Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 3, 399 – 417

О локальном поведении одного класса обратных отображений

Евгений А. Севостьянов, Сергей А. Скворцов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Изучены семейства отображений, обратные к которым удовлетворят неравенству типа Полецкого в заданной области. Доказано, что эти семейства равностепенно непрерывны во внутренних точках, если исходная и отображённая области ограничены, а мажоранта, отвечающая за искажение модуля, интегрируема. Если же исходная область локально связна на своей границе, а граница отображённой области является слабо плоской, соответствующие семейства отображений равностепенно непрерывны во внутренних и граничных точках.

2010 MSC. Обратные отображения, равностепенная непрерывность, отображения с ограниченным и конечным искажением, модули, ёмкости.

Ключевые слова и фразы. 30C65, 31B15, 31B25.

1. Введение

Локальное поведение квазиконформных отображений евклидова пространства хорошо изучено в настоящее время (см., напр., [1, теорема 19.2], [2, теорема 3.17] и [3, лемма 3.12, следствие 3.22]). Определённое число работ посвящено, при этом, их поведению в замыкании заданной области. Отметим, например, [4, теорема 3.1] и [5, теорема 3.1], см. также [6, 7] и [8]. Поставим теперь вопрос о том, каково локальное поведение соответствующих обратных отображений?

В рамках класса квазиконформных гомеоморфизмов этот вопрос бессодержателен. В самом деле, квазиконформность прямого отображения f влечёт квазиконформность отображения f^{-1} (при этом, постоянная квазиконформности отображений одна и та же, см. напр., [1,

Статья поступила в редакцию 17.04.2018

ISSN 1810 – 3200.

следствие 13.3]; см. также [1, теорема 34.3]). Таким образом, изучение отображений, обратных к квазиконформным, не приносит ничего нового и поставленный вопрос снимается.

Ситуация существенно изменится, если вместо этого мы рассмотрим некоторый более общий класс гомеоморфизмов. Введём в рассмотрение этот класс. Пусть M обозначает модуль семейств кривых (см. [1]), а $dm(x)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, задано отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, и оно удовлетворяет неравенству вида

$$M(f(\Gamma)) \leqslant \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \quad \forall\ \rho \in \operatorname{adm}\Gamma \qquad (1.1)$$

где $Q : D \to [1, \infty]$ – некоторая (заданная) фиксированная функция (см., напр., [9]). Напомним, что $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ в том и только том случае, если

$$\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geqslant 1 \quad \forall\ \gamma\ \in \Gamma\,.$$

О выполнении оценок вида (1.1) в различных классах отображений см., напр., [10, теоремы 4.6 и 6.10]. Отметим, что в случае произвольной функции Q мы не можем заменить f на f^{-1} в (1.1); по этому поводу см. пример 5.2, приведённый в конце работы. Изучение гомеоморфизмов g, обратные к которым удовлетворяют соотношению (1.1), является темой исследования настоящей статьи. Далее будет построен пример семейства отображений с условием (1.1), которое не является равностепенно непрерывным в заданной области, при этом, «обратное» к нему семейство является таковым. Исходя из сказанного, изучение локального поведения таких отображений имеет смысл.

Следует указать на наши публикации [11] и [12], в которых исследовались аналогичные вопросы. Отметим, что основные теоремы этих работ задействуют весьма сильные условия на геометрию областей и рассматриваемые отображения, поэтому по силе утверждений они не сопоставимы с результатами данной статьи. В частности, мы отказываемся от условий нормировки в исследуемых классах; как показывает пример 5.1, приведённый, в конце работы, это существенно обогащает результаты с точки зрения приложений. Немного неожиданным открытием для нас стало также то обстоятельство, что равностепенная непрерывность отображений внутри области никак не связана с геометрией этой области. Относительно последней, мы требуем лишь её ограниченность, а также ограниченность её образа при отображении. Отметим, что все ранние результаты, учитывая и те, что относятся к статьям [11] и [12], так или иначе включали в себя какие-либо дополнительные условия на области и их границы.

Основные определения и обозначения, используемые ниже, могут быть найдены в монографиях [1] и [13], и потому опускаются. Пусть $E,\, F\subset\overline{{\mathbb R}^n}$ – произвольные множества. В дальнейшем всюду символом $\Gamma(E,F,D)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\rightarrow\overline{{\mathbb R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E,\gamma(b)\in\,F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t \in (a,\, b)$. Напомним, что область $D\subset {\Bbb R}^n$ называется *локально связной в точке* $x_0\in\partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V\subset U$ точки x_0 такая, что $V\cap D$ связно. Область D локально связна на ∂D, если D локально связна в каждой точке $x_0\in\partial D$. Граница области D называется *слабо плоской* в точке $x_0\in \partial D$, если для каждого $P>0$ и для любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V\subset U$ этой же точки такая, что $M(\Gamma(E, F, D))>P$ для произвольных континуумов $E, F\subset D$, пересекающих ∂U и ∂V. Граница области D называется слабо плоской, если соответствующее свойство выполнено в каждой точке границы D.

Для областей $D, D^{\,\prime}\subset {\Bbb R}^n$, $n\geqslant 2$, и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q:{\Bbb R}^n\rightarrow [1, \infty]$, $Q(x)\equiv 0$ при $x\not\in D$, обозначим через $\mathfrak{R}_Q(D, D^{\,\prime})$ семейство всех отображений $g:D^{\,\prime}\rightarrow D$ таких, что $f=g^{\,-1}$ – гомеоморфизм области D на $D^{\,\prime}$ с условием (1.1). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Предположим, что $\overline{D}$ и $\overline{D^{\,\prime}}$ – компакты в ${\Bbb R}^n$. Если $Q\in L^1(D)$, то семейство $\mathfrak{R}_Q(D, D^{\,\prime})$ равностепенно непрерывно в $D^{\,\prime}$.*

Для числа $\delta>0$, областей $D, D^{\,\prime}\subset {\Bbb R}^n$, $n\geqslant 2$, континуума $A\subset D$ и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q:{\Bbb R}^n\rightarrow [1, \infty]$, $Q(x)\equiv 0$ при $x\not\in D$, обозначим через $\mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D^{\,\prime})$ семейство всех отображений $g:D^{\,\prime}\rightarrow D$ таких, что $f=g^{\,-1}$ – гомеоморфизм области D на $D^{\,\prime}$ с условием (1.1), при этом, ${\rm diam}\,f(A)\geqslant\delta$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Предположим, что область D локально связна во всех граничных точках, $\overline{D}$ и $\overline{D^{\,\prime}}$ – компакты в ${\Bbb R}^n$, а область $D^{\,\prime}$ имеет слабо плоскую границу. Предположим также, что любая компонента связности $\partial D^{\,\prime}$ есть невырожденный континуум. Если $Q\in L^1(D)$, то каждое отображение $g\in\mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D^{\,\prime})$ продолжается по непрерывности до отображения $\overline{g}:\overline{D^{\,\prime}}\rightarrow\overline{D}$, $\overline{g}|_{D^{\,\prime}}=g$, при этом, $\overline{g}(\overline{D^{\,\prime}})=\overline{D}$ и семейство $\mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(\overline{D}, \overline{D^{\,\prime}})$, состоящее из всех продолженных отображений $\overline{g}:\overline{D^{\,\prime}}\rightarrow \overline{D}$, равностепенно непрерывно в $\overline{D^{\,\prime}}$.*

Замечание 1.1. Утверждение теоремы 1.1 впервые было установлено авторами в метрических пространствах при весьма сильных дополнительных условиях на области D и D', см. [12, теорема 2]. Основным достижением настоящей статьи является утверждение этой теоремы *без каких-либо* условий на эти области, кроме их ограниченности. Версия теоремы 1.2, относящаяся к метрическим пространствам, опубликована в [12, теорема 3] и доказана в предположении, что область D' является QED-областью. Последнее условие является более сильным по отношению к условию слабой плоскости границы, см. [13, замечание 3.14]. Таким образом, в евклидовом пространстве теорема 1.2 является более сильным утверждением по сравнению с результатами из [12].

