Український математичний вісник
Том 15 **(2018)**, № 1, 1 – 17

О понижении порядка в дифференциально-алгебраической системе

Сергей М. Чуйко

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы. Получены достаточные условия приводимости дифференциально-алгебраического уравнения к последовательности систем, объединяющих дифференциальные и алгебраические уравнения. Предложена оригинальная классификация, а также единая схема построения решений дифференциально-алгебраических уравнений.

2010 MSC. 34B15.

Ключевые слова и фразы. Дифференциально-алгебраические уравнения, оператор Грина, задача Коши.

1. Постановка задачи

Исследована задача о построении решений

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_n[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^n$$

линейной дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t); \tag{1}$$

здесь

$$A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$$

– непрерывные матрицы, $f(t) \in \mathbb{C}_n[a,b]$ непрерывный вектор-столбец; далее, по традиции, нижний индекс последнего пространства вектор-столбцов будем опускать. Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной.

Статья поступила в редакцию 24.03.2018
Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

Исследованию дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [1–6]. В статьях [7, 8] предложена серия достаточных условий разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц и не претендующая на полноту охвата всех дифференциально-алгебраических уравнений. Целью данной статьи является нахождение условий разрешимости, а также конструкции обобщенного оператора Грина задачи Коши линейной дифференциально-алгебраической системы для любых натуральных m и n.

При условии [7, 8]

$$P_{A^*(t)} \equiv 0, \quad A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a;b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a;b] \tag{2}$$

система (1) разрешима относительно производной

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)), \quad \mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t); \tag{3}$$

здесь rank $A(t) := \sigma_0 = m \le n$. Кроме того $A^+(t)$ — псевдообратная (по Муру – Пенроузу) матрица, $P_{A^*(t)}$ — матрица-ортопроектор [9]: $P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$— матрица, составленная из ρ_0 линейно-независимых столбцов $(n \times n)$— матрицы-ортопроектора $P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t))$. Таким образом, при условии $\rho_0 \ne 0$ система (3), разрешенная относительно производной, зависит от произвольной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t)$. Обозначим $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3). При условии (2) система (3), а следовательно и система (1), имеет решение вида [7, 8]

$$z(t,c) = X_0(t)c + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s,\nu_0(s))\,ds, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1. *При условии* (2) *система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s,\nu_0(s))\,ds$$

– *обобщенный оператор Грина задачи Коши* $z(a) = 0$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1).

Пример 1. *Требованиям леммы 1 удовлетворяет дифференциально-алгебраическая система*

$$A(t)\, z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \end{pmatrix}^*, \tag{4}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (2) выполнено, постольку система (4) имеет решение вида

$$z(t, c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$X_0(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix},$$

$$K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\,(1-\cos t) \\ 2\,\sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $\rho_0 = 1 \neq 0$, при этом

$$P_A(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A_{\varrho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

поэтому найденное решение зависит от произвольной непрерывной скалярной функции $\nu_0(t)$; в частности, $\nu_0(t) := \sin t$.

Поскольку при условии (2) система (1) разрешима для любой неоднородности $f(t)$, постольку, по аналогии с классификацией импульсных краевых задач [14] случай (2) будем называть невырожденным. С другой стороны, в отличие от классификации импульсных краевых задач речь идет о разрешимости дифференциально-алгебраической системы (2), а не соответствующей краевой задачи.

При условии $P_{A^*(t)} \equiv 0$, но $A^+(t)B(t) \not\in \mathbb{C}_{n\times n}[a;b]$, либо $A^+(t)f(t) \not\in \mathbb{C}[a;b]$, система (1) разрешима, но решение $z(t) \not\in \mathbb{C}^1_n[a,b]$ не является искомым.

2. Вырождение первого порядка

При условии $P_{A^*(t)} \neq 0$ система (1) не разрешима относительно производной. Предположим, что матрица $A(t)$ имеет постоянный ранг, а именно: $1 \leq \text{rank } A(t) = \sigma_0$. Как известно [11], любая $(m\times n)-$ матрица $A(t)$ в определенном базисе может быть представлена в виде

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$R_0(t) \in \mathbb{C}_{m\times m}[a,b], \quad S_0(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a,b];$$

здесь $R_0(t)$ и $S_0(t)$ – невырожденные матрицы. Действительно: любая $(m\times n)$-матрица $A(t)$ может быть представлена в виде скелетного разложения $A(t) = \Phi(t)\Psi(t)$; здесь матрица $\Phi(t) \in \mathbb{C}_{m\times\sigma_0}[a,b]$ и матрица $\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0\times n}[a,b]$ полного ранга [13, с. 31]: $\text{rank } A(t) = \text{rank } \Phi(t) := \text{rank } \Psi(t) := \sigma_0$. При этом матрица $\Phi(t)$ состоит из σ_0 столбцов, образующих алгебраический базис [12, с. 74] столбцов матрицы $A(t)$, а матрица $\Psi(t)$ определяет [13, с. 31] координаты столбцов матрицы $A(t)$ в базисе $\Phi(t)$. Представим матрицу J_{σ_0} в виде

$$J_{\sigma_0} = V\cdot W, \quad V := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} \\ O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times\sigma_0}, \quad W := \begin{pmatrix} I_{\sigma_0} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_0\times n}.$$

