t) 2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n} k\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\sin kt dt$$

$$= O\Big(\frac{1}{n}\Big) + \int_{-\pi}^{\pi} F_0(t) \sum_{k=1}^{n} k\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\Big(\cos\Big(k-\frac{1}{2}\Big)t - \cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t\Big).$$

А сумма под знаком интеграла равна

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\Big(\cos\Big(k-\frac{1}{2}\Big)t - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big)\cos\Big(k-\frac{1}{2}\Big)t$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\Big(1-\frac{2k}{n+1}+\frac{1}{n+1}\Big)\cos\Big(k-\frac{1}{2}\Big)t$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{2k}{n+1}-\frac{1}{n+1}\Big)\cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t,$$

а значит, равна и среднему арифметическому последних двух сумм, т.е.,

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{2k}{n+1}\Big)\cos kt + \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\Big(\cos(k-\frac{1}{2}\Big)t - \cos\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t$$

$$= 2\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)\cos kt - \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kt + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t + O\Big(\frac{1}{n}\Big) = 2\cos\frac{t}{2}\Big(\Phi_n(t)-\frac{1}{2}\Big) - \cos\frac{t}{2}\Big(D_n(t)-\frac{1}{2}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t+O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Так что при $F_1(t)=F_0(t)\cos\frac{t}{2}$ имеем

$$\sigma_n(f_0;0)=2\sigma_n(F_1;0)-S_n(F_1;0)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_0(t)\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)tdt+O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

По теореме Фейера (см. после теоремы 2.2)

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(F_1;0)=F_1(0)=0,$$

а интеграл стремится к нулю в силу леммы Римана–Лебега.

Осталось учесть, что в силу той же леммы Римана–Лебега и

$$\lim_{n\to\infty}S_n(F_1-F_0;0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_0(t)\cdot\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)tdt=0.$$

Искомая формула доказана.

Есть много разных примеров расходящихся рядов Фурье непрерывных функций. Нам нужна четная функция F_0 вида

$$tF_0(t)=\int\limits_0^t f_0(u)\,du,\qquad f_0\in L_1(\mathbb{T}),$$

с расходящимся в нуле рядом Фурье.

Воспользуемся примером из теоремы 2.1.

При $n_k=3^{k^3}$ $(k\ge 0)$ и $a_k=\dfrac{1}{k^{3/2}}$ $(k\in\mathbb{N})$

$$F_0(t)=a_k\sin n_k|t|\quad\Big(\frac{\pi}{n_k}\le|t|\le\frac{\pi}{n_{k-1}}\Big).$$

Поскольку $\dfrac{n_k}{n_{k-1}}$ – нечетное число, а $\lim\limits_{k\to\infty}a_k\ln\dfrac{n_k}{n_{k-1}}=\infty$, то

$$\lim_{k\to\infty}S_{n_k}(F_0;0)=\infty.$$

Функция F_0 не только непрерывна ($F_0(0)=F_0(\pm\pi)=0$), но и имеет конечные односторонние производные в точках $\pm\dfrac{\pi}{n_k}$ $(k\ge 0)$.

При $t > 0$ $\ tF_0(t) = \int\limits_0^t \big(F_0(u) + uF_0'(u)\big)\,du$. Но

$$\int\limits_0^{\pi} \big|uF_0'(u)\big|\,du = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} ua_kn_k|\cos n_ku|\,du \le \sum_{k=1}^{\infty} a_kn_k\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{n_{k-1}}\Big)^2 < \infty.$$

Теорема доказана. □

В [11] приведена впервые и общая терема о сходимости в таких точках.

3. Некоторые экстремальные задачи

Теорема 3.1. *Если функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *имеет период* 2π, $2\pi\widehat{f_0} = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f = 0$ *и* $f \in W^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$, *то*

$$||f||_\infty \le K_r\big|\big|f^{(r)}\big|\big|_\infty, \quad K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(r+1)}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

и неравенство точное.

При $r = 1$, когда $K_1 = \dfrac{\pi}{2}$, это неравенство анонсировал H. Bohr, а в общем случае доказал Бернштейн (см. [12], с. 171).

