Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 1, 43 – 56

Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$

Михайло В. Гембарський, Світлана Б. Гембарська

(*Представлена В. П. Моторним*)

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки колмогоровських, лінійних та тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$, норма в якому є більш сильною, ніж L_1-норма.

2010 MSC. 42B99.

Ключові слова та фрази. Колмогоровський поперечник, лінійний поперечник, тригонометричний поперечник, східчастий гіперболічний хрест, найкраще наближення.

1. Вступ.

У роботі встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських, лінійних та тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$, норма в якому є більш сильною ніж L_1 - норма. Мотивацією до дослідження згаданих апроксимативних характеристик була та обставина, що їх порядки у просторі L_1, за винятком окремих випадків, залишаються досі невідомими. Більш детально про це мова буде йти в коментарях до одержаних результатів, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, d – вимірний простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ – скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$. Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$ позначимо простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x)$, для яких

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \;\; 1 \le p < \infty,$$

Стаття надійшла в редакцію 24.02.2018

$$||f||_\infty = ess \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| < \infty.$$

Надалі будемо вважати, що для $f \in L_p(\pi_d)$ виконана умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0,\ j = \overline{1,d},$$

і множину таких функцій позначимо $L^o_p(\pi_d)$. Крім цього для зручності замість $L_p(\pi_d)$ будемо вживати позначення L_p і відповідно L^o_p замість $L^o_p(\pi_d)$.

Означимо l – ту різницю функції $f \in L^o_p$, $1 \le p \le \infty$, з кроком h_j за змінною x_j згідно з формулою

$$\triangle^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n}\, C^n_l f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Для $f \in L^o_p$, $1 \le p \le \infty$ і $h = (h_1, \ldots, h_d)$ введемо мішану l — ту різницю

$$\triangle^l_h f(x) = \triangle^l_{h_d} \ldots \triangle^l_{h_1} f(x) = \triangle^l_{h_d}(\ldots(\triangle^l_{h_1} f(x)))$$

і означимо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j|\le t_j\\ j=\overline{1,d}}} \|\triangle^l_h f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Це означає, що функція $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$ і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1t_1, \ldots, m_dt_d) \le \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$.

Наслідуючи С. Н. Бернштейна [1], будемо називати функцію однієї змінної $\varphi(\tau)$ майже зростаючою (майже спадною) на $[a,b]$, якщо існує стала $C_1 > 0, (C_2 > 0)$, яка не залежить від τ_1, τ_2, така, що

$$\varphi(\tau_1) \le C_1\, \varphi(\tau_2),\ a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b,$$

у випадку майже зростання, і відповідно

$$\varphi(\tau_1) \geq C_2\, \varphi(\tau_2),\ a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b,$$

у випадку майже спадання.

Будемо вважати, що функція $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^d$ задовольняє також умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [2, 3]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$, $\tau \in [0,1]$, задовольняє умову (S^α), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$.

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$, $\tau \in [0,1]$, задовольняє умову (S_l), якщо $\frac{\varphi(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, $l \in \mathbb{N}$. У випадку $d > 1$ будемо говорити, що $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^d$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Тепер дамо означення функціональних класів $B_{p,\theta}^\Omega$, які було розглянуто Sun Yongsheng, Wang Heping [4].

Нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і функція $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1) – 4), (S^α) і (S_l). Тоді клас $B_{p,\theta}^\Omega$ визначається таким чином

$$B_{p,\theta}^\Omega = \{f \in L_p^o :\ \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}},\ 1 \leq \theta \leq \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)}{\Omega(t)}.$$

Зауважимо, що в тому випадку, коли $r = (r_1, \dots, r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$ і $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^d t_j^{r_j}$ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з аналогами класів Бєсова $B_{p,\theta}^r$, які розглядалися у роботах [5, 6]. Крім того, при $\theta = \infty$ класи $B_{p,\infty}^r = H_p^r$ є аналогами класів Нікольського [7]. Класи $B_{p,\infty}^\Omega = H_p^\Omega$ розглядалися у роботі М. М. Пустовойтова [8].