2. Вспомогательные сведения

Прежде всего, установим два элементарных утверждения, играющих важную роль при доказательстве основных результатов. Пусть I – открытый замкнутый, либо полуоткрытый интервал в $\mathbb{R}$. Как обычно, для кривой $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ полагаем:

$$|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a,b] : \gamma(t) = x\}\,,$$

при этом, $|\gamma|$ называется *носителем (образом)* γ. Будем говорить, что кривая γ лежит в области D, если $|\gamma| \subset D$, кроме того, будем говорить, что кривые γ_1 и γ_2 не пересекаются, если не пересекаются их носители. Кривая $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ называется *жордановой дугой*, если γ – гомеоморфизм на I. Следующее утверждение доказано в [12, предложение 1], однако, ради полноты изложения мы приведём его доказательство полностью.

Лемма 2.1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, локально связная на своей границе. Тогда любые две пары различных точек $a \in D, b \in \overline{D}$, и $c \in D, d \in \overline{D}$ можно соединить непересекающимися между собой кривыми $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{D}$ и $\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D}$, такими, что $\gamma_i(t) \in D$ при всех $t \in (0,1)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = c$, $\gamma_2(1) = d$.*

Доказательство. Заметим, что точки области, локально связной на границе, являются достижимыми изнутри области посредством кривых (см. [13, предложение 13.2]). В таком случае, если $n \geqslant 3$, соединим точки a и b произвольной жордановой дугой γ_1 в области D, не проходящей через точки c и d (что возможно ввиду локальной связности D на границе и переходом от кривой к ломаной, если это необходимо). Тогда γ_1 не разбивает область D как множество топологической размерности 1 (см. [14, следствие 1.5.IV]), что и обеспечивает существование искомой кривой γ_2. Таким образом, в случае $n\geqslant 3$ утверждение леммы 2.1 установлено.

Пусть теперь $n=2$, тогда снова точки c и d не разбивают область D ([14, следствие 1.5.IV]). В таком случае, также можно соединить точки a и b жордановой дугой γ_1 в D, не проходящей через точки c и d. Ввиду теоремы Антуана (см. [15, теорема 4.3, § 4]) область D можно отобразить на некоторую область D^* посредством плоского гомеоморфизма $\varphi:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ так, что $\varphi(\gamma_1)=J$ и J – отрезок в D^*. Заметим также, что точки границы области D^* являются достижимыми изнутри D^* посредством кривых. Таким образом, мы можем соединить точки $\varphi(c)$ и $\varphi(d)$ в D^* жордановой кривой $\alpha_2:[0,1]\rightarrow\overline{D^*}$, которая целиком лежит в D^*, кроме, может быть, своей концевой точки $\alpha_2(1)=\varphi(d)$.

Осталось показать, что кривую α_2 можно выбрать так, что она не будет пересекать отрезок J. В самом деле, пусть α_2 пересекает J, и пусть t_1 и t_2 – соответственно, наибольшее и наименьшее значение $t\in[0,1]$, для которых $\alpha_2(t)\in|J|$. Пусть также

$$J=J(s)=\varphi(a)+(\varphi(b)-\varphi(a))s,\quad s\in[0,1]$$

– параметризация отрезка J. Пусть $\widetilde{s_1}$ и $\widetilde{s_2}\in(0,1)$ таковы, что $J(\widetilde{s_1})=\alpha_2(t_1)$ и $J(\widetilde{s_2})=\alpha_2(t_2)$. Положим $s_2=\max\{\widetilde{s_1},\widetilde{s_2}\}$. Пусть $e_1=\varphi(b)-\varphi(a)$ и e_2 – единичный вектор, ортогональный e_1, тогда множество

$$P_{\varepsilon}=\{x=\varphi(a)+x_1e_1+x_2e_2,\ x_1\in(-\varepsilon,s_2+\varepsilon),\ x_2\in(-\varepsilon,\varepsilon)\}\,,\ \varepsilon>0\,,$$

представляет собой прямоугольник, содержащий $|J_1|$, где J_1 – сужение J на отрезок $[0,s_2]$ (см. рисунок 1). Выберем $\varepsilon>0$ так, что $\varphi(c)\not\in P_{\varepsilon}$, $\operatorname{dist}(P_{\varepsilon},\partial D^*)>\varepsilon$. Ввиду [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]) кривая α_2 пересекает ∂P_{ε} при некоторых $T_1<t_1$ и $T_2>t_2$. Пусть $\alpha_2(T_1)=y_1$ и $\alpha_2(T_2)=y_2$. Так как $\partial P_{\varepsilon}\setminus\{z_0\}$, $z_0:=\varphi(a)+(s_2+\varepsilon)e_1$, – связное множество, можно соединить точки y_1 и y_2 кривой $\alpha^*(t):[T_1,T_2]\rightarrow\partial P_{\varepsilon}\setminus\{z_0\}$. Окончательно, положим

$$\alpha_2^*(t)\quad=\quad\left\{\begin{array}{ll}\alpha_2(t), & t\in[0,1]\setminus[T_1,T_2],\\ \alpha^*(t), & \qquad\quad t\in[T_1,T_2]\end{array}\right.$$

и $\gamma_2^*:=\varphi^{-1}\circ\alpha_2^*$. Тогда γ_1 соединяет a и b в D, а γ_2^* соединяет c и d в D, при этом, γ_1 и γ_2^* не пересекаются, что и следовало установить. $\Box$

Выше мы ввели в рассмотрение понятие слабо плоской границы области, не упоминая, при этом, о внутренних точках. Следующая