Доказательство. Очевидно, что в силу равенства Парсеваля, например,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f^{(r)}(x-t)b_r(t)dt,$$

где сплайн Бернулли

$$b_r(t) = \sum_{k\ne 0}^{\infty}\frac{e^{ikt}}{(ik)^r} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt - \frac{r\pi}{2})}{k^r}.$$

Очевидно, что любая функция $g \in L_1(\mathbb{T})$ с интегралом $\widehat{g}_0 = 0$ является r–й производной периодической функции. Поэтому, если $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}\, b_r(t)dt = 0$, то

$$\sup_{f\in W^r(\mathbb{T}),\widehat{f}_0=0} ||f||_\infty = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} |b_r(t)|dt.$$

Отметим сначала, что $b_r'(t) = b_{r-1}(t)$, а

$$b_1(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = (\pi - |t|)\text{sign } t \quad (|t| \le \pi).$$

Очевидно, что если $g \in C[0,\pi]$, $g(0) = g(\pi) = 0$ и $g''(t) > 0$ при $t \in (0,\pi)$, то на $(0,\pi)$ $g(t) < 0$. Поэтому на $(0,\pi)$ $b_3(t) < 0$, $b_5(t) > 0$ и т.д. Но тогда при чётном r на $(0,\pi)$ b_r строго возрастает или убывает. Получаем, что $\text{sign } b_r = (-1)^{\frac{r+1}{2}}\text{sign } \sin t$ при нечётном r. А если заметить,что при чётном r $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b_r = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} b_r$, то можно сделать вывод, что $\text{sign } b_r(t) = (-1)^{\frac{r+2}{2}}\text{sign}\cos t$. Осталось для вычисления интеграла от $|b_r|$ учесть, что

$$\text{sign}\sin t = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)t}{2\nu+1}, \quad \text{sign}\cos t = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\cos(2\nu+1)t}{2\nu+1}$$

и применить равенство Парсеваля. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.2 (Неравенства для промежуточных производных).
1) Для функций из $C^2[a,b]$ (здесь и далее $M_k = \sup|f^{(k)}(x)|$)

$$|f'(a)| \le \frac{b-a}{2}M_0 + \frac{2}{b-a}M_2, \quad \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{b-a}{2}M_0 + \frac{4}{b-a}M_2.$$

2) Для функций из $C^2[0,+\infty)$ $M_1 \le 2\sqrt{M_0M_2}$, а для функций из $C^2(\mathbb{R})$ $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$.

Все неравенства точные.

Доказательства. 1) Если $f \in C^2[-1,1]$, то для $x \in [-1,1]$ имеет место равенство

$$\int\limits_{-1}^{x} f''(t)(t+1)dt + \int\limits_{x}^{1} f''(t)(t-1)dt = 2f'(x) + f(1) - f(-1),$$

из которого следует точное неравенство при $a = -1$ и $b = 1$:

$$|f'(x)| \le \frac{1}{2}\bigl|f(1) - f(-1)\bigr| + \frac{M_2}{2}\bigl(x^2+1\bigr).$$

Для функций из $C^2[a,b]$ ($M_0 = \sup|f(x)|$, $M_1 = \sup|f'(x)|$)

$$|f'(a)| \le \frac{b-a}{2}M_0 + \frac{2}{b-a}M_2, \quad \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{b-a}{2}M_0 + \frac{4}{b-a}M_2.$$

2) Минимизируя правые части этих неравенств по $b-a$, получаем точные неравенства для полуоси (Ландау) и оси (Адамар), соответственно.

А при $f(1) = f(-1)$ и $x \in [-1,1]$ $|f'(x)| \le \dfrac{M_2}{2}\big(x^2+1\big)$ и можно рассмотреть ещё 2–периодические функции.

Следствие. *На оси и полуоси при* $M_k = \sup|f^{(k)}(x)|$, $1 \le k \le r-1$, *при некоторой константе* γ, *зависящей только от* k *и* r,

$$M_k \le \gamma M_0^{(1-\frac{k}{r})} M_r^{\frac{k}{r}}.$$

Достаточно применить индукцию. Очевидно ещё, что вместо класса C^r можно иметь в виду W^r.

