Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 3, 345 – 360

Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності у просторі L_∞

О. В. Федуник-Яремчук, К. В. Соліч

(*Представлена В. Я. Гутлянським*)

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_∞ за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, які підпорядковані деяким умовам.

2010 MSC. 42B99.

Ключові слова та фрази. Ортопроекційний поперечник, мішаний модуль неперервності, лінійний оператор, ядро Валле Пуссена, ядро Фейєра.

1. Вступ

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, в якому норма визначається таким чином

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Відповідно $L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ з нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Стаття надійшла в редакцію 03.08.2017

ISSN 1810 – 3200.

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0 \ , \quad j = \overline{1,d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, і $t = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=\overline{1,d}}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_d}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l(\dots(\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана різниця порядку l з векторним кроком $h = (h_1, \dots, h_d)$, а різниця $l-$го порядку з кроком h_j за змінною x_j визначається наступним чином

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Нехай $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, а $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Тоді класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ означаються наступним чином [2]:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \ \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, ..., t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1,d}$). Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами H^{Ω}_p, які були розглянуті М. М. Пустовойтовим в [3].

В подальших міркуваннях нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Для цього нам знадобляться відповідні позначення.

Кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, ..., k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1,d} \right\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d), 1 < p < \infty$, позначимо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, $(k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Отже, нехай $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином [2]:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\} \quad (1.1)$$

при $1 \le \theta < \infty$ та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le 1 \right\}. \qquad (1.2)$$

Тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Наведені означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна поширити і на крайні випадки $p = 1$ і $p = \infty$, дещо змінивши в (1.1) і (1.2) "блоки" $\delta_s(f)$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j)\right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_s(f) := A_s(f, x) = (f * A_s)(x).$$

Тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, можна означити наступним чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\} \qquad (1.3)$$

при $1 \le \theta < \infty$ та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_s \frac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le 1 \right\}. \qquad (1.4)$$

Зазначимо, що співвідношення (1.3) і (1.4) були отримані в роботах [4] і [3] відповідно.

Зауважимо також, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$ та Нікольського $B^{r}_{p,\infty} = H^{r}_{p}$ (див., наприклад, [5]).

Нижче будемо досліджувати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ такого вигляду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{d} \frac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \displaystyle\prod_{j=1}^{d} t_j = 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Тут і надалі розглядаються логарифми за основою 2, і

$$\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log \frac{1}{t_j}\right\}.$$

Крім цього будемо вважати, що $0 < r < l$, а значить для функції $\Omega(t)$ вигляду (1.5) виконуються властивості $1 - 4$ і умови (S) та (S_l).

Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p < \infty$, в просторі L_∞. Нагадаємо, що поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [6].

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$. Покладемо

$$(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(x)\overline{u}_i(x)dx,$$

де $\overline{u}_i$– функція комплексно-спряжена до функції u_i.

Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ величина

$$d^{\perp}_M(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f\in F} \left\| f - \sum_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i \right\|_q \tag{1.6}$$

називається ортопроекційним поперечником (Фур'є–поперечником) цього класу у просторі $L_q(\pi_d)$.

У роботі, крім ортопроекційних поперечників, будемо досліджувати величини $d^B_M(F, L_q)$, розглянуті також В. М. Темляковим (див., наприклад, [7]), і які визначаються наступним чином:

$$d^B_M(F, L_q) = \inf_{G\in L_M(B)_q} \sup_{f\in F\cap D(G)} \|f - Gf\|_q\,. \tag{1.7}$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься у підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \ge 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, виконується нерівність $\left\|Ge^{i(k,\cdot)}\right\|_2 \le B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \le 1$ для всіх m.