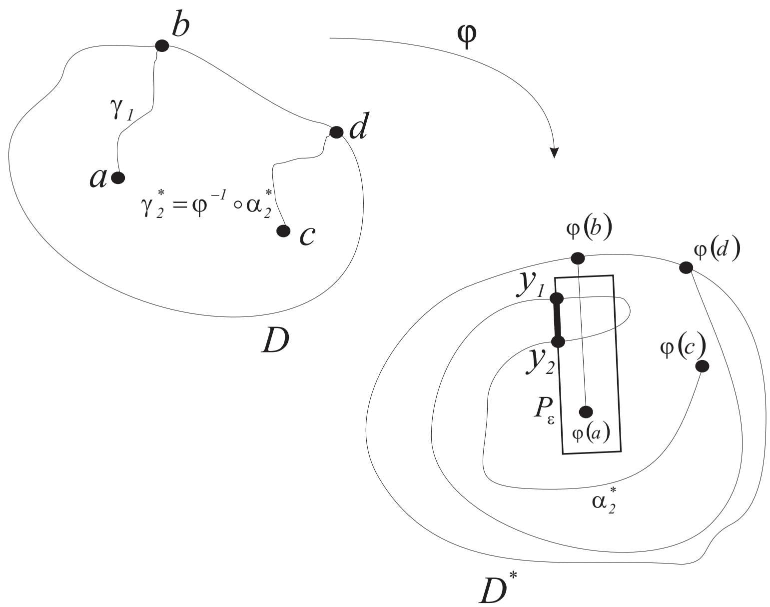

Рис. 1: Возможность соединения двух пар точек кривыми в области

лемма содержит в себе утверждение о том, что в указанных точках свойство "слабой плоскости" всегда имеет место.

Лемма 2.2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $x_0 \in D$. Тогда для каждого $P > 0$ и для любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V \subset U$ этой же точки такая, что $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D$, пересекающих ∂U и ∂V.*

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset D \cap U$. Пусть c_n – положительная постоянная, определённая в соотношении (10.11) в [1], а число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ настолько мало, что $c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P$. Положим $V := B(x_0, \varepsilon)$. Пусть E, F – произвольные континуумы, пересекающие ∂U и ∂V, тогда также E и F пересекают $S(x_0, \varepsilon_0)$ и ∂V (см. [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]). Необходимое заключение вытекает на основании [1, разд. 10.12], поскольку

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geqslant c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P\,.$$

$\square$

3. Доказательство теоремы 1.1

Проведём доказательство теоремы 1.1 от противного. Предположим, что семейство $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $y_0 \in D'$, другими словами, найдутся $y_0 \in D'$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует элемент $y_m \in D'$, $|y_m - y_0| < 1/m$, и гомеоморфизм $g_m \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$, для которых

$$|g_m(y_m) - g_m(y_0)| \geqslant \varepsilon_0 \,. \tag{3.1}$$

Проведём через точки $g_m(y_m)$ и $g_m(y_0)$ прямую $r = r_m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $-\infty < t < \infty$ (см. рисунок 2). Заметим, что указан-

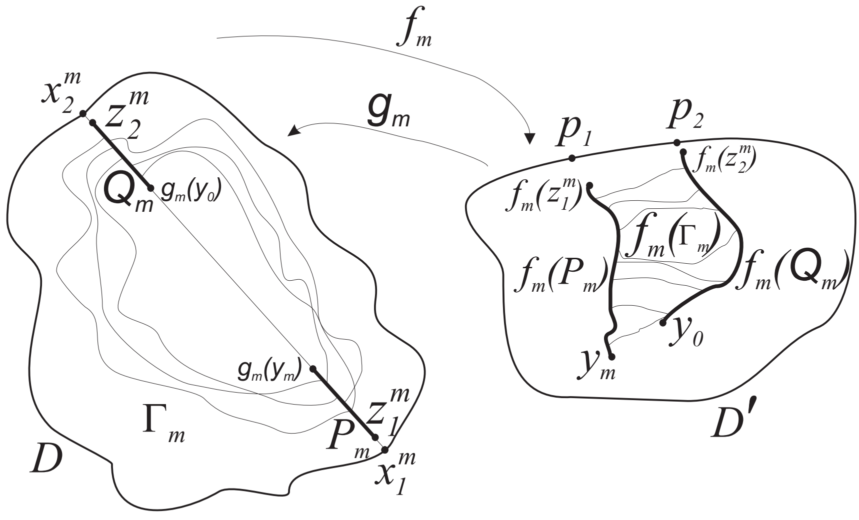

Рис. 2: К доказательству теоремы 1.1

ная прямая $r = r_m(t)$ при $t \geqslant 1$ обязана пересекать границу области D ввиду [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]), поскольку область D ограничена; таким образом, существует $t_1^m \geqslant 1$ такое, что $r_m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$. Не ограничивая общности, можно считать, что $r_m(t) \in D$ при всех $t \in [1, t_1^m)$, тогда отрезок $\gamma_1^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [1, t_1^m]$, принадлежит D при всех $t \in [1, t_1^m)$, $\gamma_1^m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$ и $\gamma_1^m(1) = g_m(y_m)$. Ввиду аналогичных соображений, найдутся $t_2^m < 0$ и отрезок $\gamma_2^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [t_2^m, 0]$, такие, что $\gamma_2^m(t_2^m) = x_2^m \in \partial D$, $\gamma_2^m(0) = g_m(y_0)$ и $\gamma_2^m(t)$ принадлежит D при всех $t \in (t_2^m, 0]$. Положим $f_m := g_m^{-1}$. Так как f_m – гомеоморфизм, то при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ предельные множества $C(f_m, x_1^m)$ и $C(f_m, x_2^m)$ отображений f_m в соответствующих граничных точках $x_1^m, x_2^m \in \partial D$ лежат на $\partial D'$ (см. [13, предложение 13.5]). Следовательно, найдётся точка $z_1^m \in D \cap |\gamma_1^m|$ такая, что $\operatorname{dist}(f_m(z_1^m), \partial D') < 1/m$.

Так как $\overline{D'}$ – компакт, то можно считать, что последовательность $f_m(z_1^m) \to p_1 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Аналогично, найдётся последовательность $z_2^m \in D \cap |\gamma_2^m|$ такая, что $\operatorname{dist}(f_m(z_2^m), \partial D') < 1/m$ и $f_m(z_2^m) \to p_2 \in \partial D'$ при $m \to \infty$.

Пусть P_m – часть отрезка γ_1^m, заключённая между точек $g_m(y_m)$ и z_1^m, а Q_m – часть отрезка γ_2^m, заключённая между точек $g_m(y_0)$ и z_2^m. По построению и ввиду (3.1), $\operatorname{dist}(P_m, Q_m) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Пусть $\Gamma_m = \Gamma(P_m, Q_m, D)$, тогда функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ_m, поскольку для произвольной (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma_m$ выполнено $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant \frac{l(\gamma)}{\varepsilon_0} \geqslant 1$ (где $l(\gamma)$ обозначает длину кривой γ). Поскольку по условию отображения f_m удовлетворяют (1.1), получаем:

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n} \int\limits_{D} Q(x)\, dm(x) := c < \infty\,, \tag{3.2}$$

т.к. $Q \in L^1(D)$. С другой стороны, $\operatorname{diam} f_m(P_m) \geqslant |y_m - f_m(z_1^m)| \geqslant (1/2) \cdot |y_0 - p_1| > 0$ и $\operatorname{diam} f_m(Q_m) \geqslant |y_0 - f_m(z_2^m)| \geqslant (1/2) \cdot |y_0 - p_2| > 0$ при больших $m \in \mathbb{N}$, кроме того,

$$\operatorname{dist}(f_m(P_m), f_m(Q_m)) \leqslant |y_m - y_0| \to 0, \quad m \to \infty\,.$$

Тогда ввиду леммы 2.2

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma\left(f_m(P_m), f_m(Q_m), D'\right)) \to \infty\,, \quad m \to \infty\,,$$

что противоречит соотношению (3.2). Полученное противоречие указывает на ошибочность предположения в (3.1), что и завершает доказательство теоремы. $\square$

4. О поведении отображений в замыкании области

Перейдём к вопросу о глобальном поведении отображений. Следующее утверждение указывает на то, что для достаточно хороших областей и отображений с условием (1.1) образ фиксированного континуума при этих отображениях не может приближаться к границе соответствующей области, как только евклидов диаметр образа этого континуума ограничен снизу (см. также [1, теоремы 21.13 и 21.14]).