Наименьшая константа для оси найдена Колмогоровым и она равна $\gamma = \dfrac{K_{r-k}}{(K_r)^{(1-\frac{k}{r})}}$ (определение констант Эйлера–Бернулли K_r см. в теореме 3.1).

Теорема 3.3. *Для любых двух последовательностей* $\{\alpha_k\}_0^\infty$ *и* $\{\beta_k\}_0^\infty$

$$\sup_{\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sup\limits_{k\ge p}|\alpha_k|\le 1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\beta_k\right| = \sup_{n\ge 0}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|\beta_k|$$

и

$$\sup_{\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}|\beta_k|\le 1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\beta_k\right| = \sum_{p=0}^{\infty}\sup_{k\ge p}|\alpha_k|.$$

Доказательство. Очевидно, что можно рассматривать только положительные последовательности. Полагая $\alpha_k^* = \sup\limits_{p\ge k}\alpha_p$ и $B_k = (k+1)^{-1}\sum\limits_{p=0}^{k}\beta_p$ и применяя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k &\le \sum_{k=0}^{n}\alpha_k^*\beta_k = B_n(n+1)\alpha_n^* + \sum_{k=0}^{n-1}B_k(k+1)\Delta\alpha_k^* \\ &\le \left[(n+1)\alpha_n^* + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta\alpha_k^*\right]\sup_{n\ge 0}B_n = \sup_n B_n \sum_{k=0}^{n}\alpha_k^*.\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем оценку сверху сразу в двух случаях.

Для доказательства её точности в первом случае можно взять $\alpha_k = (n+1)^{-1}$ при $0 \le k \le n$ и $\alpha_k = 0$ при $k > n$, для любого n.

Если во втором случае $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$, то можно положить $\beta_k \equiv 1$, а при сходимости этого ряда экстремальную последовательность определим так. Пусть n_1 – наибольший из номеров, для которых $\alpha_{n_1} = \alpha_0^*$, а для $p \geq 2$ пусть n_p – наибольший из номеров, для которых $\alpha_n = \alpha^*_{n_{p-1}+1}$. Тогда полагая $\beta_{n_1} = n_1 + 1$, $\beta_{n_p} = n_p - n_{p-1}$ при $p \geq 2$, и $\beta_k = 0$ при $k \neq n_p$, $p = 1, 2, \ldots$, получаем $B_n \leq 1$ при любом n для такой последовательности и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_k = \alpha_0^*(n_1 + 1) + \sum_{p=2}^{\infty} \alpha^*_{n_{p-1}+1}(n_p - n_{p-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^*.$$

Теорема доказана. $\square$

Перейдём к функциям на полуоси и введём два пространства

$$L_1' = \Big\{ f : \int\limits_0^{+\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{t \geq x} |f(t)| dx = ||f||_{L_1'} < \infty \Big\},$$

$$L_\infty' = \Big\{ f : \sup_{x>0} \frac{1}{x} \int\limits_0^{x} |f(x)| dx = ||f||_{L_\infty'} < \infty \Big\}.$$

Это два банаховых пространства. При этом, например,

$$\sup_{g:||g||_{L_\infty'} \leq 1} \Big| \int\limits_0^{\infty} f(x) g(x) dx \Big| = ||f||_{L_1'}.$$

Неравенство доказывается, как и ранее, интегрированием по частям, а равенство получаем при $g(x) = \dfrac{1}{y}$, $y > 0$ при $x \in (0, y]$ и $g(x) = 0$ при $x > y$.

Отметим, что пространство L_1', в отличие от пространства L_1, не является сепарабельным и в нём не является плотным ни множество непрерывных функций, ни множество ступенчатых функций. Но плотным является множество функций, принимающие конечное число значений. Сопряжённым к L_∞' является пространство L_1' и оба пространства рефлексивные.

Теорема 3.4 (Расстояние до подпространства в L_1). *Пусть E – подпространство $L_1[a, b]$, например, и $f \in Ł_1 \setminus E$. Для того чтобы*

$$\operatorname{dist}(f, E) = \min_{g \in E} ||f - g||_{L_1} = ||f - g^*||_{L_1}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция h такая, что почти всюду

$$|h| \le 1, \qquad h(f-g^*) = |f-g^*|$$

и для всех $g \in E$ $\displaystyle\int\limits_a^b hg = 0$. *При этом* $\mathrm{dist}(f,E) = \displaystyle\int\limits_a^b hf$.