В подальших міркуваннях нам буде зручно користуватися означенням класів $B_{p,\theta}^\Omega$ в дещо іншому вигляді. Для цього нагадаємо поняття порядкового співвідношення.

Для двох невід'ємних послідовностей $(a_n)_{n=1}^\infty$ і $(b_n)_{n=1}^\infty$ співвідношення (порядкова нерівність) $a_n \ll b_n$ означає, що існує стала $C_3 > 0$, яка не залежить від n і така, що $a_n \leq C_3\, b_n$. Співвідношення $a_n \asymp b_n$ рівносильне тому, що $a_n \ll b_n$ і $b_n \ll a_n$.

Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину вигляду
$$\rho(s) = \{k \in \mathbb{Z}^d \, : 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \; j = \overline{1,d}\}$$
і для $f \in L_p^o$, $1 < p < \infty$, покладемо
$$\delta_s(f) := \delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$
де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Отже, для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, де $\Omega(t)$ задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1) – 4), (S^{α}) і (S_l) справедливі співвідношення
$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{1}$$
тут і далі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що випадок $1 \le \theta < \infty$ в (1) було розглянуто у роботі [4], а $\theta = \infty$ – у роботі [8].

Для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати зображення аналогічні (1) у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому "блоки" $\delta_s(f)$.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена
$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном
$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \; x \in \mathbb{R}^d$$
і для $f \in L_p^o$, $1 \le p \le \infty$, покладемо
$$A_s(f) := A_s(f,x) = (f * A_s)(x),$$
де "*" — операція згортки.

Тоді справедливі співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(f)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Зазначимо, що в (2) випадок $1 \le \theta < \infty$ було розглянуто у роботі [9], а випадок $\theta = \infty$ – у роботі [8].

В подальших дослідженнях ми будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду, а саме

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \tag{3}$$

де $\omega(\tau)$ – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l). Зрозуміло, що для $\Omega(t)$ вигляду (3) виконуються властивості 1) – 4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S^{α}), (S_l) і тому справедливими є наведені вище зображення (1), (2) для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Тепер перейдемо до означення апроксимативних характеристик, які будемо досліджувати.

Нехай W – центрально-симетрична множина в нормованому просторі $\mathscr{X}$. Тоді величина

$$d_M(W, \mathscr{X}) = \inf_{L_M} \sup_{w\in W} \inf_{u\in L_M} \|w - u\|_{\mathscr{X}},$$

де $L_M \subset \mathscr{X}$ — підпростір розмірності M, називається колмогоровським поперечником. Поперечник $d_M(W, \mathscr{X})$ введений в 1936 р. А. М. Колмогоровим [10].

Лінійним поперечником множини W у просторі $\mathscr{X}$ називається величина

$$\lambda_M(W, \mathscr{X}) = \inf_{A} \sup_{w\in W} \|w - Aw\|_{\mathscr{X}},$$

де інфімум береться по всіх діючих в $\mathscr{X}$ лінійних операторах A, розмірність області значень яких не перевищує M. Поперечник $\lambda_M(W, \mathscr{X})$ введений в 1960 р. В. М. Тихомировим [11].

Нехай $F \subset L_q$, $1 \le q \le \infty$ – деякий функціональний клас і

$$t(\Theta_M) := t(\Theta_M, x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)},$$

де $\Theta_M = \{k^1, \dots, k^M\}$ – всеможливі набори векторів $k^j = (k^j_1, \dots, k^j_d) \in \mathbb{Z}^d$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, M}$.

Тоді величина

$$d^{\top}_M(F, L_q) = \inf_{\Theta_M} \sup_{f \in F} \inf_{t(\Theta_M)} \|f - t(\Theta_M)\|_q$$

називається тригонометричним поперечником класу F у просторі L_q. Поперечник $d^{\top}_M(F, L_q)$ був введений в 1974 р. Р. С. Ісмагіловим [12].