Із (1.6) і (1.7) легко бачити, що величини $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d^B_M(F, L_q) \le d^{\perp}_M(F, L_q). \tag{1.8}$$

На сьогодні відомо багато робіт, в яких досліджувалися величини $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$ для тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7–11], в яких вивчались величини (1.6) і (1.7) для класів функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p, $B^r_{p,\theta}$ та H^{Ω}_p, і в яких можна ознайомитись з більш детальною бібліографією. Для класів функцій H^{Ω}_p, $B^{\Omega}_{p,\theta}$ двох змінних, які визначаються функцією $\Omega(t)$, що задана формулою (1.5), оцінки величин (1.6) і (1.7) були знайдені відповідно в роботах [12] і [13]. Величини $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ і $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ для класів функцій багатьох змінних із заданою функцією $\Omega(t)$ виду (1.5) при умові, що $b_j < r$, $j = \overline{1,d}$, розглядались в роботах [14–17].

2. Допоміжні твердження

Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Як зазначалось вище, $\Omega(t)$ – функція виду (1.5). Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d): \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1,d}, \ \Omega(2^{-s}) \ge \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

Зазначимо, що наближення певних класів періодичних функцій багатьох змінних із мішаною узагальненою гладкістю тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з множин, які є аналогами $Q(N)$, було розпочато в роботі [18], а згодом наближення тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік з множин $Q(N)$ вивчались в роботах [14, 19, 20] та інших.

Має місце твердження.

Лема 2.1. [11] *Для кількості елементів множини $Q(N)$ виконуються порядкові рівності:*

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}+\nu-1},$$

якщо $b_1 \le \ldots \le b_\nu < r < b_{\nu+1} \le \ldots \le b_d$;

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}},$$

якщо $r \le b_1 \le \ldots \le b_d,\ b_2 > r$.

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Для формулювання наступних тверджень зауважимо, що згідно (1.5) означення множини $\chi(N)$ запишеться наступним чином:

$$\chi(N) = \Big\{s = (s_1, ..., s_d):\ s_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1, d},\ \prod_{j=1}^{d} 2^{rs_j} s_j^{b_j} \le N\Big\}.$$

Відповідно

$$\chi^{\perp}(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N).$$

Далі, нехай

$$\Theta(N) = \Big\{s = (s_1, ..., s_d):\ s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d},\ \frac{1}{2^l N} \le \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N}\Big\}.$$

У [21] встановлено, що для кількості елементів множини $\Theta(N)$ має місце порядкова рівність

$$|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Лема 2.2. [11] *Для функції $\Omega(t)$, яка визначена рівністю* (1.5) *при $0 < \beta < r$, $0 < p < \infty$ справедливе співвідношення*

$$\sum_{s\in\chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s})2^{\|s\|_1\beta}\big)^p \ll \sum_{s\in\Theta(N)} \big(\Omega(2^{-s})2^{\|s\|_1\beta}\big)^p,$$

де $||s||_1 = s_1 + \ldots + s_d$.

Лема 2.3. [11] *Якщо* $\gamma_1 \le \ldots \le \gamma_\nu < 1 < \gamma_{\nu+1} \le \ldots \le \gamma_d$, *то*

$$\sum_{s\in\Theta(N)} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\gamma_j} \asymp \big(\log N\big)^{-\gamma_1-\ldots-\gamma_\nu+\nu-1}.$$

Якщо $1 \le \gamma_1 \le \ldots \le \gamma_d, \ \ \gamma_2 > 1$, *то*

$$\sum_{s\in\Theta(N)} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\gamma_j} \asymp \big(\log N\big)^{-\gamma_1}.$$

Теорема 2.1. [22] *Нехай* T_n *– тригонометричний поліном порядку* $n = (n_1, \ldots, n_d)$, *тобто*

$$T_n(x) = \sum_{|k_1|\le n_1} \cdots \sum_{|k_d|\le n_d} c_{k_1,\ldots,k_d} e^{i(k,x)},$$

де n_j, $j = \overline{1,d}$, *— натуральні числа,* $c_{k_1,\ldots,k_d}$ *— довільні коефіцієнти. Тоді при* $1 \le p < q \le \infty$ *виконується нерівність*

$$\|T_n\|_q \le 2^d \bigg(\prod_{j=1}^{d} n_j\bigg)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n\|_p \ . \tag{2.1}$$

Нерівність (2.1) була встановлена С. М. Нікольським і отримала назву "нерівності різних метрик". В одновимірному випадку при $p = \infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [23].