Если дополнительно $f-g^* \ne 0$ почти всюду, то $h = \overline{\mathrm{sign}(f-g^*)}$ (для $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\mathrm{sign}\ z = \dfrac{z}{|z|}$).

Такой вид принял этот критерий после работ А. А. Маркова и С. М. Никольского.

Достаточность очевидна:

$$||f-g^*||_{L_1} = \int h(f-g^*) = \int hf = \int h(f-g) \le \int |f-g| = ||f-g||_{L_1}.$$

Для доказательства необходимости в общем виде используется двойственность и вид линейного непрерывного функционала в L_1 (см. [8]).

Отметим ещё, что если функция непрерывна, а E — подпространство многочленов степени не выше n, то ближайший многочлен единственный (теорема Джексона). См. [13].

А для простейшей функции с разрывом $f(x) = \mathrm{sign}(x-c)$, $c \in (a,b)$ уже в случае одномерного подпространства констант ближайших элементов бесконечно много.

4. Отдельные теоремы

Теорема 4.1 (Аппроксимационная теорема Вейерштрасса).

Это теорема о замкнутости системы степеней $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $C[a,b]$.

Для её доказательства для отрезка $[0,1]$ С. Н. Бернштейн ввёл, исходя из вероятностных соображений (распределение Бернулли), многочлены

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Для доказательства равномерной сходимости к непрерывной функции f понадобится тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x(1-x).$$

Если $|f(x)| \le M$, а для $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $|x-y| < \delta \mapsto |f(x)-f(y)| < \varepsilon$, то $|f(x)-f(y)| \le \varepsilon + 2M\dfrac{(x-y)^2}{\delta^2}$. Тогда

$$\left|f(x) - B_n(f;x)\right| = \Big|\sum_{k=0}^{n}\Big(f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\Big(x-\frac{k}{n}\Big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{1}{n}x(1-x).$$

А искомое тождество можно доказать двукратным дифференцированием формулы бинома $(a+b)^n$ по a и последующей подстановкой $a=x$, $b=1-x$.

Н. Н. Лузин назвал эти многочлены изящными, а Харди и Рогозинский – “most elegant”.

Л. В. Канторович предложил следующую модификацию этих многочленов для интегрируемых функций

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt.$$

Отметим ещё, что для того чтобы имела место теорема Вейерштрасса необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^1 x^n f(x)dx = 0 \quad (n \ge 0) \quad\Rightarrow\quad f(x) \equiv 0.$$

Необходимость очевидна: если последовательность многочленов p_n (напр., $B_n(f)$) сходится к f, то

$$\int\limits_0^1 p_n f = 0, \quad \int\limits_0^1 f^2 = \lim\int\limits_0^1 p_n f = 0, \quad f \equiv 0.$$

Достаточность. Сначала докажем замкнутость этой системы в $L_2[0,1]$, где замкнутость эквивалентна полноте: система $\{g_n\}$ замкнута в L_2 тогда и только тогда, когда при $f \in L_2$

$$\int\limits_0^1 f g_n = 0 \quad\Rightarrow\quad f = 0.$$

А перейти к пространству $C[0,1]$ можно так. Считаем, что $f \in C^1[0,1]$ и $f(1) = f(0) = 0$. Тогда и $\int\limits_0^1 x^n f'(x)dx = 0$ (при $n \in \mathbb{N}$ проверяется интегрированием по частям), а

$$\max|f(x)-p_n(x)| = \max\Big|\int\limits_0^x \big(f'(t)-p_n'(t)\big)dt\Big| \le \Big(\int\limits_0^1 \big|f'(t)-p_n'(t)\big|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу предыдущего найдётся последовательность p_n', сходящаяся к f' в L_2.

Отметим ещё несколько свойств многочленов B_n.