Легко бачити, що для означених апроксимативних характеристик справедливі співвідношення:

$$d_M(W, \mathscr{X}) \le \lambda_M(W, \mathscr{X}),$$

$$d_M(F, L_q) \le d^{\top}_M(F, L_q). \tag{4}$$

Зауважимо, що друге співвідношення в (4) справедливе і в тому випадку, коли замість простору L_q розглядається простір $B_{1,1}$.

Зазначимо також, що колмогоровські, лінійні та тригонометричні поперечники класів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах Лебега вивчались у роботах [13–20]. Що стосується дослідження цих характеристик на інших класах функцій багатьох змінних, то з детальною бібліографією можна ознайомитися в монографіях [21, 22], а також оглядовій статті [23].

В значно меншій мірі досліджені згадані вище поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_1, точніше відомі тільки окремі результати для лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1)$ [24]. В зв'язку з цим природно постає питання про поведінку цих величин у просторі $B_{1,1}$, норма в якому визначається згідно з формулою

$$\|f\|_{B_{1,1}} = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|A_s(f)\|_1$$

і вона є більш сильною ніж L_1-норма, тобто

$$\|f\|_1 \le \|f\|_{B_{1,1}}.$$

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді для будь-якої* *послідовності* $M=(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n\, n^{d-1}$ *справедливі порядкові оцінки*

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp \lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp d^{\top}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n})\, n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{5}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (5) оцінки зверху, зауваживши при цьому, що оскільки $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{1,\theta}$, $1<p\le\infty$, то їх достатньо одержати для класів $B^{\Omega}_{1,\theta}$. Таким чином для заданого M підберемо $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2d$ із співвідношення $M\asymp 2^n\, n^{d-1}$ і розглянемо наближення функцій $f\in B^{\Omega}_{1,\theta}$ поліномами вигляду

$$t_n=\sum_{(s,1)<n} A_s(f). \tag{6}$$

Нехай $\theta\in[\,1,\infty\,)$. Тоді згідно з означенням норми (2) можемо записати

$$\|f-t_n\|_{B_{1,1}}=\|\sum_{(s,1)\ge n} A_s(f)\|_{B_{1,1}}=\sum_{s\in\mathbb{N}^d}\|A_s*\sum_{(s,1)\ge n} A_s(f)\|_1$$

$$\le \sum_{(s,1)\ge n-d}\|A_s*\sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} A_{s'}(f)\|_1 \le \sum_{(s,1)\ge n-d}\|A_s\|_1\|\sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} A_{s'}(f)\|_1$$

$$\ll \sum_{(s,1)\ge n-d}\ \sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1}\|A_{s'}(f)\|_1 \ll \sum_{(s,1)\ge n-2d}\|A_s(f)\|_1$$

$$=\sum_{(s,1)\ge n-2d}\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|A_s(f)\|_1\omega(2^{-(s,1)})=J_1. \tag{7}$$

Далі, застосувавши нерівність Гельдера з показником θ (з відповідною модифікацією при $\theta=1$), будемо мати

$$J_1\le\left(\sum_{(s,1)\ge n-2d}\omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\,\|A_s(f)\|_1^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{(s,1)\ge n-2d}\omega^{\theta'}(2^{-(s,1)})\right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$\le\|f\|_{B^{\Omega}_{1,\theta}}\left(\sum_{(s,1)\ge n-2d}\omega^{\theta'}(2^{-(s,1)})\right)^{\frac{1}{\theta'}}\le\left(\sum_{(s,1)\ge n-2d}\omega^{\theta'}(2^{-(s,1)})\right)^{\frac{1}{\theta'}}=J_2. \tag{8}$$

Покладемо $n-2d=m$. Тоді легко бачити, що $2^m m^{d-1}\asymp 2^n n^{d-1}\asymp M$. Таким чином, з врахуванням того, що

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}}\le C_4\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}},\ (s,1)\ge m \tag{9}$$

продовжимо оцінку величини J_2:

$$J_2 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{(s,1)\geq m} 2^{-(s,1)\alpha\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j\geq m} 2^{-j\alpha\,\theta'} \sum_{(s,1)=j} 1 \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j\geq m} 2^{-j\alpha\,\theta'}\, j^{d-1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} = \omega(2^{-m}) m^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{10}$$

Співставивши (7), (8) і (10) приходимо до шуканих оцінок зверху відповідних поперечників в (5) при $\theta \in [\,1,\infty\,)$.