Лемма 4.1. *Предположим, что область D локально линейно связна на $\overline{D}$, $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ – компакты в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D' имеет слабо плоскую границу, $Q \in L^1(D)$ и никакая связная компонента границы $\partial D'$ не вырождается в точку. Пусть $f_m : D \to D'$ – последовательность гомеоморфизмов области D на область D' с условием (1.1). Пусть также найдутся континуум $A \subset D$ и число $\delta > 0$ такие, что $\operatorname{diam} f_m(A) \geqslant \delta > 0$ при всех $m = 1, 2, \ldots$. Тогда найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что*

$$\operatorname{dist}(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,.$$

Доказательство. Предположим противное, т.е., предположим что для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $m = m_k : \operatorname{dist}(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Без ограничения общности мы можем считать последовательность m_k монотонно возрастающей. По условию $\overline{D'}$ – компакт, поэтому и $\partial D'$ также компакт как замкнутое подмножество компакта $\overline{D'}$. Кроме того, $f_{m_k}(A)$ – компакт как непрерывный образ компакта A при отображении f_{m_k}. Тогда найдутся $x_k \in f_{m_k}(A)$ и $y_k \in \partial D'$ такие, что $\operatorname{dist}(f_{m_k}(A), \partial D') = |x_k - y_k| < 1/k$ (см. рисунок 3). Так как $\partial D'$ –

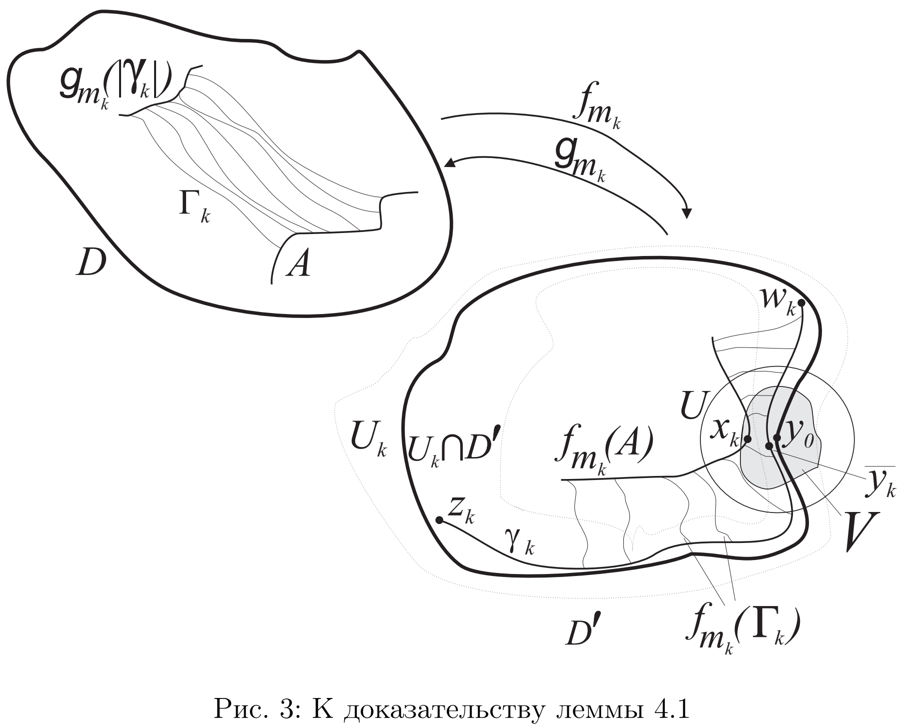

Рис. 3: К доказательству леммы 4.1

компакт, можно считать, что $y_k \to y_0 \in \partial D'$, $k \to \infty$; тогда также

$$x_k \to y_0 \in \partial D', \quad k \to \infty\,.$$

Пусть K_0 – связная компонента $\partial D'$, содержащая точку y_0, тогда, очевидно, K_0 – континуум в $\mathbb{R}^n$. Поскольку D' имеет слабо плоскую границу, при каждом $k \in \mathbb{N}$ отображение $g_{m_k} := f_{m_k}^{-1}$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{g}_{m_k} : \overline{D'} \to \overline{D}$ (см. [13, теорема 4.6]), более того, $\overline{g}_{m_k}$ равномерно непрерывно на $\overline{D'}$ как отображение, непрерывное на компакте. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$ такое, что

$$|\overline{g}_{m_k}(x) - \overline{g}_{m_k}(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x, x_0 \in \overline{D'}, \quad |x - x_0| < \delta_k\,, \quad \delta_k < 1/k\,. \tag{4.1}$$

Пусть далее $\varepsilon > 0$ – произвольное число с условием

$$\varepsilon < (1/2) \cdot \mathrm{dist}\,(\partial D, A)\,, \tag{4.2}$$

где A – континуум из условия леммы. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B(x_0, \delta_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Заметим, что B_k – открытое множество, содержащее K_0, другими словами, B_k – некоторая окрестность континуума K_0. Ввиду [17, лемма 2.2] существует окрестность $U_k \subset B_k$ континуума K_0, такая, что $U_k \cap D'$ связно. Не ограничивая общности, можно считать, что U_k – открытое множество, тогда $U_k \cap D'$ также линейно связно (см. [13, предложение 13.1]). Пусть $\mathrm{diam}\, K_0 = m_0$, тогда найдутся $z_0, w_0 \in K_0$ такие, что $\mathrm{diam}\, K_0 = |z_0 - w_0| = m_0$. Следовательно, можно выбрать последовательности $\overline{y_k} \in U_k \cap D'$, $z_k \in U_k \cap D'$ и $w_k \in U_k \cap D'$ так, что $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ и $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можно считать, что

$$|z_k - w_k| > m_0/2, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{4.3}$$