Уравнение $\Phi(t) = R_0(t)\,V$ относительно матрицы $R_0(t)$ разрешимо, поскольку разрешимо равносильное ему уравнение $\Phi^*(t) = V^*R_0^*(t)$. Разрешимость последнего уравнения определяет очевидное равенство $P_V = 0$, при этом

$$R_0^*(t) = (V^+)^*\Phi^*(t) + P_{V^*}C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \text{rank } P_{V^*} = m - \sigma_0,$$

следовательно $R_0(t) = \Phi(t)V^+ + C_1P_{V^*}$. Заметим, что первое слагаемое принадлежит образу матрицы V, а второе – ортогональному ему нуль-пространству $\mathbb{N}(V^*)$. Поскольку $\text{rank } \Phi(t)V^+ = \text{rank } (\Phi(t) \;\; O) = \sigma_0$, постольку, при надлежащем выборе матрицы $C_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, имеет место равенство $\text{rank } \Phi = \sigma_0$. Аналогично, при надлежащем выборе матрицы $C_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, находим невырожденную матрицу $S_0(t) = W^+\Psi(t) + P_WC_2$. Невырожденная замена переменной $y(t) = S_0(t)z(t)$ приводит систему (1) к виду

$$J_{\sigma_0}y'(t) = C_0(t)y(t) + R_0^{-1}(t)f(t); \tag{5}$$

здесь

$$C_0(t) := \left(J_{\sigma_0}S_0'(t) + R_0^{-1}(t)B(t)\right)S_0^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(t) & C_{12}^{(0)}(t) \\ C_{21}^{(0)}(t) & C_{22}^{(0)}(t) \end{pmatrix}.$$

Замена переменной

$$y(t) = \text{ col } (u(t), v(t)) \in \mathbb{C}^1_n[a,b], \quad u(t) \in \mathbb{C}^1_{\sigma_0}[a,b], \quad v(t) \in \mathbb{C}^1_{n-\sigma_0}[a,b]$$

приводит систему (5) к виду

$$u'(t) = C^{(0)}_{11}(t)u(t) + C^{(0)}_{12}(t)v(t) + g^{(0)}_1(t), \tag{6}$$

$$C^{(0)}_{21}(t)u(t)+C^{(0)}_{22}(t)v(t)+g^{(0)}_2(t) = 0, \; R^{-1}_0(t)f(t) := \text{ col}\left(g^{(0)}_1(t), \, g^{(0)}_2(t)\right). \tag{7}$$

Здесь $P_{D^*_0}(t)$ – матрица-ортопроектор: $P_{D^*_0}(t) \, : \, \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \to \mathbb{N}(D^*_0(t))$. Уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда [9] $P_{D^*_0}(t)g^{(0)}_2(t) \equiv 0$; при этом общее решение уравнения (7)

$$y(t) = P_{D_{\rho_0}}\varphi(t) - D^+_0(t)g^{(0)}_2(t),$$

$$D_0(t) := \left[C^{(0)}_{21}(t); C^{(0)}_{22}(t)\right] \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0)\times n}, \varphi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a,b]$$

определяет $P_{D_{\rho_0}}(t)$ – $(n \times \rho_0)$ – матрица, составленная из ρ_0 линейно-независимых столбцов $P_{D_0}(t)$ – матрицы-ортопроектора: $P_{D_0}(t)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(D_0(t))$. Обозначая блоки матрицы $P_{D_{\rho_0}}(t)$ и произведения $D^+_0(t)g^{(0)}_2(t)$

$$P_{D_{\rho_0}}(t) := \text{ col}(P^{(0)}_1(t), \; P^{(0)}_2(t)), \; D^+_0(t)g^{(0)}_2(t) = - \text{ col}\left(f^{(1)}_1(t), f^{(1)}_2(t)\right),$$

приходим к задаче о построении решений $\varphi(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_0}[a,b]$ линейной дифференциально-алгебраической системы

$$A_1(t)\varphi'(t) = B_1(t)\varphi(t) + f_1(t), A_1(t) := P^{(0)}_1(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_0\times\rho_0},$$
$$\text{rank } A_1(t) := \sigma_1 = \sigma_0 \le \rho_0; \tag{8}$$

здесь

$$B_1(t) := C^{(0)}_{11}(t)P^{(0)}_1(t) + C^{(0)}_{12}(t)P^{(0)}_2(t) - A'_1(t),$$

кроме того

$$f_1(t) := C^{(0)}_{11}(t)f^{(1)}_1(t) + C^{(0)}_{12}(t)f^{(1)}_2(t) + g^{(0)}_1(t) - \left(f^{(1)}_1(t)\right)'.$$

При условии [7, 10]

$$P_{A^*} \ne 0, \; P_{A^*_1} \equiv 0, \; P_{D^*_0}g^{(0)}_2(t) \equiv 0, \; A^+_1(t)B_1(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0\times\sigma_0}[a;b],$$
$$A^+_1(t)f_1(t) \in \mathbb{C}[a;b], \; P_{D^*_0}(t)g^{(0)}_2(t) \equiv 0 \ldots,$$
$$S^{-1}_0(t)D^+_0(t)g^{(0)}_2(t) \in \mathbb{C}[a;b] \ldots . \tag{9}$$