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді згідно з (7) можемо записати

$$J_1 \ll \sup_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|A_s(f)\|_1}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega(2^{-(s,1)})$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega(2^{-(s,1)}) \ll \sum_{(s,1)\geq n-2d} \omega(2^{-(s,1)}) = J_3. \tag{11}$$

Прийнявши до уваги (9), продовжимо оцінку J_3:

$$J_3 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{(s,1)\geq m} 2^{-\alpha(s,1)} \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j\geq m} 2^{-j\,\alpha} \sum_{(s,1)=j} 1 \right)$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{j\geq m} 2^{-j\,\alpha}\, j^{\,d-1} \asymp \omega(2^{-m}) m^{d-1}. \tag{12}$$

Співставивши (7), (11) і (12) одержимо оцінки зверху відповідних величин.

Переходячи в (5) до оцінок знизу зауважимо, що згідно з (4) достатньо одержати необхідну оцінку для колмогоровського поперечника $d_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta},\, B_{1,1})$. Для цього нам знадобляться деякі позначення і допоміжне твердження.

Нехай

$$\overline{S}_n = \{\, s :\, s = (s_1,\ldots,s_d) : (s,1) = n,\ s_j - \text{парні числа},\ j = \overline{1,d}\,\},$$

$$\rho^+(s) = \{\, k :\, k = (k_1,\ldots,k_d) :\, 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j},\ \ j = \overline{1,d}\ \},$$

$$\overline{Q}_n = \bigcup_{s\in\overline{S}_n} \rho^+(s).$$

Для вектора $m = (m_1, \ldots, m_d)$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, через $RT(m)$ позначимо множину дійсних тригонометричних поліномів

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le m_j} \widehat{t}(k)\, e^{i(k,x)}.$$

Далі, через k^s будемо позначати вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \ldots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}, & s_j \ge 2, \\ 1, & s_j = 1, \ j = \overline{1,d}, \end{cases}$$

і

$$T(\overline{Q}_n) = \left\{ t(x) = \sum_{s \in \overline{S}_n} t_s(x)\, e^{i(k^s, x)}, \ t_s \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Для $g \in T(\overline{Q}_n)$ покладемо

$$\overline{\delta}_s(g) := \overline{\delta}_s(g,x) = \sum_{k \in \rho^+(s)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}.$$

В прийнятих позначеннях справедливе твердження.

Лема A [25]. *Нехай $M \le \frac{|\overline{Q}_n|}{4}$. Тоді для довільного простору $\Psi \in L_1$, розмірність якого не перевищує M, знайдеться функція $g \in T(\overline{Q}_n)$ така, що*

$$\|\overline{\delta}_s(g)\|_\infty \le |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \ s \in \overline{S}_n,$$

$$\|g\|_2 \ge C_5(d) > 0,$$

і для будь-якого $\psi \in \Psi$ виконується умова $(g, \psi) = 0$.

Тепер перейдемо безпосередньо до встановлення оцінки знизу.

Нехай M задано. Знайдемо парне число n таке, що

$$|\overline{Q}_{n-2}| < 4\, M \le |\overline{Q}_n|.$$

Далі, нехай задано довільний підпростір $\Psi \subset L_1$ розмірності не більшої за M і функція g, задовольняє умови леми A.

Розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_6\, \omega(2^{-n}) |\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}}\, g(x), \ C_6 > 0$$

і покажемо, що при певному виборі сталої C_6 вона належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$.

Нехай спочатку $1 \le \theta < \infty$. Тоді згідно з означенням норми функції з класу $B^{\Omega}_{\infty,\,\theta}$ можемо записати

$$\|g_1\|_{B^{\Omega}_{\infty,\,\theta}} \asymp \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\, \|A_s(g_1)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac12}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s\in\overline{S}_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\, \|\overline{\delta}_s(g)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac12}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}}\, |\overline{S}_n|^{-\frac12}\, \omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{s\in\overline{S}_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}\, n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Звідси робимо висновок, що функція g_1 з відповідною сталою $C_6 > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$.