$B_n(0) = f(0)$, $B_n(1) = f(1)$, а поскольку

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big)' = n\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1,n}-a_{k,n})\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1},$$

то для монотонной функции и многочлены монотонные, для выпуклой – выпуклые и т.д. А если $f \in C^r[0,1]$, то и $B_n^{(r)}$ сходятся равномерно к $f^{(r)}$.

Теорема 4.2 (Титчмарша о свёртке). *Если f_1 и f_2 принадлежат $L_1[0,+\infty)$, а $\int_0^x f_1(t)f_2(x-t)dt = 0$ почти при всех $x \ge 0$, то хотя бы одна из двух функций равна нулю почти всюду.*

Доказательство. Полагаем $f_1(x) = f_2(x) = 0$ при $x < 0$, тогда свёртка $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt = 0$, а преобразования Фурье обеих функций аналитичны в верхней полуплоскости $Imz > 0$ и непрерывны в её замыкании. При этом $\hat{f}_1(y)\cdot\hat{f}_2(y) = 0$ тождественно, так как в силу теоремы Фубини свёртка интегрируема и её преобразование Фурье равно $\sqrt{2\pi}\hat{f}_1(y)\cdot\hat{f}_2(y)$. Если $\hat{f}_1(y_0) \ne 0$, то такое же неравенство по непрерывности имеет место и в некотором интервале. Тогда в этом интервале равна нулю $\hat{f}_2$. Продолжаем $\hat{f}_2$ в нижнюю полуплоскость по принципу симметрии: $\hat{f}_2(\overline{z}) = \overline{\hat{f}_2(z)}$. В силу теоремы Мореры $\hat{f}_2$ аналитична во всей области определения и в силу теоремы единственности равна нулю тождественно. По следствию теоремы 2.4 $f_2 = 0$ почти всюду, что и требовалось доказать. □

Теорема 4.3 (Уитни). *Если функция $f \in C[a,b]$, а p_{k-1}, $k \in \mathbb{N}$, её интерполяционный многочлен степени не выше $k-1$, определяемый k узлами, то существует постоянная c, не зависящая от функции* *и отрезка и такая, что*

$$\max_{x\in[a,b]} \bigl|f(x) - p_{k-1}(x)\bigr| \le c\omega_k\Bigl(f; \frac{b-a}{k}\Bigr),$$

где

$$\omega_k(f;h) = \sup_{a\le x\le(x+k\delta)\le b, 0<\delta\le h\le \frac{b-a}{k}} \left|\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}(-1)^m f(x+m\delta)\right|$$

(под знаком модуля стоит разность $\Delta_k^\delta f(x)$.)

Доказательство. Не уменьшая общности, функцию можно считать гладкой.

Для гладкой функции модуль разности с её многочленом Тейлора степени $(k-1)$ не больше $\sup\bigl|f^{(k)}(x)\bigr|\dfrac{(b-a)^k}{k!}$.

Введём гладкую функцию типа Стеклова

$$f_{k,h}(x) = \frac{1}{h^k}\int_0^h d\delta_1 \int_0^h d\delta_2 \cdots \int_0^h \sum_{m=1}^{k}\binom{k}{m}(-1)^{m+1} f\left(x + m\sum_{\nu=1}^{k}\delta_\nu\right) d\delta_k.$$

Для неё

$$||f - f_{k,h}|| \le \omega_k(f;kh) \le k^k\omega_k(f;h),$$

а

$$f_{k,h}^{(k)}(x) = \frac{1}{h^k}\sum_{m=1}^{k}\binom{k}{m}\int_0^h d\delta_1\int_0^h d\delta_2\cdots\int_0^h f^{(k)}\left(x + m\sum_{\nu=1}^{k}\delta_\nu\right)d\delta_k$$

$$= \frac{1}{h^k}\sum_{m=1}^{k}(-1)^{m+1}\binom{k}{m}(-1)^k\Delta_k^{mkh} f(x)$$

и, значит,

$$\bigl|\bigl|f_{k,h}^{(k)}\bigr|\bigr|_\infty \le \frac{2^k-1}{h^k}k^k\omega_k(f;h).$$

Теперь f нужно приблизить функцией $f_{k,h}$ при $h = \dfrac{b-a}{k}$, а к $f_{k,h}$ применить доказанные неравенства.

