Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 1, 65 – 79

Логарифмическая асимптотика одного класса отображений

Руслан Р. Салимов

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Аннотация. В работе исследуется асимптотическое поведение в точке нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Получен целый ряд логарифмических оценок для нижних пределов при различных условиях на функцию Q.

В работе приведены приложения этих результатов к классам Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$. Построен пример гомеоморфизма с конечным искажением, показывающий точность найденного порядка роста.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. p-модуль семейств кривых и поверхностей, p-ёмкость конденсатора, нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля, отображения с конечным искажением, класс Соболева, класс Орлича–Соболева.

1. Введение

Модули семейств кривых и поверхностей являются основным инструментом для исследования в геометрической теории функций. Развитие метода модулей, происходившее в последнее время, тесно связано с современными классами отображений, см., напр., монографию [1], и уравнениями в частных производных, см., напр., монографии [2] и [3].

Напомним некоторые определения. Следуя [1, разд. 9.2, гл. 9], *k-мерной поверхностью S* в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω – открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} :=$

Статья поступила в редакцию 22.01.2018

$\mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega : \ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n .$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см., [1, разд. 9.2].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ее *интеграл по поверхности* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho \, d\mathcal{A}_k := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) \, N(S, y) \, dH^k y .$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k \, d\mathcal{A}_k \geqslant 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1, \infty)$ – заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) \, dm(x) .$$

Будем говорить, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п.в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

Говорят, см. [1, разд. 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является *обобщённо p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x) \, d\mathcal{A}_{n-1} \geqslant 1$$

для p-почти всех $S \in \Gamma$.

Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля* *в точке* x_0, если

$$M_p\left(f\Sigma_{\mathbb{A}}\right) \geqslant \inf_{\rho\in \mathrm{ext_p\,adm}\,\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\ dm(x)$$

для каждого кольца

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\right\}, 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

где $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, а $\Sigma_{\mathbb{A}}$ обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\ , \qquad r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\,.$$

Теория нижних Q-гомеоморфизмов применима к отображениям с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при наличии условия Кальдерона и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n - 1$, см. [4–7].

В данной работе мы исследуем нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля на логарифмический порядок роста. Полученные результаты обобщают известную лемму типа Икомы–Шварца, см. теорему 2 в [8]. В работе [9] нижние Q-гомеоморфизмы исследовались на степенной порядок роста.

2. О емкости конденсатора

Следуя работе [10], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором.* Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если G – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Всюду далее полагаем $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u : A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{2.1}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E} = \mathrm{cap_p}\,(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{2.2}$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$.

Известно, что при $1 < p < n$

$$\mathrm{cap_p}\,\mathcal{E} \geqslant n\Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}\ , \tag{2.3}$$

где Ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см., напр., [11, неравенство (8.9)].

3. Логарифмическая асимптотика нижних Q-гомеоморфизмов

Предположим, что D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Пусть $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Далее полагаем

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \tag{3.1}$$

и при $x_0 = 0$

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int\limits_{S_r} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}_{n-1}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}, \tag{3.2}$$

где $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$.

Всюду далее полагаем

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}\ , \quad B_r := B(0, r)\,, \quad \mathbb{B}^n := B(0, 1)\,.$$

Следующее утверждение можно найти в работе [12], см. лемму 3.4.

Предложение 3.1. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и $f : D \to D'$ – нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$. Тогда имеет место оценка*

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} \left(fB(x_0, \varepsilon_2), f\overline{B(x_0, \varepsilon_1)}\right) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\ \eta^{\frac{p}{p-n+1}}(|x - x_0|)\ dm(x) \quad (3.3)$$

для каждого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$ и любой измеримой по Лебегу функции $\eta : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to [0, \infty]$, такой что

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \eta(r) dr = 1. \quad (3.4)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и $p > n-1$. Предположим, что $Q : \mathbb{B}^n \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ – нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля. Если для некоторых чисел $\kappa \in \left[0, \frac{p}{p-n+1}\right]$, $C_0 \in (0, \infty)$ и выполнено условие*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_0 \ln^{\kappa} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad (3.5)$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, то

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} \left(fB_{\varepsilon_2}, \overline{fB}_{\varepsilon_1}\right) \leqslant C_0 \ln^{\epsilon} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad (3.6)$$

где $\epsilon = \frac{\kappa(p-n+1)-p}{p-n+1}$.