Аналогічно при $\theta = \infty$ розглянемо функцію

$$g_2(x) = C_7\, \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac12}\, g(x),\ C_7 > 0.$$

Тоді

$$\|g_2\|_{B^{\Omega}_{\infty,\,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(g_2)\|_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac12} \sup_s \frac{\|\overline{\delta_s}(g)\|_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})}$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac12}\, \omega^{-1}(2^{-n})|\overline{S}_n|^{-\frac12} = 1.$$

Таким чином, функція g_2 з відповідною сталою $C_7 > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\,\infty}$.

Нехай $\psi \in \Psi$. Оцінимо $\|g_1 - \psi\|_{B_{1,1}}$. Розглянемо величину $\delta = (g_1 - \psi,\, g)$. Тоді з одного боку, враховуючи умови $\|g\|_2 \ge C_5(d)$ і $(g,\, \psi) = 0,\ \psi \in \Psi$, можемо записати

$$\delta = (g_1,\, g) \ge \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac12}\, n^{-\frac{d-1}{\theta}}\, C_5^2(d). \tag{13}$$

З іншого боку, прийнявши до уваги, що $\|\overline{\delta}_s(g)\|_\infty \le |\overline{S}_n|^{-\frac12},\ s \in \overline{S}_n$ одержимо

$$\delta = \sum_{s\in\overline{S}_n} (\overline{\delta}_s(g_1-\psi), \overline{\delta}_s(g)) = \sum_{s\in\overline{S}_n} \left(\left(\sum_{\|s-s'\|_\infty\le 1} A_{s'}(g_1-\psi) \right), \overline{\delta}_s(g) \right)$$

$$\le \max_{s\in\overline{S}_n} \|\delta_s(g)\|_\infty \sum_s \|A_s(g_1-\psi)\|_1 \le |\overline{S}_n|^{-\frac12}\, \|g_1-\psi\|_{B_{1,1}}. \tag{14}$$

Співставивши (13) і (14) будемо мати

$$\|g_1 - \psi\|_{B_{1,1}} \geq \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|\, n^{-\frac{d-1}{\theta}}\, C_5^2(d).$$

Звідси випливає шукана оцінка знизу колмогоровського поперечника $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, B_{1,1})$, скориставшись якою, згідно з (4) одержимо відповідні оцінки для лінійного і тригонометричного поперечників.

Теорема 1 доведена. □

Прокоментуємо одержані результати.

Спочатку, як наслідок теореми 1 сформулюємо твердження стосовно найкращого наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$ тригонометричними поліномами з “номерами” гармонік зі східчастого гіперболічного хреста.

Розглянемо множину

$$Q_n = \bigcup_{(s,1)<n} \rho(s),$$

яку називають східчастим гіперболічним хрестом і позначимо

$$T(Q_n) = \{t :\, t(x) = \sum_{k \in Q_n} c_k\, e^{i(k,x)}\}.$$

Для $f \in B_{1,1}$ покладемо

$$E_{Q_n}(f)_{B_{1,1}} = \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_{B_{1,1}}$$

і відповідно для функціонального класу $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B_{1,1}$ позначимо

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{1,1}} = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} E_{Q_n}(f)_{B_{1,1}}.$$

Наслідок 1. *Нехай* $1 \leq p, \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді справедлива оцінка*

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{1,1}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{15}$$

Оцінка зверху в (15) встановлена при доведенні теореми 1, оскільки поліноми виду (6) належать до множини $T(Q_{n+d})$. Що ж стосується відповідної оцінки знизу, то вона отримується з (5) згідно зі співвідношеннями

$$E_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{1,1}} \gg d_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, B_{1,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})},\ M \asymp 2^n\, n^{d-1}.$$

Крім цього цікаво порівняти оцінки лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, B_{1,1})$, які встановлені в (5), з оцінками відповідних величин у просторі L_1. З цією метою наведемо твердження для лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, L_1)$ [24].