система (8) разрешима относительно производной

$$\frac{d\varphi}{dt} = A_1^+(t)B_1(t)\varphi + \mathfrak{F}_1(t, \nu_1(t)), \quad \nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a;b]; \tag{10}$$

здесь $\mathfrak{F}_1(t,\nu_1(t)) := A_1^+(t)f_1(t) + P_{A_{\varrho_1}}(t)\nu_1(t)$. Кроме того $P_{A_1^*(t)}$ – матрица-ортопроектор [9]: $P_{A_1^*}(t) : \mathbb{R}^{\sigma_0} \to \mathbb{N}(A_1^*(t))$, $P_{A_{\rho_1}}(t)$ – $(n \times \rho_1)$– матрица, составленная из ρ_1 линейно-независимых столбцов $(\rho_0 \times \rho_0)$-матрицы-ортопроектора $P_{A_1}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0} \to \mathbb{N}(A_1(t))$. Обозначим $U_1(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$U_1'(t) = A_1^+(t)B_1(t)U_1(t), \quad U_1(a) = I_{\rho_1}$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10). При условии (9) система (10), а следовательно и система (1), имеет решение вида

$$z(t,c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}K\Big[\mathfrak{F}_1(s,\nu_1(s))\Big](t) - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t),$$

$$c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

где

$$X_1(t) := S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}U_1(t),$$

$$K\Big[\mathfrak{F}_1(s,\nu_1(s))\Big](t) := U_1(t)\int_a^t U_1^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_1(s,\nu_1(s))\,ds.$$

Лемма 2. *При условии* (9) *линейная дифференциально-алгебраическая система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K\Big[f(s),\nu_1(s)\Big](t),$$

$$X_1(t) := P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)U_1(t), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

где

$$K\Big[f(s),\nu_1(s)\Big](t) := P_{D_{\rho_0}}S_0^{-1}(t)K\Big[\mathfrak{F}_1(s,\nu_1(s))\Big](t) - S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t)$$

– обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a) = 0$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1).

При условии $P_{A^*} \neq 0$, $P_{A_1^*} \equiv 0$, $P_{D_0^*}g_2^{(0)}(t) = 0$, но $A_1^+(t)B_1(t) \notin \mathbb{C}_{\sigma_0\times\sigma_0}[a;b]$, либо $A_1^+(t)f_1(t) \notin \mathbb{C}[a;b]$, система (1) разрешима, но решение $z(t) \notin \mathbb{C}_n^1[a,b]$ не является искомым. По аналогии с классификацией импульсных краевых задач [14] в случае (9) будем говорить, что для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) имеет место вырождение первого порядка.

Пример 2. *Требованиям леммы 2 удовлетворяет дифференциально-алгебраическая система*

$$A(t)\,z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*, \qquad (11)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1+\cos 2t & -\sin 2t & -1-\cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1-\cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1-\cos 2t & \sin 2t & 1+\cos 2t \end{pmatrix} \neq 0,$$

постольку условие (2) не выполнено, при этом матрица $A(t)$ может быть представлена в виде

$$A(t) = R_0(t)\cdot J_{\sigma_0}\cdot S_0(t), \quad J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = 3;$$

здесь

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ \cos t & \sin t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– невырожденные матрицы. В данном случае матрица $A_1(t) = I_3$ невырождена, при этом $P_{A_1}(t) = 0$, $P_{A_{\rho_1}}(t) = 0$, поэтому искомое решение

$$z(t, c_3) = X_1(t)c_3 + K\Big[f(s)\Big](t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3$$

не зависит от произвольной непрерывной функции $\nu_1(t)$; здесь

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t}-1 & e^{-t} & 1-e^{-t}-t \end{pmatrix}, K\Big[f(s)\Big](t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 0 \\ 1-e^{-t} \end{pmatrix}.$$

3. Вырождение порядка p.

При условии $P_{A^*(t)} \neq 0$ и $P_{A_1^*(t)} \neq 0$ дифференциально-алгебраическая система (8) не разрешима относительно производной. Предположим, что матрица $A_1(t)$ имеет постоянный ранг: rank $A_1(t) = \sigma_1$; при этом матрица $A_1(t)$ в определенном базисе может быть представлена в виде

$$A_1(t) = R_1(t) \cdot J_{\sigma_1} \cdot S_1(t), \ J_{\sigma_1} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_1} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$R_1(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_0 \times \sigma_0}[a, b], S_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times \rho_0}[a, b];$$

здесь $R_1(t)$ и $S_1(t)$ – невырожденные матрицы. Невырожденная замена переменной $\psi(t) = S_1(t)\varphi(t)$ приводит систему (8) к виду

$$J_{\sigma_1}\psi'(t) = C_1(t)\psi(t) + R_1^{-1}(t)f_1(t); \tag{12}$$

здесь

$$C_1(t) := \left(J_{\sigma_1}S_1'(t) + R_1^{-1}(t)B_1(t)\right)S_1^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(1)}(t) & C_{12}^{(1)}(t) \\ C_{21}^{(1)}(t) & C_{22}^{(1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Замена переменной

$$\psi(t) = \text{ col } (\xi(t), \zeta(t)) \in \mathbb{C}^1_{\rho_0}[a, b], \quad \xi(t) \in \mathbb{C}^1_{\sigma_1}[a, b], \quad \zeta(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_0 - \sigma_1}[a, b]$$