3. Основні результати

Переходячи до формулювання і доведення отриманих результатів будемо вважати, що $M = |Q(N)|$. Спочатку розглянемо випадок $b_1 \le \ldots \le b_\nu < r < b_{\nu+1} \le \ldots \le b_d$. Тоді, згідно з лемою 2.1, отримаємо

$$M \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}+\nu-1},$$
$$\log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r \big(\log M\big)^{b_1+\ldots+b_\nu-(\nu-1)r}.$$

Теорема 3.1. *Нехай* $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$ *— функція виду* (1.5). *Тоді при* $\frac{1}{p} < r < l$, $\frac{b_j}{rp} > 1, j = \nu+1, \ldots, d$, *мають місце співвідношення*

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp d^{B}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$$
$$\asymp M^{-r+\frac{1}{p}} \big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_\nu+(\nu-1)\left(r+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.1}$$

Доведення. Встановимо спочатку в (3.1) оцінки зверху. Згідно (1.8) достатньо встановити оцінку зверху для ортопроекційного поперечника $d_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$. З цією метою розглянемо наближення функцій $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами $t_{Q(N)}$ виду

$$t_{Q(N)}(x) = \sum_{s \in \chi(N)} \delta_s(f, x).$$

Нехай q_0 — довільне число, яке задовольняє умову $p < q_0 < \infty$. Тоді, скориставшись нерівністю Мінковского, нерівністю різних метрик Нікольського, а також співвідношенням

$$\|\delta_s(f)\|_{q_0} \asymp \|A_s(f)\|_{q_0},\ 1 < q_0 < \infty,$$

для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ будемо мати

$$\|f - t_{Q(N)}\|_\infty = \Big\| f - \sum_{s \in \chi(N)} \delta_s(f) \Big\|_\infty \le \sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \|\delta_s(f)\|_\infty$$

$$\ll \sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} 2^{\frac{\|s\|_1}{q_0}} \|\delta_s(f)\|_{q_0} \asymp \sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} 2^{\frac{\|s\|_1}{q_0}} \|A_s(f)\|_{q_0}$$

$$\ll \sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} 2^{\frac{\|s\|_1}{q_0}} 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_0}\right)} \|A_s(f)\|_p$$

$$= \sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega(2^{-s}) 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|A_s(f)\|_p = I_1.$$

Застосувавши до I_1 нерівність Гельдера з показником θ (з природною модифікацією при $\theta = 1$) і скориставшись лемою 2.2, одержимо

$$I_1 \le \Bigg(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f)\|_p^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s}) 2^{\frac{\|s\|_1}{p}}\big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \Bigg(\sum_{s \in \chi^{\perp}(N)} \big(\Omega(2^{-s}) 2^{\frac{\|s\|_1}{p}}\big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \Bigg(\sum_{s \in \Theta(N)} \big(\Omega(2^{-s}) 2^{\frac{\|s\|_1}{p}}\big)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll N^{-1} \Bigg(\sum_{s \in \Theta(N)} 2^{\|s\|_1 \frac{\theta}{p(\theta-1)}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} = I_2.$$