Так что существует многочлен $\widetilde{p}_{k-1}$ с приведенной в теореме оценкой приближения. Осталось заменить его интерполяционным многочленом $p_{k-1}(f)$.

Очевидно,что $||p_{k-1}(f)||_\infty \le \gamma ||f||_\infty$, где γ определяется расположением узлов интерполяции (зависит от расстояний между соседними узлами). Тогда

$$||f - p_{k-1}(f)|| \le ||f - p_{k-1}|| + ||p_{k-1}(f - \widetilde{p}_{k-1})|| \le (1+\gamma)||f - \widetilde{p}_{k-1}||$$

и теорема доказана. □

Наименьший рост γ в зависимости от k (в приведенном доказательстве) равен $\ln k$.

Таким же образом можно рассмотреть приближение эрмитовским интерполяционным многочленом.

Уитни доказал эту теорему для любой ограниченной функции (не обязательно измеримой).

Теорема 4.4 (О распределении простых чисел). *Через $\pi(n)$ при $n \ge 2$ обозначают число простых чисел $\le n$. Существуют два положительных числа c_1 и c_2 такие, что при любом $n \ge 2$*

$$c_1 \cdot \frac{n}{\log n} \le \pi(n) \le c_2 \cdot \frac{n}{\log n}.$$

Доказательство. Если $\varphi(m)$ – наименьшее общее кратное чисел 2, 3, ..., m, то $\varphi(m) \le m^{\pi(m)}$ и

$$(2n+1)^{\pi(2n+1)} \int_0^1 x^n(1-x)^n dx \ge \varphi(2n+1) \int_0^1 x^n(1-x)^n dx \ge 1.$$

Отсюда можно вывести оценку снизу для $\pi(n)$, так как $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx \le \frac{1}{4^n}$. Оценку сверху можно получить из неравенства

$$(n+1)^{\pi(2n)-\pi(n)} \le \binom{2n}{n} \le 4^n.$$

П. Л. Чебышев несколько более точными рассуждениями (нужно, чтобы было $2c_1 > c_2$) доказал постулат Бертрана: между n и $2n$ есть простые числа.

Уже давно доказано, что если q_n – многочлен с целыми коэффициентами степени n с наименьшей ненулевой sup –нормой модуля на $[0,1]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} ||q_n||_\infty^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{e}$ и таким образом доказать асимптотический закон распределения простых чисел нельзя (см. [14]).

Теорема 4.5 (Бернштейн). *Если* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(1-0)=f(1)$ *и при* $m\in\mathbb{Z}_+$ *и* $0\le x<x+mh\le 1$

$$\Delta^h_m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{n}{k}f(x+kh)\ge 0$$

(полная монотонность), то $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ *при* $|z|\le 1$ *и* $a_k\ge 0$, $k\ge 0$.

Доказательство. Из условия при $m=1$ и $m=2$ следует, что $f\in C[0,1]$. Для многочленов Бернштейна (см. теорему 4.1)

$$B_n^{(m)}(x)=n(n-1)\cdots(n-m+1)\sum_{p=0}^{n-m}\Delta_m^{\frac{1}{n}}f\left(\frac{p}{n}\right)\binom{n-m}{p}x^p(1-x)^{n-m-p}\ge 0,$$

$$|B_n(z)|\le B_n(1)=f(1)\quad(|z|\le 1).$$

Осталось применить теоремы Монтеля о компактности, Вейерштрасса о сходимости аналитических функций с производными и учесть, что если при $x\in[0,1)$ $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, где все $c_k\ge 0$, а $f(1-0)=f(1)$, то $\sum\limits_k c_k=f(1)$.

Теорема 4.6 (Обобщение формулы Эйлера–Маклорена). *Пусть при* $n\in\mathbb{Z}$ *и целом* $r\ge 0$ *функция* f *и её производная* $f^{(r)}\in V[n,\infty)$, *а* $\lim f^{(\nu)}(x)=0$ *при* $x\to+\infty$ $(\nu\in[0,r])$. *Тогда при* $0<|x|\le\pi$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}f(k)e^{ikx}&=\int_n^{\infty}f(u)e^{iux}du+\frac{1}{2}f(n)e^{inx}\\&+e^{inx}\sum_{p=0}^{r-1}\frac{(-i)^{p+1}}{p!}h^{(p)}(x)f^{(p)}(n)+\theta\pi^{-r}V_n^{\infty}(f^{(r)}),\end{aligned}$$

где $h(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}(x/2)$ *и* $|\theta|\le 3$.