приводит систему (12) к виду

$$\xi'(t) = C_{11}^{(1)}(t)\xi(t) + C_{12}^{(1)}(t)\zeta(t) + g_1^{(1)}(t), \tag{13}$$

$$C_{21}^{(1)}(t)\xi(t) + C_{22}^{(1)}(t)\zeta(t) + g_2^{(1)}(t) = 0,$$
$$R_1^{-1}(t)f_1(t) := \text{ col } \left(g_1^{(1)}(t), g_2^{(1)}(t)\right). \tag{14}$$

Уравнение (14) разрешимо тогда и только тогда, когда [7, 8, 10]

$$P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t) \equiv 0, \quad D_1(t) := \left[\ C_{21}^{(1)}(t); \ C_{21}^{(1)}(t)\ \right] \in \mathbb{R}^{(\rho_0 - \sigma_1) \times \rho_0};$$

здесь $P_{D_1^*}(t)$ – матрица-ортопроектор: $P_{D_1^*}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0 - \sigma_1} \to \mathbb{N}(D_1^*(t))$. При этом общее решение уравнения (14)

$$\psi(t) = P_{D_{\rho_1}}\mu(t) - D_1^+(t)g_2^{(1)}(t), \quad \mu(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_1}[a, b]$$

определяет $P_{D_{\rho_1}}(t)$ – $(\rho_0 \times \rho_1)$ – матрица, составленная из ρ_1 линейно-независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{D_1}(t)$: $P_{D_1}(t) : \mathbb{R}^{\rho_0} \to \mathbb{N}(D_1(t))$. Обозначая блоки матрицы $P_{D_{\rho_1}}(t)$ и произведения $D_1^+(t)g_2^{(1)}(t)$

$$P_{D_{\rho_1}}(t) := \mathrm{col}\left(P_1^{(1)}(t), P_2^{(1)}(t)\right),\ D_1^+(t)g_2^{(1)}(t) := -\mathrm{col}\left(f_1^{(2)}(t), f_2^{(2)}(t)\right),$$

приходим к задаче о построении решений $\mu(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_1}[a,b]$ линейной дифференциально-алгебраической системы

$$A_2(t)\,\mu'(t) = B_2(t)\,\mu(t) + f_2(t), \quad A_2(t) := P_1^{(1)}(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_1 \times \rho_1}; \tag{15}$$

здесь

$$B_2(t) := C_{11}^{(1)}(t)P_1^{(1)}(t) + C_{12}^{(1)}(t)P_2^{(1)}(t) - A_2'(t),$$

кроме того

$$f_2(t) := C_{11}^{(1)}(t)f_1^{(2)}(t) + C_{12}^{(1)}(t)f_2^{(2)}(t) + g_1^{(1)}(t) - \left(f_1^{(2)}(t)\right)'.$$

При условии [10]

$$\left\{\begin{array}{l} P_{A^*(t)} \neq 0, \quad P_{A_1^*(t)} \neq 0, \quad P_{A_2^*(t)} \equiv 0, \quad P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \\ P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t) \equiv 0, \quad A_2^+(t)B_2(t) \in \mathbb{C}[a;b], \quad A_2^+(t)f_2(t) \in \mathbb{C}[a;b], \\ S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t) \in \mathbb{C}[a;b] \end{array}\right. \tag{16}$$

система (15) разрешима относительно производной:

$$\mu' = A_2^+(t)B_2(t)\,\mu + \mathfrak{F}_2(t, \nu_2(t)), \quad \nu_2(t) \in \mathbb{C}_{\rho_2}[a;b]; \tag{17}$$

здесь $\mathfrak{F}_2(t,\nu_2(t)) := A_2^+(t)f_2(t) + P_{A_{\rho_2}}(t)\nu_2(t)$. Кроме того $P_{A_2^*(t)}$ – матрица-ортопроектор [9]: $P_{A_2^*}(t) : \mathbb{R}^{\sigma_1} \to \mathbb{N}(A_2^*(t))$, $P_{A_{\rho_2}}(t)$ – $(\rho_1 \times \rho_2)$ – матрица, составленная из ρ_2 линейно-независимых столбцов $(\rho_1 \times \rho_1)$-матрицы-ортопроектора $P_{A_2}(t) : \mathbb{R}^{\rho_1} \to \mathbb{N}(A_2(t))$. Заметим, что при условии (16) $\mathrm{rank}\, A_2(t) := \sigma_2 = \sigma_1 \leq \rho_1$. Обозначим $U_2(t)$ нормальную фундаментальную матрицу:

$$U_2'(t) = A_2^+(t)B_2(t)U_2(t), \quad U_2(a) = I_{\rho_1}$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17). При условии (16) система (1) имеет решение вида

$$z(t, c_{\rho_2}) = S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t)P_{D_{\rho_1}}U_2(t)c_{\rho_2}$$

$$+S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t)\Big\{P_{D_{\rho_1}}K\Big[\mathfrak{F}_2(s,\nu_2(s))\Big](t)-D_1^+(t)g_2^{(1)}(t)\Big\},$$