Далі враховуючи, що для $s \in \Theta(N)$

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j}{r}},$$

і скориставшись лемою 2.3 із $\frac{b_j}{rp} > 1, j = \nu + 1, \ldots, d$, будемо мати

$$I_2 \asymp N^{-1+\frac{1}{rp}} \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j\theta}{rp(\theta-1)}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}}$$

$$\asymp N^{-1+\frac{1}{rp}} \big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{pr}-\ldots-\frac{b_\nu}{pr}+(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}$$

$$\asymp \bigg(M^r \big(\log M\big)^{b_1+\ldots+b_\nu-(\nu-1)r}\bigg)^{-1+\frac{1}{pr}} \big(\log M\big)^{-\frac{b_1}{pr}-\ldots-\frac{b_\nu}{pr}+(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}$$

$$= M^{-r+\frac{1}{p}} \big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_\nu+(\nu-1)\left(r+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Таким чином, згідно з означенням ортопроекційного поперечника з проведених міркувань отримаємо оцінку зверху для $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$ і відповідно для величини $d^{B}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$.

Перейдемо до встановлення в (3.1) оцінок знизу. Оскільки має місце нерівність (1.8), то достатньо отримати оцінку знизу для величини $d^{B}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$.

За допомогою міркувань, аналогічних до тих, що були проведені в [24], можна показати існування такої множини $\Theta_1(N) \subset \Theta(N)$, що для $s = (s_1, ..., s_d) \in \Theta_1(N)$ будуть виконуватись співвідношення

$$s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1, d} \quad \text{і} \quad |\Theta_1(N)| \asymp \big(\log N\big)^{d-1}.$$

Аналогічно можна стверджувати, що існує множина

$$\Theta_1^{(\nu)}(N) = \{s \in \Theta(N) : s_j \asymp \log N,\ j = 1, \ldots, \nu,\ s_j = 1,\ j = \nu+1, \ldots, d\}$$

така, що

$$|\Theta_1^{(\nu)}(N)| \asymp \big(\log N\big)^{\nu-1}.$$

Нехай K_n — ядро Фейєра порядку n, тобто

$$K_n(t) = \sum_{|k|\le n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}.$$

Покладемо

$$g_1(x) = \sum_{s\in\Theta_1^{(\nu)}(N)} \mathcal{K}_s^{(\nu)}(x) \prod_{j=\nu+1}^{d} e^{ix_j},$$

де

$$\mathcal{K}_s^{(\nu)}(x) = \prod_{j=1}^{\nu} e^{ik_j^{s_j} x_j} K_{2^{s_j-2}}(x_j),$$

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2; \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1,\nu}. \end{cases}$$

Розглянемо функцію

$$g_2(x) = C_3 N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{\nu-1}{\theta}} g_1(x),\ C_3 > 0,$$

і покажемо, що при відповідному виборі сталої C_3 вона належить до класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Дійсно, скориставшись тим, що для ядра Фейєра

$$||K_n||_p \asymp n^{1-\frac{1}{p}}\ , 1 \leq p \leq \infty,$$

будемо мати

$$\left\|\mathcal{K}_s^{(\nu)}\right\|_p \asymp 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\ , 1 \leq p \leq \infty,$$

і, таким чином, можемо записати

$$\|g_2\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_2)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{\nu-1}{\theta}}$$

$$\times\left(\sum_{s\in\Theta_1^{(\nu)}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_1)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{\nu-1}{\theta}}$$

$$\times\left(\sum_{s\in\Theta_1^{(\nu)}(N)} 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} = I_3. \tag{3.2}$$

Тепер враховуючи, що для $s \in \Theta_1^{(\nu)}(N) \subset \Theta(N)$ виконуються співвідношення

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}}\prod_{j=1}^{d} s_j^{-\frac{b_j}{r}}$$

і

$$s_j \asymp \log N,\ j = 1,\ldots,\nu,\ s_j = 1,\ j = \nu{+}1,\ldots d,\ |\Theta_1^{(\nu)}(N)| \asymp \big(\log N\big)^{\nu-1},$$

будемо мати

$$I_3 \asymp \Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{-\frac{\nu-1}{\theta}}$$

$$\times\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}}\Big)^{1-\frac{1}{p}}|\Theta_1^{(\nu)}(N)|^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\asymp \big(\log N\big)^{-\frac{\nu-1}{\theta}}\big(\log N\big)^{\frac{\nu-1}{\theta}} = 1. \tag{3.3}$$

Тому співставляючи (3.2) і (3.3) приходимо до висновку, що $g_2 \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ із відповідною сталою $C_3 > 0$.