Теорема A. *Нехай* $2 \le p, \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n\, n^{d-1}$ *справедлива порядкова оцінка*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, L_1) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{16}$$

Таким чином, співставивши (5) і (16) бачимо, що при $d \ge 2$ і виконанні умов теореми A на параметри p і θ величини $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, L_1)$ і $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, B_{1,1})$ відрізняються за порядком. Що ж стосується одновимірного випадку, то лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ при тих же умовах на параметри p і θ у просторах L_1 і $B_{1,1}$ мають однакові порядки.

Зауваження 1. Питання про порядки поперечників $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1)$ і $d^{\top}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1)$ при $1 \le p, \theta \le \infty$, а також лінійних поперечників $\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta},\, L_1)$ при $2 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta < 2$ і $1 \le p < 2,\ 1 \le \theta \le \infty$ в багатовимірному випадку ($d \ge 2$) залишається відкритим.

Зауваження 2. В тому випадку, коли $r = (r_1, \dots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $0 < r_1 < l$, $j = \overline{1, d}$ і $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$ (тобто класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами $B^{r}_{p,\theta}$) відповідні теоремі 1 результати були одержані в [20]. При цьому слід зазначити, що оцінка знизу в [20] була встановлена за допомогою методу, який принципово відрізняється від того, що використовувався при доведенні теореми 1.

Література

[1] С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений, т. II. Конструктивная теория функций (1931 – 1953)*, М., Изд. АН СССР, 1954.

[2] С. Б. Стечкин, *О порядке наилучших приближений непрерывных функций* // Изв. АН СССР. Сер. мат., **15** (1951), 219–242.

[3] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. общества, **5** (1956), 483–522.

[4] Sun Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. МИАН СССР, **219** (1997), 356–377.

[5] Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ *и* $S^{(r)}_{p,\theta}$ $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **77** (1965), 5–34.

[6] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187** (1989), 143–161.

[7] С. М. Никольский, *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера* // Сиб. мат. журн., **4** (1963), No. 6, 1342–1364.

[8] Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math., **20** (1994), 35–48.

[9] С. А. Стасюк, О. В. Федуник, *Апроксимативні характеристики класів* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **58** (2006), No. 5, 692–704.

[10] A. Kolmogoroff, *Über die beste Annäherung von Fukctionen einer gegebenen Funktionenklasse* // Ann. of Math., **37** (1936), 107–110.

[11] В. М. Тихомиров, *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений* // Успехи мат. наук, **15** (1960), No. 3, 81–120.

[12] Р. С. Исмагилов, *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами* // Успехи мат. наук, **29** (1974), No. 3, 161–178.

[13] А. С. Романюк, *О наилучших приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **47** (1995), No. 1, 79–92.

[14] А. С. Романюк, *Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I* // Укр. мат. журн., **53** (2001), No. 5, 647–661.

[15] А. С. Романюк, *Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II* // Укр. мат. журн., **53** (2001), No. 6, 820–829.

[16] А. С. Романюк, *Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова* $B^{r}_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных* // Мат. сб., **197** (2006), No. 1, 71–96.

[17] А. С. Романюк, *Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных* // Мат. сб., **199** (2008), No. 2, 93–114.

[18] А. С. Романюк, *Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Anal. Math., **37** (2011), 181–213.

[19] А. С. Романюк, *Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского-Бесова периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **67** (2015), No. 11, 1540–1556.

[20] А. С. Романюк, *Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **68** (2016), No. 10, 1403–1417.

[21] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178** (1986), 1–112.

[22] А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных* // Пр. Ін-ту математики НАН України, **93** (2012), 353.

[23] D. Ding, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation* // arXiv: 1601. 03978 v 3 [math.NA] 21 Apr. 2017.

[24] О. В. Федуник, *Оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання, Зб. праць Ін-ту мат. НАН України, **4** (2007), No. 1, 376–389.

[25] В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью* // Тр. Мат. ин-та АН СССР, **189** (1989), 138–168.

Відомості про авторів

Михайло Віталійович Гембарський
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: hembarskyi@gmail.com

Світлана Борисівна Гембарська
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: gembarskaya72@gmail.com