Формула Эйлера–Маклорена получается при $x\to 0$ ([8], **4.1.5**).

Пусть E линейное пространство над полем вещественных чисел. Функция $f:E\to\mathbb{C}$ называется положительно определённой (п.о.) на E, если для любого набора $\{x_k\}_{k=1}^n$ элементов E и любого множества $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ комплексных чисел

$$\sum_{k,s=1}^{n}f(x_k-x_s)\xi_k\bar{\xi}_s\ge 0.$$

Если E – гильбертово пространство, то можно взять, напр., $f(x) = e^{i(x,y)}$ при $y \in E$.

Хорошо известен критерий п.о. Бохнера–Хинчина в случае $E = \mathbb{R}^m$: представимость функции в виде преобразования Фурье конечной борелевской положительной меры. Есть и другие критерии, которые введены для определённых целей.

Теорема 4.7 (Критерий положительной определённости). *Пусть функция f непрерывна в нуле. Для того чтобы она была п.о. в $\mathbb{R}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

α) $f \in C(\mathbb{R})$ и ограничена;

β) несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(f(t) - f(-t))}{t} dt$ сходится (в смысле Коши);

γ) $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t)\, dt \geq 0$;

δ) существует число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $k \geq k_0$ и $x \neq 0$

$$(\operatorname{sign} x)^{k+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x+it)^{k+1}} \geq 0.$$

С помощью этого критерия решена следующая задача (см. [8], **6.2.8** и **6.3.12**).

Пусть $f_0(t) = 0$ при $t \in [1, +\infty)$, а на $[0, 1)$ – это многочлен степени n при $f_0(0) = 1$. Найти п.о. функцию в $\mathbb{R}^m$ вида $f_0(|x|)$ ($|x|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^m$) наибольшей гладкости в $\mathbb{R}^m$ (radial basis function). При нечётном m этот "сплайн" единственный и принадлежит C^r при $r = 2[\frac{2n-m-1}{6}]$ (целая часть).

Пример. $f_0(|x|) = \big(1 - |x|\big)_+^4 \big(1 + 4|x|\big) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. См. также [15].

Литература

[1] Р. М. Тригуб, *Сборник задач и теорем по математическому анализу*, Эл. изд–во Ridero, 2018 https://ridero.ru/books/sbornik._zadach_i_teorem_po_matematicheskomu_analizu.

[2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Физматлит, 2004.

[3] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, AMS, 1996.

[4] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Физматгиз, М., 1980.

[5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965.

[6] Г. Х. Харди, В. В. Рогозинский, *Ряды Фурье*, Физматгиз, М., 1959.

[7] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

[8] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer–Springer, 2004.

[9] E. Liflyand, S. Samko, R. Trigub, *The Wiener algebra of absolutely convergence Fourier integrals: an overview* // Anal. Math. Phys, **2** (2012), No. 1, 1–68.

[10] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[11] Р. М. Тригуб, *Суммируемость тригонометрических рядов Фурье в d–точках и обобщение метода Абеля–Пуассона* // Изв. РАН, сер. матем., **79** (2015), No. 4, 205–224.

[12] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений*, том 1, Изд–во АН СССР, 1952.

[13] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Физматгиз, М., 1965.

[14] Р. М. Тригуб, *О многочленах Чебышева и целых коэффициентах* // Матем. заметки, **105** (2019), No. 2, 302–312.

[15] Roald M. Trigub, *Fourier Multipliers and K–Functionals in Spases of Smooth Functions* // Ukr. Math. Bull., **2** (2005), No. 2, 239–284.

Сведения об авторах

Роальд Михайлович Тригуб

Сумской государственный университет,
Сумы, Украина
E-Mail: `roald.trigub@gmail.com`