Соединим последовательно точки z_k, $\overline{y_k}$ и w_k кривой γ_k в $U_k \cap D'$ (это возможно, поскольку $U_k \cap D'$ линейно связно). Пусть $|\gamma_k|$ – как обычно, носитель (образ) кривой γ_k в D'. Тогда $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ – компакт в D. Пусть $x \in |\gamma_k|$, тогда найдётся $x_0 \in K_0 : x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафиксируем $\omega \in A \subset D$. Поскольку $x \in |\gamma_k|$, то x – внутренняя точка области D', так что мы вправе писать $g_{m_k}(x)$ вместо $\overline{g}_{m_k}(x)$ для указанных x. В таком случае, из (4.1) и (4.2), ввиду неравенства треугольника, для больших $k \in \mathbb{N}$ получаем:

$$|g_{m_k}(x) - \omega| \geqslant |\omega - \overline{g}_{m_k}(x_0)| - |\overline{g}_{m_k}(x_0) - g_{m_k}(x)|$$

$$\geqslant \mathrm{dist}\,(\partial D, A) - (1/2) \cdot \mathrm{dist}\,(\partial D, A) = (1/2) \cdot \mathrm{dist}\,(\partial D, A) > \varepsilon\,. \tag{4.4}$$

Переходя в (4.4) к inf по всем $x \in |\gamma_k|$ и всем $\omega \in A$, мы получим:

$$\mathrm{dist}\,(g_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon, \quad \forall\ k = 1, 2, \ldots\ . \tag{4.5}$$

Ввиду (4.5) длина произвольной кривой, соединяющей $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ и A в D, не меньше ε. Положим $\Gamma_k := \Gamma(g_{m_k}(|\gamma_k|), A, D)$, тогда функция $\rho(x) = 1/\varepsilon$ при $x \in D$ и $\rho(x) = 0$ при $x \notin D$ допустима для Γ_k, поскольку $\int\limits_{\gamma} \rho(x)|dx| \geqslant \frac{l(\gamma)}{\varepsilon} \geqslant 1$ для $\gamma \in \Gamma_k$ (где $l(\gamma)$ обозначает длину кривой γ). По определению отображений f_{m_k} в (1.1), имеем:

$$M(f_{m_k}(\Gamma_k)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_D Q(x)\, dm(x) = c = c(\varepsilon, Q) < \infty\,, \tag{4.6}$$

поскольку по условию $Q \in L^1(D)$.

Покажем теперь, что мы приходим к противоречию с (4.6) ввиду слабой плоскости границы $\partial D'$. Выберем в точке $y_0 \in \partial D'$ шар $U := B(y_0, r_0)$, где $r_0 > 0$ и $r_0 < \min\{\delta/4, m_0/4\}$, δ – число из условия леммы, а $\mathrm{diam}\, K_0 = m_0$. Заметим, что $|\gamma_k| \cap U \neq \varnothing \neq |\gamma_k| \cap (D' \setminus U)$ при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$, поскольку $\mathrm{diam}\, |\gamma_k| \geqslant m_0/2 > m_0/4$ и $\overline{y_k} \in |\gamma_k|, \overline{y_k} \to y_0$ при $k \to \infty$. Ввиду тех же соображений $f_{m_k}(A) \cap U \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus U)$. Так как $|\gamma_k|$ и $f_{m_k}(A)$ – континуумы, то

$$f_{m_k}(A) \cap \partial U \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial U \neq \varnothing\,, \tag{4.7}$$

см. [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]. Для фиксированного $P > 0$, пусть далее $V \subset U$ – окрестность точки y_0, соответствующая определению слабо плоской границы, т.е., такая, что для любых континуумов $E, F \subset D'$ с условием $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ и $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$ выполнено неравенство

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P\,. \tag{4.8}$$

Заметим, что при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$

$$f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing, \quad |\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{4.9}$$

В самом деле, $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $x_k \in f_{m_k}(A)$, где $x_k, \overline{y_k} \to y_0 \in V$ при $k \to \infty$, поэтому $|\gamma_k| \cap V \neq \varnothing \neq f_{m_k}(A) \cap V$ при больших $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, $\mathrm{diam}\, V \leqslant \mathrm{diam}\, U = 2r_0 < m_0/2$ и, поскольку $\mathrm{diam}|\gamma_k| > m_0/2$ ввиду (4.3), то $|\gamma_k| \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тогда $|\gamma_k| \cap \partial V \neq \varnothing$ (см. [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]). Аналогично, $\mathrm{diam}\, V \leqslant \mathrm{diam}\, U = 2r_0 < \delta/2$ и, поскольку $\mathrm{diam}\, f_{m_k}(A) > \delta$ по условию леммы, то $f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus$

$V) \neq \varnothing$. Ввиду [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46] имеем: $f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \varnothing$. Соотношения в (4.9) установлены.

Таким образом, согласно (4.7), (4.8) и (4.9), мы получим, что

$$M(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) > P\,. \tag{4.10}$$

Заметим, что $\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D') = f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)) = f_{m_k}(\Gamma_k)$, так что неравенство (4.10) может быть переписано в виде

$$M(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) = M(f_{m_k}(\Gamma_k)) > P\,,$$

что противоречит неравенству (4.6). Полученное противоречие указывает на неверность предположения $\mathrm{dist}\,(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Лемма доказана. $\Box$ $\Box$

Доказательство теоремы 1.2. Поскольку D' имеет слабо плоскую границу, каждое $g \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продолжается до непрерывного отображения $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$ (см. [13, теорема 4.6]).

Проверим равенство $\overline{g}(\overline{D'}) = \overline{D}$. В самом деле, по определению $\overline{g}(\overline{D'}) \subset \overline{D}$. Осталось показать обратное включение $\overline{D} \subset \overline{g}(\overline{D'})$. Пусть $x_0 \in \overline{D}$, тогда покажем, что $x_0 \in \overline{g}(\overline{D'})$. Если $x_0 \in \overline{D}$, то либо $x_0 \in D$, либо $x_0 \in \partial D$. Если $x_0 \in D$, то доказывать нечего, так как по условию $\overline{g}(D') = D$. Пусть теперь $x_0 \in \partial D$, тогда найдутся $x_k \in D$ и $y_k \in D'$ такие, что $x_k = \overline{g}(y_k)$ и $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$. Поскольку $\overline{D'}$ – компакт, можно считать, что $y_k \to y_0 \in \overline{D'}$ при $k \to \infty$. Так как $f = g^{-1}$ – гомеоморфизм, то $y_0 \in \partial D'$. Поскольку $\overline{g}^{\,-1}$ непрерывно в $\overline{D'}$, $\overline{g}(y_k) \to \overline{g}(y_0)$. Однако, в таком случае, $\overline{g}(y_0) = x_0$, ибо $\overline{g}(y_k) = x_k$ и $x_k \to x_0$, $k \to \infty$. Значит, $x_0 \in \overline{g}(\overline{D'})$. Включение $\overline{D} \subset \overline{g}(\overline{D'})$ доказано и, значит, $\overline{D} = \overline{g}(\overline{D'})$, что и требовалось установить.

Равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ во внутренних точках D' есть результат теоремы 1.1. Осталось показать, что это семейство равностепенно непрерывно в граничных точках. Проведём доказательство от противного. Допустим, найдётся точка $z_0 \in \partial D'$, число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $z_m \in \overline{D'}$, $z_m \to z_0$ при $m \to \infty$ и $\overline{g}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(\overline{D}, \overline{D'})$ такие, что

$$|\overline{g}_m(z_m) - \overline{g}_m(z_0)| \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{4.11}$$

Положим $g_m := \overline{g}_m|_{D'}$. Так как g_m по непрерывности продолжается на границу D', можно считать, что $z_m \in D'$ и, значит, $\overline{g}_m(z_m) = g_m(z_m)$. Кроме того, найдётся ещё одна последовательность $z'_m \in D'$, $z'_m \to z_0$ при $m \to \infty$, такая, что $|g_m(z'_m) - \overline{g}_m(z_0)| \to 0$ при $m \to \infty$. Так как $\overline{D}$ – компакт, мы можем считать, что последовательности

$g_m(z_m)$ и $\overline{g}_m(z_0)$ являются сходящимися при $m\to\infty$. Пусть $g_m(z_m)\to\overline{x_1}$ и $\overline{g}_m(z_0)\to\overline{x_2}$ при $m\to\infty$. По непрерывности модуля из (4.11) вытекает, что $\overline{x_1}\neq\overline{x_2}$, более того, так как гомеоморфизмы сохраняют границу, $\overline{x_2}\in\partial D$. Пусть x_1 и x_2 – произвольные различные точки континуума A, ни одна из которых не совпадает с $\overline{x_1}$. По лемме 2.1 можно соединить точки x_1 и $\overline{x_1}$ кривой $\gamma_1:[0,1]\to\overline{D}$, а точки x_2 и $\overline{x_2}$ – кривой $\gamma_2:[0,1]\to\overline{D}$ так, что $|\gamma_1|\cap|\gamma_2|=\varnothing$, $\gamma_i(t)\in D$ при всех $t\in(0,1)$, $i=1,2$, $\gamma_1(0)=x_1$, $\gamma_1(1)=\overline{x_1}$, $\gamma_2(0)=x_2$ и $\gamma_2(1)=\overline{x_2}$. Так как D локально связна на своей границе, найдутся окрестности U_1 и U_2 точек $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$, замыкания которых не пересекаются, такие что $W_i:=D\cap U_i$ – линейно связное множество. Уменьшая окрестности U_i, если это необходимо, мы можем считать, что $\overline{U_1}\cap|\gamma_2|=\varnothing=\overline{U_2}\cap|\gamma_1|$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $g_m(z_m)\in W_1$ и $g_m(z_m')\in W_2$ при всех $m\in\mathbb{N}$. Пусть a_1 и a_2 – произвольные точки, принадлежащие $|\gamma_1|\cap W_1$ и $|\gamma_2|\cap W_2$. Пусть t_1,t_2 таковы, что $\gamma_1(t_1)=a_1$ и $\gamma_2(t_2)=a_2$. Соединим точку a_1 с точкой $g_m(z_m)$ кривой $\alpha_m:[t_1,1]\to W_1$ такой, что $\alpha_m(t_1)=a_1$ и $\alpha_m(1)=g_m(z_m)$. Аналогично, соединим точку a_2 с точкой $g_m(z_m')$ кривой $\beta_m:[t_2,1]\to W_2$ такой, что $\beta_m(t_2)=a_2$ и $\beta_m(1)=g_m(z_m')$ (см. рисунок 4). Положим теперь

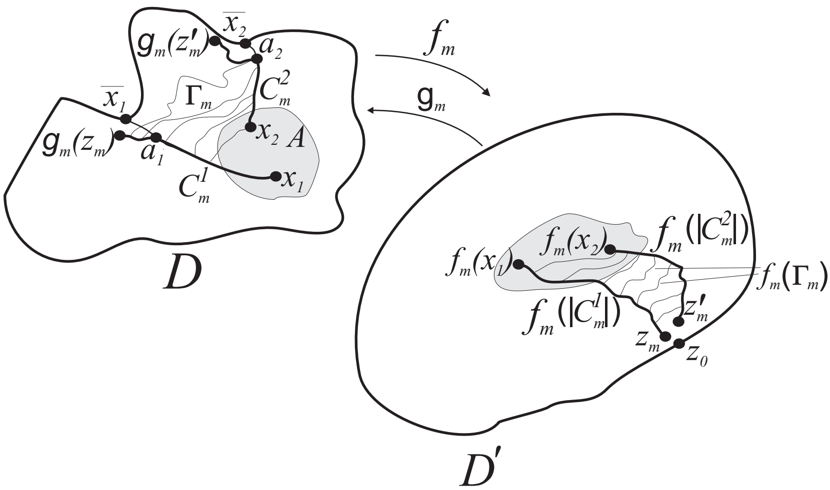

Рис. 4: К доказательству теоремы 1.2

$$C_m^1(t)=\begin{cases}\gamma_1(t), & t\in[0,t_1],\\ \alpha_m(t), & t\in[t_1,1],\end{cases}\qquad C_m^2(t)=\begin{cases}\gamma_2(t), & t\in[0,t_2],\\ \beta_m(t), & t\in[t_2,1].\end{cases}$$

Пусть, как обычно, $|C_m^1|$ и $|C_m^2|$ – носители кривых C_m^1 и C_m^2, соответственно. Заметим, что по построению $|C_m^1|$ и $|C_m^2|$ – два непересекающихся континуума в D, причём $\operatorname{dist}(|C_m^1|,|C_m^2|)>l_0>0$ при всех

$m=1,2,\ldots$. Можно взять, например,

$$l_0=\min\{\mathrm{dist}\,(|\gamma_1|,|\gamma_2|),\mathrm{dist}\,(|\gamma_1|,U_2),\mathrm{dist}\,(|\gamma_2|,U_1),\mathrm{dist}\,(U_1,U_2)\}.$$

Пусть теперь Γ_m – семейство кривых, соединяющих $|C_m^1|$ и $|C_m^2|$ в D. Тогда функция

$$\rho(x)=\begin{cases}\frac{1}{l_0}, & x\in D\\ 0, & x\notin D\end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ_m, поскольку $\int\limits_{\gamma}\rho(x)|dx|\geqslant\frac{l(\gamma)}{l_0}\geqslant 1$ для $\gamma\in\Gamma_m$ (где $l(\gamma)$ обозначает длину кривой γ). По условию отображения f_m, $f_m=g_m^{-1}$, удовлетворяют (1.1) при $Q\in L^1(D)$, ввиду чего получаем:

$$M(f_m(\Gamma_m))\leqslant\frac{1}{l_0^n}\int\limits_D Q(x)\,dm(x):=c=c(l_0,Q)<\infty\,. \tag{4.12}$$

С другой стороны, по лемме 4.1 найдётся число $\delta_1>0$ такое, что $\mathrm{dist}\,(f_m(A),\partial D')>\delta_1>0$, $m=1,2,\ldots$. Отсюда получим, что

$$\mathrm{diam}\,f_m(|C_m^1|)\geqslant|z_m-f_m(x_1)|\geqslant(1/2)\cdot\mathrm{dist}\,(f_m(A),\partial D')>\delta_1/2\,,$$

$$\begin{gathered}\mathrm{diam}\,f_m(|C_m^2|)\geqslant|z_m'-f_m(x_2)|\geqslant\\ \geqslant(1/2)\cdot\mathrm{dist}\,(f_m(A),\partial D')>\delta_1/2\end{gathered} \tag{4.13}$$