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \varepsilon_1 < |x| < \varepsilon_2\}$, с произвольными ε_1 и ε_2 такими, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0 < 1$. Поскольку $\mathcal{E} = \left(B_{\varepsilon_2}, \overline{B}_{\varepsilon_1}\right)$ – конденсатор в $\mathbb{B}^n$ и f –

гомеоморфизм, то $f\mathcal{E} = \left(fB_{\varepsilon_2}, \overline{fB}_{\varepsilon_1}\right)$ тоже является конденсатором. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)} & \text{если } t \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ 0, & \text{если } t \notin (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{cases}$$

удовлетворяет условию (3.4). Тогда в силу предложения 3.1 имеем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E} \leqslant \ln^{-\frac{p}{p-n+1}}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}}. \qquad (3.7)$$

Из условия (3.5) вытекает оценка (3.6). □

Ниже приведена основная теорема об оценке нижнего предела.

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и $p > n$. Предположим, что $Q : \mathbb{B}^n \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ – нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, удовлетворяющий условию $f(0) = 0$. Если для некоторых чисел $\kappa \in \left[0, \frac{p}{p-n+1}\right]$, $C_0 \in (0, \infty)$ и выполнено условие*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_0 \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \qquad (3.8)$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, то

$$\liminf_{x \to 0} |f(x)| \ln^{\theta}\left(\frac{1}{|x|}\right) \leqslant \nu_0\, C_0^{\gamma}, \qquad (3.9)$$

где $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E}_\varepsilon = \left(B_{\sqrt{\varepsilon}}, \overline{B}_\varepsilon\right)$. В силу леммы 3.1, имеем оценку:

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E}_\varepsilon \leqslant \nu_1\, C_0 \ln^{\frac{\kappa(p-n+1)-p}{p-n+1}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad (3.10)$$

где ν_1 – положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Используя соотношение (2.3), получаем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant \nu_2 \left[m(\overline{fB}_\varepsilon)\right]^{\frac{(p-n)(n-1)}{n(p-n+1)}}, \tag{3.11}$$

где ν_2 – константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (3.10) и (3.11), заключаем, что

$$m(\overline{fB}_\varepsilon) \leqslant \nu_3\, C_0^{\frac{n(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}} \ln^{-\frac{n(p-\kappa(p-n+1))}{(n-1)(p-n)}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{3.12}$$

где ν_3 – положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Учитывая, что $f(0)=0$, получаем

$$\Omega_n \left(\min_{|x|=\varepsilon} |f(x)|\right)^n \leqslant m(fB_\varepsilon) \tag{3.13}$$

и, следовательно,

$$\min_{|x|=\varepsilon} |f(x)| \leqslant \sqrt[n]{\frac{m(fB_\varepsilon)}{\Omega_n}}\,. \tag{3.14}$$

Таким образом, учитывая неравенства (3.14) и (3.12), имеем

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \ln^\theta \left(\frac{1}{|x|}\right) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \min_{|x|=\varepsilon} |f(x)| \ln^\theta \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{m(fB_\varepsilon)}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \ln^\theta \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant \nu_0\, C_0^\gamma\,,$$

где $\theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$, $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ. □

Приведем некоторые следствия из теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и $p > n$. Предположим, что $Q \in L_{\frac{n}{p-n}}(B_0), B_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r_0\}$, $r_0 \in (0,1)$ и $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ – нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, удовлетворяющий условию $f(0)=0$. Тогда*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)|\, \ln^{\frac{p}{n(p-n)}} \left(\frac{1}{|x|}\right) \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\frac{n}{p-n}}^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.15}$$

где $\|Q\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{B_0} Q^{\frac{n}{p-n}}(x)\, dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}}$ *– норма в пространстве $L_{\frac{n}{p-n}}(B_0)$ и ν_0 – положительная постоянная, зависящая только от n и p.*