где

$$K\Big[\mathfrak{F}_2(s,\nu_2(s))\Big](t):=U_2(t)\int_a^t U_2^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_2(s,\nu_2(s))\,ds,\quad c_{\rho_2}\in\mathbb{R}^{\rho_2}.$$

Лемма 3. *При условии* (16) *линейная дифференциально-алгебраическая система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c_{\rho_2})=X_2(t)c_{\rho_2}+K\Big[f(s),\nu_2(s)\Big](t),$$

$$X_2(t):=S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t)P_{D_{\rho_1}}U_2(t),$$

где

$$K\Big[f(s),\nu_2(s)\Big](t):=S_0^{-1}(t)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(t)$$
$$\times\Big\{P_{D_{\rho_1}}K\Big[\mathfrak{F}_2(s,\nu_2(s))\Big](t)-D_1^+(t)g_2^{(1)}(t)\Big\}-S_0^{-1}(t)D_0^+(t)g_2^{(0)}(t)$$

– обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a)=0$ для дифференциально-алгебраической системы (1).

По аналогии с классификацией импульсных краевых задач [14] в случае (16) будем говорить, что для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) имеет место вырождение второго порядка. При условии

$$P_{A^*(t)}\neq 0,\ P_{A_1^*(t)}\neq 0,\ P_{A_2^*(t)}\equiv 0,\ P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t)\equiv 0,\ P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t)\equiv 0,$$

но $A_2^+(t)B_2(t)\notin\mathbb{C}_{n\times n}[a;b]$, либо $A_2^+(t)f_2(t)\notin\mathbb{C}[a;b]$, система (1) разрешима, но решение $z(t)\notin\mathbb{C}_n^1[a,b]$ не является искомым. При условии

$$P_{A^*(t)}\neq 0,\ P_{A_1^*(t)}\neq 0,\ P_{A_2^*(t)}\equiv 0,\ P_{D_0^*}(t)g_2^{(0)}(t)\equiv 0,\ P_{D_1^*}(t)g_2^{(1)}(t)\neq 0$$

система (1) не разрешима. Сравним ранги матриц $A_0(t):=A(t),\ A_1(t)$ и $A_2(t)$ в уравнениях (1), (8) и (15), определяющих условия разрешимости системы (1). В невырожденном случае для разрешимости системы (1) достаточно тождества $P_{A_0^*(t)}\equiv 0$, при этом

$$1\leq\operatorname{rank}A_0(t):=\sigma_0=m\leq n.$$

В случае вырождения первого порядка $P_{A_0^*(t)} \neq 0$, следовательно $\sigma_0 < m$, при этом для разрешимости системы (1) достаточно тождества $P_{A_1^*(t)} \equiv 0$; в этом случае

$$1 \leq \text{rank } A_1(t) := \sigma_1 := \sigma_0 < \min(m, n).$$

В вырожденном случае второго порядка $P_{A_0^*(t)} \neq 0$ и $P_{A_1^*(t)} \neq 0$, при этом для разрешимости системы (1) достаточно тождества $P_{A_2^*(t)} \equiv 0$; в этом случае

$$1 \leq \text{rank } A_2(t) := \sigma_2 := \sigma_1 < \sigma_0 < \min(m, n).$$

Продолжая рассуждения, предположим, что после расщепления систем (1), (8), (15), ..., получено уравнение

$$A_k(t)\,\kappa'(t) = B_k(t)\,\kappa(t) + f_k(t), \quad k = 1,\, 2\,, 3\,,\ \dots\ , \tag{18}$$

не разрешимое относительно производной: $P_{A_0^*(t)} \neq 0$ $P_{A_1^*(t)} \neq 0, \ \dots$ и $P_{A_k^*(t)} \neq 0$, при этом разрешимы промежуточные уравнения (7), (14), ..., а именно:

$$P_{D_0^*}(t) g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \quad P_{D_1^*}(t) g_2^{(1)}(t) \equiv 0, \ \dots\ , \ P_{D_{k-1}^*}(t) g_2^{(k-1)}(t) \equiv 0.$$

Предположим также, что матрица $A_k(t)$ имеет постоянный ранг: rank $A_k(t) = \sigma_k$; при этом матрица $A_k(t)$ в определенном базисе может быть представлена в виде

$$A_k(t) = R_k(t) \cdot J_{\sigma_k} \cdot S_k(t), \quad J_{\sigma_k} := \begin{pmatrix} I_{\sigma_k} & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

здесь

$$R_k(t) \in \mathbb{C}_{\sigma_{k-1} \times \sigma_{k-1}}[a, b], \quad S_k(t) \in \mathbb{C}_{\rho_{k-1} \times \rho_{k-1}}[a, b]$$

– невырожденные матрицы. Невырожденная замена переменной $\kappa(t) = S_k(t)\omega(t)$ приводит систему (18) к виду

$$J_{\sigma_k}\omega'(t) = C_k(t)\omega(t) + R_k^{-1}(t) f_k(t); \tag{19}$$

здесь

$$C_k(t) := \left(J_{\sigma_k} S_k'(t) + R_k^{-1}(t) B(t)\right) S_k^{-1}(t) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(k)}(t) & C_{12}^{(k)}(t) \\ C_{21}^{(k)}(t) & C_{22}^{(k)}(t) \end{pmatrix}.$$