У роботі [11] встановлено, що існує вектор $y^* = (y_1^*, ..., y_d^*)$ такий, що для $G \in L_M(B)_\infty$ виконується співвідношення

$$\|g_1(x-y^*) - Gg_1(x-y^*)\|_\infty \gg M. \tag{3.4}$$

Таким чином, скориставшись оцінкою (3.4), отримаємо

$$\|g_2(x-y^*) - Gg_2(x-y^*)\|_\infty$$

$$\gg N^{-1}\Big(N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}-\ldots-\frac{b_\nu}{r}+\nu-1}\Big)^{\frac{1}{p}-1}\big(\log N\big)^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}$$

$$\times \|g_1(x-y^*) - Gg_1(x-y^*)\|_\infty$$

$$\gg M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_\nu+(\nu-1)r} M^{\frac{1}{p}-1}\big(\log M\big)^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} M$$

$$= M^{-r+\frac{1}{p}}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_\nu+(\nu-1)\left(r+1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінки знизу в (3.1) встановлено. Теорему 3.1 доведено. □

В наступному твердженні розглянемо інші співвідношення між числами $r, b_1, \ldots, b_d$. Тобто нехай $r \le b_1 \le \ldots \le b_d$, $b_2 > r$. В цьому випадку, згідно з лемою 2.1, отримаємо

$$M \asymp N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}},$$
$$\log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r\big(\log M\big)^{b_1}.$$

Припустимо, що

$$b_1 = \ldots = b_\nu < b_{\nu+1} \le \ldots \le b_d.$$

Тоді для $\nu = 1$ буде виконуватись $r \le b_1 < b_2$. Якщо ж $\nu \ge 2$, то $b_1 > r$.

Теорема 3.2. *Нехай* $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$*– функція виду* (1.5)*. Тоді при* $\frac{1}{p} < r < l$, $\frac{b_2}{rp} > 1$ *мають місце співвідношення*

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_\infty) \asymp d_M^{B}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_\infty) \asymp M^{-r+\frac{1}{p}}\big(\log M\big)^{-b_1}. \qquad (3.5)$$

Доведення. Оскільки при $1 \le \theta < \infty$ виконується вкладення $B_{p,\theta}^{\Omega} \subset H_p^{\Omega}$, то оцінки зверху в (3.5) випливають із відповідної оцінки $d_M^{\perp}(H_p^{\Omega}, L_\infty)$, одержаної в [11].

Для доведення в (3.5) оцінок знизу, достатньо отримати оцінку знизу для величини $d_M^{B}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_\infty)$.

Виберемо вектор $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_d) \in \Theta(N)$ таким чином, щоб

$$\tilde{s}_1 \asymp \log N, \quad \tilde{s}_2 = \ldots = \tilde{s}_d = 1,$$

і покладемо

$$g_3(x) = \mathcal{K}_{\tilde{s}}(x) = e^{i(k^{\tilde{s}},x)} K_{2^{\tilde{s}_1-2}}(x_1),$$

де $k^{\tilde{s}} = (2^{\tilde{s}_1-1} + 2^{\tilde{s}_1-2}, 1, \ldots, 1)$.

Розглянемо функцію

$$g_4(x) = C_4 N^{-1} 2^{||\tilde{s}||_1\left(\frac{1}{p}-1\right)} g_3(x),\ C_4 > 0.$$

Покажемо, що функція g_4 при відповідному виборі сталої C_4 належить до класу $B_{p,\theta}^{\Omega}$.