Доказательство. Действительно, применяя неравенство Гельдера с показателями $q=\frac{n(p-n+1)}{(p-n)(n-1)}$ и $q'=\frac{n(p-n+1)}{p}$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}}\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{A}}Q^{\frac{q(n-1)}{p-n+1}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{dm(x)}{|x|^{\frac{q'p}{p-n+1}}}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

где $\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}}$$
$$\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{B}^n}Q^{\frac{n}{p-n}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{(p-n)(n-1)}{n(p-n+1)}}\left(\omega_{n-1}\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)^{\frac{p}{n(p-n+1)}}.$$

Применяя теорему 3.1 с параметрами $\kappa=\frac{p}{n(p-n+1)}$ и $C_0=\omega_{n-1}^{\frac{p}{n(p-n+1)}}\|Q\|_{\frac{n}{p-n}}^{\frac{n-1}{p-n+1}}$, получаем оценку (3.15). □

Следствие 3.2. *Пусть $n\geqslant 2$ и $p>n$. Предположим, что $Q:\mathbb{B}^n\to(0,\infty)$ – измеримая по Лебегу и $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ – нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, удовлетворяющий условию $f(0)=0$. Если для некоторого числа $Q_0>0$ выполнено условие*

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)\leqslant Q_0\,r \tag{3.16}$$

для п.в. $r\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in(0,1)$, то

$$\liminf_{x\to 0}|f(x)|\,\ln^{\frac{1}{p-n}}\left(\frac{1}{|x|}\right)\leqslant\nu_0\,Q_0^{\frac{1}{p-n}}, \tag{3.17}$$

где ν_0 – положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}=\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_0$. Используя условие (3.16) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{A}}\frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{|x|^{\frac{p}{p-n+1}}}=\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}r^{-\frac{p}{p-n+1}}\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)\,dr\leqslant Q_0^{\frac{n-1}{p-n+1}}\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

Применяя теорему 3.1 с параметрами $\kappa=1$ и $C_0=Q_0^{\frac{n-1}{p-n+1}}$, получаем оценку (3.17). □

4. Приложения к классам Орлича–Соболева.

В этом разделе установлены логарифмические оценки нижних пределов для отображений класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ.

Напомним некоторые определения. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J_f(x) \tag{4.1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ – её операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и $J_f(x) = \det f'(x)$ – якобиан отображения f.

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [13], см. также [14].

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L^φ пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$, таких что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty \tag{4.2}$$

при некотором $\lambda > 0$, см., напр., [15]. Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^φ называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщёнными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc} \subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т.е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D, см. [16], разд. 1.1.3.

Далее, если f – локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty\,, \tag{4.3}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0)=0$.

Пусть $p>n-1$, $\alpha=\frac{p}{p-n+1}$. Ранее, см., например, [4, 5, 7] в теоремах о локальном поведении классов Соболева и Орлича–Соболева мы пользовались *p-внешней дилатацией*

$$K_{O,p}(x,f)=\begin{cases}\frac{\|f'(x)\|^p}{|J_f(x)|}, & \text{если } J_f(x)\neq 0\\ 1, & \text{если } f'(x)=0\\ \infty, & \text{в остальных точках}\,.\end{cases} \tag{4.4}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться *α-внутренней дилатации*

$$K_{I,\alpha}(x,f)=\begin{cases}\frac{|J_f(x)|}{l^{\alpha}(f'(x))}, & \text{если } |J_f(x)|\neq 0\\ 1, & \text{если } f'(x)=0\\ \infty, & \text{в остальных точках}\,,\end{cases} \tag{4.5}$$

где $l(f'(x))=\min\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$.

Известно, что

$$K_{I,n}(x,f)\leqslant K^{n-1}_{O,n}(x,f)\ , \tag{4.6}$$

см., напр., раздел 1.2.1 в [17].

Из соотношения (4.6) легко следует неравенство

$$K_{I,\alpha}(x,f)\leqslant K^{\alpha-1}_{O,p}(x,f)\ . \tag{4.7}$$

Действительно,

$$K_{I,\alpha}(x,f)=K^{\frac{\alpha}{n}}_{I,n}(x,f)\,|J_f(x)|^{1-\frac{\alpha}{n}}\leqslant K^{\frac{\alpha(n-1)}{n}}_{O,n}(x,f)\,|J_f(x)|^{1-\frac{\alpha}{n}}$$
$$=K^{\alpha-1}_{O,p}(x,f)\,. \tag{4.8}$$

Известно, что $K_{I,2}=K_{O,2}$ при $n=2$, но при $n\geqslant 3$ в (4.6) может иметь место строгое неравенство, как это показывает элементарный пример сжатия вдоль одной из осей.