Замена переменной

$$\omega(t) = \text{ col } (\omega_1(t), \omega_2(t)) \in \mathbb{C}^1_{\rho_{k-1}}[a, b],$$

$$\omega_1(t) \in \mathbb{C}^1_{\sigma_k}[a,b], \quad \omega_2(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_{k-1}-\sigma_k}[a,b]$$

приводит систему (19) к виду

$$\omega_1'(t) = C^{(k)}_{11}(t)\omega_1(t) + C^{(k)}_{12}(t)\omega_2(t) + g^{(k)}_1(t), \tag{20}$$

$$C^{(k)}_{21}(t)\omega_1(t) + C^{(k)}_{22}(t)\omega_2(t) + g^{(k)}_2(t) = 0,$$
$$R^{-1}_k(t)f_k(t) := \text{ col}\left(g^{(k)}_1(t), g^{(k)}_2(t)\right). \tag{21}$$

Уравнение (21) разрешимо тогда и только тогда, когда [7, 8, 10]

$$P_{D^*_k}(t)g^{(k)}_2(t) = 0, \quad D_k(t) := \left[\ C^{(k)}_{21}(t);\ C^{(k)}_{21}(t)\ \right] \in \mathbb{R}^{(\rho_{k-1}-\sigma_k)\times\rho_{k-1}};$$

здесь $P_{D^*_k}(t)$ – матрица-ортопроектор: $P_{D^*_k}(t) : \mathbb{R}^{\rho_{k-1}-\sigma_k} \to \mathbb{N}(D^*_k(t))$. При этом общее решение уравнения (21)

$$\omega(t) = P_{D_{\rho_k}}\theta(t) - D^+_k(t)g^{(k)}_2(t), \quad \theta(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_k}[a,b]$$

определяет $P_{D_{\rho_k}}(t)$ — $(\rho_{k-1}\times\rho_k)$ – матрица, составленная из ρ_k линейно-независимых столбцов $P_{D_k}(t)$ ортопроектора: $P_{D_k}(t) : \mathbb{R}^{\rho_{k-1}} \to \mathbb{N}(D_k(t))$. Обозначая блоки матрицы $P_{D_{\rho_k}}(t)$ и произведения $D^+_k(t)g^{(k)}_2(t)$

$$P_{D_{\rho_k}}(t) := \text{ col }\left(P^{(k)}_1(t),\ P^{(k)}_2(t)\right),$$

$$D^+_k(t)g^{(k)}_2(t) := -\text{ col }\left(f^{(k+1)}_1(t), f^{(k+1)}_2(t)\right),$$

приходим к задаче о построении решений $\theta(t) \in \mathbb{C}^1_{\rho_k}[a,b]$ линейной дифференциально-алгебраической системы

$$A_{k+1}(t)\,\theta'(t) = B_{k+1}(t)\,\theta(t) + f_{k+1}(t), \quad A_{k+1}(t) := P^{(k+1)}_1(t) \in \mathbb{R}^{\sigma_k\times\rho_k}; \tag{22}$$

здесь

$$B_{k+1}(t) := C^{(k)}_{11}(t)P^{(k)}_1(t) + C^{(k)}_{12}(t)P^{(k)}_2(t) - A'_{k+1}(t),$$

кроме того

$$f_{k+1}(t) := C^{(k)}_{11}(t)f^{(k+1)}_1(t) + C^{(k)}_{12}(t)f^{(k+1)}_2(t) + g^{(k)}_1(t) - \left(f^{(k+1)}_1(t)\right)'.$$

При условии [8, 10]

$$\left\{\begin{array}{l} P_{A^*(t)} \neq 0, P_{A^*_1(t)} \neq 0, ..., P_{A^*_k(t)} \neq 0, P_{A^*_{k+1}(t)} \equiv 0, P_{D^*_0}(t)g^{(0)}_2(t) \equiv 0, ..., \\ P_{D^*_k}(t)g^{(k)}_2(t) \equiv 0, A^+_{k+1}(t)B_{k+1}(t) \in \mathbb{C}[a;b], A^+_{k+1}(t)f_{k+1}(t) \in \mathbb{C}[a;b], \\ S^{-1}_0(t)D^+_0(t)g^{(0)}_2(t) \in \mathbb{C}[a;b] \end{array}\right. \tag{23}$$

система (22) разрешима относительно производной:

$$\theta' = A^{+}_{k+1}(t)B_{k+1}(t)\,\theta + \mathfrak{F}_{k+1}(t,\nu_{k+1}(t)), \quad \nu_{k+1}(t) \in \mathbb{C}_{\rho_{k+1}}[a;b]; \quad (24)$$