при некотором $M_0\in\mathbb{N}$ и всех $m\geqslant M_0$. Выберем в точке $z_0\in\partial D'$ шар $U:=B(z_0,r_0)$, где $r_0>0$ и $r_0<\delta_1/4$, где δ_1 – число из соотношений в (4.13). Заметим, что $f_m(|C_m^1|)\cap U\ne\varnothing\ne f_m(|C_m^1|)\cap(D'\setminus U)$ при достаточно больших $m\in\mathbb{N}$, поскольку $\mathrm{diam}\,f_m(|C_m^1|)\geqslant\delta_1/2$ и $z_m\in f_m(|C_m^1|)$, $z_m\to z_0$ при $m\to\infty$. Ввиду тех же соображений $f_m(|C_m^2|)\cap U\ne\varnothing\ne f_m(|C_m^2|)\cap(D'\setminus U)$. Так как $f_m(|C_m^1|)$ и $f_m(|C_m^2|)$ – континуумы, то

$$f_m(|C_m^1|)\cap\partial U\ne\varnothing,\quad f_m(|C_m^2|)\cap\partial U\ne\varnothing\,, \tag{4.14}$$

см. [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]. Для фиксированного $P>0$, пусть далее $V\subset U$ – окрестность точки z_0, соответствующая определению слабо плоской границы, т.е., такая, что для любых континуумов $E,F\subset D'$ с условием $E\cap\partial U\ne\varnothing\ne E\cap\partial V$ и $F\cap\partial U\ne\varnothing\ne F\cap\partial V$ выполнено неравенство

$$M(\Gamma(E,F,D'))>P\,. \tag{4.15}$$

Заметим, что при достаточно больших $m \in \mathbb{N}$

$$f_m(|C_m^1|) \cap \partial V \neq \varnothing, \quad f_m(|C_m^2|) \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{4.16}$$

В самом деле, $z_m \in f_m(|C_m^1|)$, $z'_m \in f_m(|C_m^2|)$, где $z_m, z'_m \to z_0 \in V$ при $m \to \infty$, поэтому $f_m(|C_m^1|) \cap V \neq \varnothing \neq f_m(|C_m^2|) \cap V$ при больших $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, $\operatorname{diam} V \leqslant \operatorname{diam} U = 2r_0 < \delta_1/2$ и, поскольку $\operatorname{diam} f_m(|C_m^1|) > \delta_1/2$ ввиду (4.13), то $f_m(|C_m^1|) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тогда $f_m(|C_m^1|) \cap \partial V \neq \varnothing$ (см. [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46]). Аналогично, $\operatorname{diam} V \leqslant \operatorname{diam} U = 2r_0 < \delta_1/2$ и, поскольку $\operatorname{diam} f_m(|C_m^2|) > \delta_1/2$ ввиду (4.13), то $f_m(|C_m^2|) \cap (D' \setminus V) \neq \varnothing$. Тогда по [16, теорема 1.I, гл. 5, § 46] имеем: $f_m(|C_m^2|) \cap \partial V \neq \varnothing$. Таким образом, (4.16) доказано.

Согласно (4.15) и учитывая (4.14) и (4.16), мы получим, что

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(f_m(|C_m^1|), f_m(|C_m^2|), D')) > P\,,$$

что противоречит неравенству (4.12). Полученное противоречие указывает на неверность изначального предположения, сделанного в (4.11). Теорема доказана. $\square$

5. Некоторые примеры

Начнём с простого примера отображений на комплексной плоскости.

Пример 5.1. Как известно, дробно-линейные автоморфизмы единичного круга $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ на себя задаются формулой $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $z \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Указанные отображения f являются 1-гомеоморфизмами; все условия теоремы 1.2 выполняются, кроме условия $\operatorname{diam} f(A) \geqslant \delta$, которое, вообще говоря, может нарушаться.

Если, например, $\theta = 0$ и $a = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $f_n(z) = \frac{z-1/n}{1-z/n} = \frac{nz-1}{n-z}$. Положим $A = [0, 1/2]$, тогда $f_n(0) = -1/n \to 0$ и $f_n(1/2) = \frac{n-2}{2n-1} \to 1/2$, $n \to \infty$. Отсюда видно, что последовательность f_n удовлетворяет условию $\operatorname{diam} f_n(A) \geqslant \delta$, например, при $\delta = 1/4$. Путём непосредственных вычислений убеждаемся в том, что $f_n^{-1}(z) = \frac{z+1/n}{1+z/n}$ и, значит, f_n^{-1} равномерно сходится к $f^{-1}(z) \equiv z$. Таким образом, последовательность $f_n^{-1}(z)$ равностепенно непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$.

Если же положить $f_n^{-1}(z) = \frac{z-(n-1)/n}{1-z(n-1)/n} = \frac{nz-n+1}{n-nz+1}$, то, как легко видеть, такая последовательность локально равномерно сходится к -1 внутри $\mathbb{D}$; в то же время, $f_n^{-1}(1) = 1$. Учитывая это, путём непосредственных вычислений, заключаем, что последовательность

f_n^{-1} не является равностепенно непрерывной в точке 1; в этом случае $f_n(z) = \frac{z+(n-1)/n}{1+z(n-1)/n}$ и условие $\mathrm{diam}\, f_n(A) \geqslant \delta$ ни при каком $\delta > 0$, не зависящем от n, не может быть выполнено ввиду теоремы 1.2.

Из сказанного следует, что *в условиях теоремы 1.2 от дополнительного требования* $\mathrm{diam}\, f(A) \geqslant \delta$, *вообще говоря, нельзя отказаться.*

Пример 5.2. Пусть $p \geqslant 1$ настолько велико, что число $n/p(n-1)$ меньше 1, и пусть, кроме того, $\alpha \in (0, n/p(n-1))$ – произвольное число. Определим последовательность отображений $f_m : \mathbb{B}^n \to B(0,2)$ шара $\mathbb{B}^n$ на шар $B(0,2)$ следующим образом:

$$f_m(x) = \left\{ \begin{array}{rl} \frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|} \cdot x\,, & 1/m \leqslant |x| \leqslant 1, \\ \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)} \cdot x\,, & 0 < |x| < 1/m\ . \end{array} \right.$$

Заметим, что f_m удовлетворяют (1.1) при $Q = \left(\frac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha|x|^{\alpha}}\right)^{n-1} \in L^1(\mathbb{B}^n)$ (см. [11, доказательство теоремы 7.1]) и что $B(0,2)$ имеет слабо плоскую границу (см. [18, лемма 4.3]). По построению отображения f_m фиксируют бесконечное число точек единичного шара при всех $m \geqslant 2$.