Следующее утверждение см. в [6], теорема 1.

Предложение 4.1. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $p > n-1$ и $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, такая что для некоторого $t_* \in (0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \,. \tag{4.9}$$

Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $Q = K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.

Следствие 4.1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}$ при $q > n-1$ является нижним $K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.*

Следующий ряд результатов вытекает из предложения 4.1 и соответствующих теорем пункта 3.

Теорема 4.1. *Пусть $n \geqslant 3$, $p > n$ и $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Предположим, что $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (4.9) и $f(0) = 0$. Если $\int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\, d\mathcal{A}_{n-1} \neq \infty$ для п.в. $r \in (0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и для некоторых чисел $\kappa \in \left[0, \frac{p}{p-n+1}\right]$, $C_0 \in (0,\infty)$ выполнено условие*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{K_{I,\alpha}(x,f)}{|x|^{\alpha}}\, dm(x) \leqslant C_0 \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \tag{4.10}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$. Тогда

$$\liminf_{x\to 0}\, |f(x)| \ln^{\theta}\left(\frac{1}{|x|}\right) \leqslant \nu_0\, C_0^{\gamma}\ , \tag{4.11}$$

где

$$\gamma = \frac{p-n+1}{(p-n)(n-1)}, \quad \theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$$

и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Следствие 4.2. *Пусть $n \geqslant 3$ и $p > n$. Предположим, что $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (4.9) и $f(0) = 0$. Если $K_{I,\alpha}(x, f) \in L_q(B_0)$, $B_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r_0\}$, $r_0 \in (0, 1)$*

$$\alpha = \frac{p}{p-n+1}\,, \qquad q = \frac{n(p-n+1)}{(p-n)(n-1)}\,,$$

то

$$\liminf_{x\to 0}\ |f(x)| \ln^{\frac{p}{n(p-n)}}\left(\frac{1}{|x|}\right) \leqslant \nu_0 \|K_{I,\alpha}(f)\|^{\frac{1}{p-n}}_{\frac{n}{p-n}}\,, \qquad (4.12)$$

где $\|K^{\frac{1}{\alpha-1}}_{I,\alpha}(f)\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{B_0} K^q_{I,\alpha}(x, f)\, dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}}$ *– норма в пространстве $L_{\frac{n}{p-n}}(B_0)$ и ν_0 – положительная постоянная, зависящая только от n и p.*

Следствие 4.3. *Пусть $n \geqslant 3$ и $p > n$. Предположим, что $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (4.9) и $f(0) = 0$. Если для некоторого конечного числа $k_0 > 0$ выполнено условие*

$$\int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x, f)\, d\mathcal{A}_{n-1} \leqslant (k_0 r)^{\beta}\ ,\ \ \alpha = \frac{p}{p-n+1}, \quad \beta = \frac{n-1}{p-n+1} \qquad (4.13)$$

для п.в. $r \in (0, r_0)$, $r_0 \in (0, 1)$, то

$$\liminf_{x\to 0}\ |f(x)| \ln^{\frac{1}{p-n}}\left(\frac{1}{|x|}\right) \leqslant \nu_0 \cdot k_0^{\frac{1}{p-n}}\ , \qquad (4.14)$$

где ν_0 – положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Следствие 4.4. *Все результаты имеют место для гомеоморфизмов с конечным искажением класса Соболева $W^{1,s}_{\rm loc}$, $s > n-1$.*

Приведем пример гомеоморфизма с конечным искажением, который покажет, что порядок роста в оценке (4.14) является точным.