здесь $\mathfrak{F}_{k+1}(t,\nu_{k+1}(t)) := A^{+}_{k+1}(t)f_{k+1}(t) + P_{A_{\rho_{k+1}}}(t)\nu_{k+1}(t)$. Кроме того $P_{A^*_{k+1}(t)}$ – матрица-ортопроектор [9]: $P_{A^*_{k+1}}(t) : \ \mathbb{R}^{\sigma_k} \to \mathbb{N}(A^*_{k+1}(t))$, $P_{A_{\rho_{k+1}}}(t)$ – $(\rho_k \times \rho_{k+1})$ – матрица, составленная из ρ_{k+1} линейно-независимых столбцов $(\rho_k \times \rho_k)$– матрицы-ортопроектора $P_{A_{k+1}}(t) : \mathbb{R}^{\rho_k} \to \mathbb{N}(A_{k+1}(t))$. Заметим, что при условии (23)

$$1 \le \mathrm{rank} A_{k+1}(t) := \sigma_{k+1} = \sigma_k < \sigma_{k-1} < \ldots < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0 < \min(m,n).$$

В силу конечности числа строк $m \in \mathbb{N}$ матриц $A(t)$ и $B(t)$, при условии (23), последовательность $\{\sigma_k\}$ монотонно убывающая, причем ограниченная снизу, следовательно, согласно теореме Вейерштрасса [15, с. 102] последовательность $\{\sigma_k\}$ имеет предел $\sigma_p \ge 1$. При условии

$$P_{A^*(t)} \neq 0, \ P_{A^*_1(t)} \neq 0, \ \ldots, \ P_{A^*_k(t)} \neq 0, \ P_{A^*_{k+1}(t)} \equiv 0,$$

$$P_{D^*_0}(t) g_2^{(0)}(t) \equiv 0, \ \ldots, \ P_{D^*_k}(t) g_2^{(k)}(t) \equiv 0$$

будем говорить, что для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) имеет место вырождение порядка $p := k+1$. При условии (23) система (24), а следовательно и система (1) разрешимы. Действительно, обозначим $U_p(t)$ нормальную фундаментальную матрицу:

$$U'_p(t) = A^{+}_p(t)B_p(t)U_p(t), \quad U_p(a) = I_{\rho_{p-1}}$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (24). При условии (23) система (24), а следовательно и система (1), имеет решение вида

$$z(t, c_{\rho_p}) = \prod_{i=0}^{p} S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}}\, U_p(t) c_{\rho_p} + \prod_{i=0}^{p-1} S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}}\, S_{p-1}^{-1}(t)$$

$$\times \Big\{ P_{D_{\rho_{p-1}}} K\Big[\mathfrak{F}_p(s,\nu_p(s))\Big](t) - D^{+}_{p-1}(t) g_p^{(1)}(t) \Big\}, -S_0^{-1}(t) D_0^{+}(t) g_2^{(0)}(t),$$

где

$$K\Big[\mathfrak{F}_p(s,\nu_p(s))\Big](t) := U_p(t) \int_a^t U_p^{-1}(s)\, \mathfrak{F}_2(s,\nu_p(s))\, ds, \quad c_{\rho_p} \in \mathbb{R}^{\rho_p}.$$

Теорема. *В невырожденном случае, при условии* (2) *для любой непрерывной вектор-функции* $f(t) \in \mathbb{C}_m[a,b]$ *система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

зависящее от произвольной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a,b]$.

В случае вырождения первого порядка, при условии (9) *линейная дифференциально-алгебраическая система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c_{\rho_1}) = X_1(t)c_{\rho_1} + K\Big[f(s), \nu_1(s)\Big](t),$$

$$X_1(t) := P_{D_{\rho_0}} S_0^{-1}(t) U_1(t), \ c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

зависящее от произвольной непрерывной вектор-функции $\nu_1(t) \in \mathbb{C}_{\rho_1}[a,b]$.

В случае вырождения второго порядка, при условии (16) *линейная дифференциально-алгебраическая система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c_{\rho_2}) = X_2(t)c_{\rho_2} + K\Big[f(s), \nu_2(s)\Big](t), \quad c_{\rho_2} \in \mathbb{R}^{\rho_2},$$

зависящее от произвольной непрерывной вектор-функции $\nu_2(t) \in \mathbb{C}_{\rho_2}[a,b]$.

В случае вырождения порядка p, *при условии* (23) *линейная дифференциально-алгебраическая система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c_{\rho_p}) = X_p(t)c_{\rho_p} + K\Big[f(s), \nu_p(s)\Big](t),$$

$$X_p(t) := \prod_{i=0}^{p} S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}} U_p(t), c_{\rho_p} \in \mathbb{R}^{\rho_p}, -S_0^{-1}(t) D_0^{+}(t) g_2^{(0)}(t),$$

зависящее от произвольной непрерывной вектор-функции $\nu_p(t) \in \mathbb{C}_{\rho_p}[a,b]$. *Здесь*

$$K[f(s), \nu_p(s)](t)$$
$$:= \prod_{i=0}^{p-1} S_i^{-1}(t) P_{D_{\rho_i}} S_{p-1}^{-1}(t) \Big\{ P_{D_{\rho_{p-1}}} K\Big[\mathfrak{F}_p(s, \nu_p(s))\Big](t) - D_{p-1}^{+}(t) g_p^{(1)}(t) \Big\}$$

– обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a) = 0$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1).