Установим равностепенную непрерывность отображений $g_m := f_m^{-1}$ в $\overline{B(0,2)}$ (для удобства используем обозначение g_m также для непрерывного продолжения g_m в $\overline{B(0,2)}$). Нетрудно убедиться, что

$$g_m(y) := f_m^{-1}(y) = \left\{ \begin{array}{rl} \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}\,, & 1+1/m^{\alpha} \leqslant |y| < 2, \\ \frac{(1/m)}{1+(1/m)^{\alpha}} \cdot y\,, & 0 < |y| < 1+1/m^{\alpha}\ . \end{array} \right.$$

Отображения g_m отображают $B(0,2)$ на $\mathbb{B}^n$. Зафиксируем $y_0 \in \overline{B(0,2)}$. Возможны следующие три ситуации:

1) $|y_0| < 1$. Выберем $\delta_0 = \delta_0(y_0)$ так, что $\overline{B(y_0,\delta_0)} \subset B(0,1)$. Для числа $\varepsilon > 0$ положим $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0) := \min\{\delta_0, \varepsilon\}$. В таком случае, при $y \in \overline{B(y_0,\delta_1)}$ и всех $m = 1,2,\ldots$ мы имеем, что $|g_m(y) - g_m(y_0)| = \frac{(1/m)}{1+(1/m)^{\alpha}}|y-y_0| < |y-y_0| < \varepsilon$, что доказывает равностепенную непрерывность семейства g_m в точке y_0.

2) $|y_0| > 1$. По определению отображений g_m найдётся $m_0 = m_0(y_0) \in \mathbb{N}$ и $\delta_0 = \delta_0(y_0) > 0$ такие, что $g_m(y) = \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}$ при всех $\overline{B(y_0,\delta_0)} \cap \overline{B(0,2)}$ и всех $m \geqslant m_0$. Берём $\varepsilon > 0$. Положив $g(y) = \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}$, заметим, что $|g_m(y) - g_m(y_0)| = |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

при $m \geqslant m_0$ и некотором $\overline{\delta} = \overline{\delta}(\varepsilon, y_0)$, $\overline{\delta} < \delta_0$, поскольку отображение $g(y) = \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}$ непрерывно в $\overline{B(0,2)}$.

3) Рассмотрим, наконец, «пограничный» случай $y_0 \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$. Пусть $\delta_0 = \delta_0(y_0)$ таково, что $\overline{B(y_0, \delta_0)} \subset B(0,2)$. По определению, имеем $g_m(y_0) = \frac{(1/m)}{1+(1/m)^\alpha} \cdot y_0$, $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что

$$|g_m(y) - g_m(y_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\left|\frac{(1/m)}{1+(1/m)^\alpha} \cdot y_0 - \frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}\right|, \frac{(1/m)}{1+(1/m)^\alpha}|y-y_0|\right\}.$$

Для числа $\varepsilon > 0$ найдём номер $m_1 = m_1(\varepsilon) > 0$, такой что $1/m < \varepsilon/2$. Положим $\overline{\delta_0} = \overline{\delta_0}(\varepsilon, y_0) = \min\{1, \varepsilon/2, \delta_0\}$. Используя неравенство треугольника и то, что $1/\alpha > 1$, получим: $\left|\frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha} - \frac{(1/m)}{1+(1/m)^\alpha} \cdot y_0\right| \leqslant (|y|-1)^{1/\alpha} + 1/m < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ при $m > m_1$ и $|y - y_0| < \overline{\delta_0}$. Последнее соотношение при $1 \leqslant m \leqslant m_1$ также выполнено при $|y - y_0| < \delta_m$ и некотором $\delta_m = \delta_m(\varepsilon, y_0) > 0$ ввиду непрерывности отображений g_m. Очевидно, также $\frac{(1/m)}{1+(1/m)^\alpha}|y - y_0| < \varepsilon$ при $|y - y_0| < \overline{\delta_0}$ и всех $m = 1, 2, \ldots$. Окончательно, имеем: $|g_m(y) - g_m(y_0)| < \varepsilon$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и $y \in B(y_0, \delta)$, где $\delta := \{\overline{\delta}_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m_1}\}$. Равностепенная непрерывность g_m в $\overline{B(0,2)}$ установлена.

Следует отметить, что семейство $\mathfrak{G} = \{g_m\}_{m=1}^\infty$ равностепенно непрерывно в $B(0,2)$, в то время как таковым не является "обратное" к нему семейство $\mathfrak{F} = \{f_m\}_{m=1}^\infty$ (в самом деле, $|f_m(x_m) - f(0)| = 1 + 1/m \not\to 0$ при $m \to \infty$, где $|x_m| = 1/m$).

Семейство $\mathfrak{G}$ содержит в себе бесконечное число отображений $g_{m_k} := f_{m_k}^{-1}$, $f_{m_k} \in \mathfrak{F}$, не удовлетворяющих соотношению (1.1). В самом деле, в противном случае согласно теореме 1.1 "обратное" к $\mathfrak{G}$ семейство $\mathfrak{F}$ было бы равностепенно непрерывным в $\mathbb{B}^n$.

Работа опубликована в виде электронного препринта в [19].

Литература

[1] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. **229**, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.

[2] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Distortion and singularities of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **465** (1970), 1–13.

[3] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Finite mean oscillation and the Beltrami equation* // Israel Math. J., **153** (2006), 247–266.

[4] R. Näkki, B. Palka, *Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings* // Proc. Amer. Math. Soc., **37** (1973), No. 2, 427–433.

[5] R. Näkki, B. Palka, *Boundary regularity and the uniform convergence of quasiconlormal mappings* // Comment. Math. Helvetici, **54** (1979), 458–476.

[6] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends* // Journal of Mathematical Sciences, **210** (2015), No. 1, 22–51.

[7] V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, V. I. Ryazanov, M. Vuorinen, *On convergence theorems for space qusiregular mappings* // Forum Math., **10** (1998), 353–375.

[8] V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, V. I. Ryazanov, M. Vuorinen, *On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings* // Studia Math., **128** (1998), No. 3, 243–271.

[9] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **30** (2005), No. 1, 49–69.

[10] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[11] Е. А. Севостьянов, *О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой* // Математические труды, **15** (2012), No. 1, 178–204; transl. *Equicontinuity of homeomorphisms with unbounded characteristic* // Siberian Advances in Mathematics, **23** (2013), No. 2, 106–122.

[12] Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов, *О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями* // Укр. мат. журн., **70** (2018), No. 7, 952–967.

[13] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York, Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

[14] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

[15] Л. В. Келдыш, *Топологические вложения в евклидово пространство* // Тр. МИАН СССР, **81** (1966), 3–184.

[16] К. Куратовский, *Топология*, Т. 2, М., Мир, 1969.

[17] J. Herron, P. Koskela, *Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains* // Compl. Var. Theor. Appl., **15** (1990), 167–179.

[18] M. Vuorinen, *On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings* // Ark. Mat., **18**, 157–180.

[19] E. Sevost'yanov, S. Skvortsov, *On behavior of homeomorphisms with inverse modulus conditions* // www.arxiv.org, arXiv:1801.01808, 1–14.

Сведения об авторах

Евгений Александрович Севостьянов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко
Житомир, Украина,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: esevostyanov2009@gmail.com

Сергей Александрович Скворцов
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко
Житомир, Украина,
E-Mail: serezha.skv@gmail.com