Пример. Предположим, что $p > n$. Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\left(1 + (p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-\frac{1}{p-n}}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Отметим, что f является гомеоморфизмом класса C^1 в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, откуда следует, что, в частности $f \in W^{1,n-\frac{1}{2}}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$. Определим касательные и радиальные растяжения в каждой точке воспользовавшись, правилами вычисления (1.1.20) и (1.1.23) см. [18], гл. I, предложение 1.1.1. Таким образом, имеем

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\left(1 + (p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-\frac{1}{p-n}}}{|x|}$$

и

$$\delta_r = \frac{\partial |f(x)|}{\partial |x|} = \frac{\left(1 + (p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-\frac{p-n+1}{p-n}}}{|x|}.$$

Заметим, что $\delta_T \geqslant \delta_r$ и $\delta_T = \delta_r \left(1 + (p-n)\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$.

Покажем, что $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathbb{B}^n)$ с $\varphi(t) = t^{n-\frac{1}{2}}$. Действительно,

$$\int\limits_{\overline{B}_r} \|f'(x)\|^{n-\frac{1}{2}}\, dm(x) = \int\limits_{\overline{B}_r} \left(\frac{|f(x)|}{|x|}\right)^{n-\frac{1}{2}} dm(x) \leqslant M_r \int\limits_{\overline{B}_r} \frac{1}{|x|^{n-\frac{1}{2}}}\, dm(x)$$

$$= \omega_{n-1} M_r \int\limits_0^r t^{-\frac{1}{2}}\, dt = 2\omega_{n-1} M_r\, r^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

где $\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$, $M_r = \max\limits_{\overline{B}_r} |f(x)|$ и ω_{n-1} – площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Ввиду сферической симметрии мы видим, что

$$K_{I,\alpha}(x,f) = \frac{\delta_T^{n-1}\delta_r}{\delta_r^{\frac{p}{p-n+1}}} = \frac{\delta_T^{n-1}}{\delta_r^{\frac{n-1}{p-n+1}}} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{(n-1)(p-n)}{p-n+1}}, \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\int\limits_{S_r} K_{I,\alpha}(x,f)\, d\mathcal{A}_{n-1} = \int\limits_{S_r} |x|^{-\frac{(n-1)(p-n)}{p-n+1}}\, d\mathcal{A}_{n-1} = \omega_{n-1}\, r^{\frac{n-1}{p-n+1}}.$$

Таким образом, отображение f удовлетворяет всем условиям следствия 4.3.

С другой стороны легко видеть, что

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \ln^{\frac{1}{p-n}}\left(\frac{1}{|x|}\right) = (p-n)^{-\frac{1}{p-n}} < \infty\,. \qquad (4.15)$$

Литература

[1] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York, Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

[2] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov, *Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane*, EMS Tracts in Mathematics, **19**, EMS Publishing House, Zürich, 2013.

[3] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments in Mathematics, **26**, New York etc., Springer, 2012.

[4] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории классов Орлича–Соболева* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 6, 50–102.

[5] Р. Р. Салимов, *Метрические свойства классов Орлича–Соболева* // Укр. мат. вісник, **13** (2016), No. 1, 129–141.

[6] Р. Р. Салимов, *О новом условии конечной липшицевости классов Орлича–Соболева* // Мат. Студії, **44** (2015), No. 1, 27–35.

[7] Р. Р. Салимов, *Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева* // Алгебра и анализ, **26**(2014), No. 6, 143–171.

[8] K. Ikoma, *On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space* // Nagoya Math. J., **25** (1965), 175–203.

[9] Р. Р. Салимов, *О степенном порядке роста нижних Q-гомеоморфизмов* // Владикавк. мат. журн., **19** (2017), No. 2, 36–48.

[10] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **448** (1969), 1–40.

[11] V. Maz'ya, *Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev space* // Contemp. Math., **338** (2003), 307–340.

[12] Р. Р. Салимов, *Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля* // Укр. мат. вісник, **12** (2015), No. 4, 484–510.

[13] T. Iwaniec, V. Sverák, *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc., **118** (1993), 181–188.

[14] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 2001.

[15] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1958.

[16] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Ленинград, Издательство ленинградского университета, 1985.

[17] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск, Наука, 1982.

[18] Е. А. Севостьянов, *Исследование пространственных отображений геометрическим методом*, Киев, Наукова думка, 2014.

Сведения об авторах

Руслан Радикович Салимов

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: `ruslan623@yandex.ru`