При условии

$$P_{A^*(t)} \neq 0, \quad P_{A_1^*(t)} \neq 0, \ \dots \ , \ P_{A_p^*(t)} \equiv 0, \quad P_{D_{p-1}^*}(t) g_p^{(1)}(t) \equiv 0,$$

но $A_p^+(t)B_p(t) \notin \mathbb{C}_{n\times n}[a;b]$, либо $A_p^+(t)g_p(t) \notin \mathbb{C}[a;b]$, система (1) разрешима, но решение $z(t) \notin \mathbb{C}_n^1[a,b]$ не является искомым. При условии

$$P_{A^*(t)} \neq 0, P_{A_1^*(t)} \equiv 0, ..., P_{A_p^*(t)} \equiv 0, P_{D_0^*}(t) f_2(t) \equiv 0, ..., P_{D_1^*}(t) g_2^{(1)}(t) \neq 0$$

система (1) не разрешима.

Пример 3. *Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет дифференциально-алгебраическая система*

$$A(t)\, z'(t) = B(t) z(t) + f(t), \qquad f(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^*, \qquad (25)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{A^*(t)} \neq 0$, постольку условие (2) не выполнено, при этом матрица $A(t)$ может быть представлена в виде

$$A(t) = R_0(t) \cdot J_{\sigma_0} \cdot S_0(t), \ J_{\sigma_0} := \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$R_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица $A_1(t)$ вырождена, поэтому условие (9) не выполнено, при этом матрица $A_1(t)$ может быть представлена в виде

$$A_1(t) = R_1(t) \cdot J_{\sigma_1} \cdot S_1(t), \quad R_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1(t) = I_2, \quad \sigma_1 = 1;$$

здесь $R_1(t)$ и $S_1(t)$ — невырожденные матрицы. Поскольку условие $P_{D_1^*}(t) g_2^{(1)}(t) = 0$ выполнено, находим матрицу $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, для которой выполнено условие (23), следовательно система (25) разрешима. В данном случае матрица $A_2(t)$ невырождена, при этом $P_{A_2}(t) \neq 0$, $P_{A_{\rho_2}}(t) \neq 0$, поэтому искомое решение

$$z(t, c_1) = X_2(t) c_1 + K[f(s)](t), \ X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{\frac{t}{3}} & -e^{\frac{t}{3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K[f(s)](t) = \begin{pmatrix} -1 & 3\left(1 - e^{\frac{t}{3}}\right) & t \end{pmatrix}^*$$

не зависит от произвольной непрерывной функции $\nu_2(t)$, в данном случае $\nu_2(t) := 1$.

Предложенная в статье схема исследования дифференциально-алгебраических систем аналогично [16, 17] может быть перенесена на матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи. С другой стороны, в случае неразрешимости дифференциально-алгебраические краевые задачи могут быть регуляризованы аналогично [18, 19]. Предложенная в статье схема исследования дифференциально-алгебраических систем аналогично [9, 20, 21] может быть перенесена на нелинейные матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи, в том числе, в частных производных [22–24].

Литература

[1] S. L. Campbell, *Singular Systems of differential equations*, San Francisco–London–Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

[2] В. Ф.Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Новосибирск, Наука, 1996.

[3] Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования*, Новосибирск, Наука, 1998.

[4] Э. Хайрер, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи*, М., Мир, 1999.

[5] В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Новосибирск, Наука, 2003.

[6] А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, К., Вища школа, 2000.

[7] С. М. Чуйко, *Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем* // Комп. исследов. и моделирование, **5** (2013), No. 5, 769–783.

[8] S. M. Chuiko, *A generalized matrix differential-algebraic equation* // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), **210** (2015), No. 1, 9–21.

[9] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2-th edition, Berlin, Boston, De Gruyter, 2016.

[10] С. М. Чуйко, *Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы* // Spectral and Evolution Problems, **23** (2013), 148–157.

[11] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, 3 изд., М., Изд. МЦНМО, 2009.

[12] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, М., Наука, 1977.

[13] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., Наука, 1988.

[14] S. M. Chuiko, *A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action* // Differential Equations, **37** (2001), No. 8, 1189–1193.

[15] Л. Д. Кудрявцев, *Курс математического анализа, Том 1*, М., Высшая школа, 1988.

[16] S. M. Chuiko, *On the solvability of a matrix boundary-value problem* // Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory", **132** (2017), 139–143.

[17] S. M. Chuiko, *To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem* // Journal of Mathematical Sciences, **227** (2017), No. 1, 13–25.

[18] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, М., Наука, 1986.

[19] S. M. Chuiko, *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem* // Journal of Mathematical Sciences, **220** (2017), No. 5, 591–602.

[20] Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, М., Наука, 1979.

[21] S. M. Chuiko, *Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation* // Miskolc Mathematical Notes, **17** (2016), No. 1, 139–150.

[22] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends* // Journal of Mathematical Sciences, **210** (2015), 22–51.

[23] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, A. Yefimushkin, *On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane* // Journal of Mathematical Sciences, **214** (2016), 200–219.

[24] I. I. Skrypnik, *Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption* // Israel Journal of Mathematics, **215** (2016), No. 1, 163–179.

[25] S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem* // Siberian Mathematical Journal, **56** (2015), No. 4, 752–760.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина
E-Mail: `chujko-slav@inbox.ru`