Дійсно, скориставшись властивостями ядра Фейєра, будемо мати

$$\|g_4\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_4)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll N^{-1} 2^{||\tilde{s}||_1\left(\frac{1}{p}-1\right)} \left(\Omega^{-\theta}(2^{-\tilde{s}})\|A_{\tilde{s}}(g_3)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll 2^{||\tilde{s}||_1\left(\frac{1}{p}-1\right)} \|A_{\tilde{s}}(g_3)\|_p \asymp 2^{||\tilde{s}||_1\left(\frac{1}{p}-1\right)} 2^{||\tilde{s}||_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} = 1.$$

Отже, $g_4 \in B_{p,\theta}^{\Omega}$ з відповідною сталою $C_4 > 0$.

У роботі [11] встановлено, що існує вектор $y^* = (y_1^*, ..., y_d^*)$ такий, що для $G \in L_M(B)_\infty$ виконується співвідношення

$$\|g_3(x-y^*) - Gg_3(x-y^*)\|_\infty \gg M. \qquad (3.6)$$

Враховуючи, що

$$2^{\|\tilde{s}\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}}\big(\log N\big)^{-\frac{b_1}{r}},$$

а також скориставшись оцінкою (3.6), отримаємо

$$\|g_4(x-y^*) - Gg_4(x-y^*)\|_\infty$$

$$\gg N^{-1} 2^{\|\tilde{s}\|_1\left(\frac{1}{p}-1\right)} \|g_3(x-y^*) - Gg_3(x-y^*)\|_\infty$$

$$\gg M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1} M^{\frac{1}{p}-1} M = M^{-r+\frac{1}{p}}\big(\log M\big)^{-b_1}.$$

Оцінки знизу в (3.5) встановлено. Теорему 3.2 доведено. □

Зауваження 3.1. Результати теорем 3.1 і 3.2 для класів H^{Ω}_{p} встановлені М. М. Пустовойтовим в [11], причому при виконанні умов теореми 3.2 мають місце порядкові рівності

$$d^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp d^{B}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp d^{\perp}_{M}(H^{\Omega}_{p}, L_\infty) \asymp d^{B}_{M}(H^{\Omega}_{p}, L_\infty),$$

тобто оцінки величин $d^{\perp}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$ і $d^{B}_{M}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$ не залежать від параметра θ.

Література

[1] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. о-ва, **5** (1956), 483–522.

[2] S un Yongsheng, Wang Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness* // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **219** (1997), 356–377.

[3] Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math., **20**, (1994), 35–48.

[4] С. А. Стасюк, О. В. Федуник, *Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн., **58** (2006), No. 5, 692–704.

[5] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **187** (1989), 143–161.

[6] В. Н. Темляков, *Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных* // Докл. АН СССР, **267** (1982), No. 2, 314–317.

[7] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **178** (1986), 1–112.

[8] В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью* // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **189** (1989), 138–168.

[9] А. С. Романюк, *Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных* // Мат. сб., **199** (2008), No. 2, 93–114.

[10] А. С. Романюк, *Поперечники и наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных* // Anal. Math., **37** (2011), 181–213.

[11] Н. Н. Пустовойтов, *Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители* // Anal. Math., **34** (2008), 187–224.

[12] Н. Н. Пустовойтов, *Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности* // Изв. РАН. Серия матем., **64** (2000), 123–144.

[13] А. Ф. Конограй, *Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій двох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності* // Укр. мат. журн., **63** (2011), No. 2, 176–186.

[14] А. Ф. Конограй, *Оценки аппроксимативных характеристик классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности* // Мат. заметки, **95** (2014), No. 5, 734–749.

[15] А. Ф. Конограй, О. В. Федуник–Яремчук, *Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності* // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **10** (2013), No. 1, 148–160.

[16] А. Ф. Конограй, О. В. Федуник–Яремчук, *Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності* // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **11** (2014), No. 3, 146–165.

[17] А. Ф. Конограй, О. В. Федуник–Яремчук, *Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності* // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12** (2015), No. 4, 205–215.

[18] А. С. Романюк, *О приближении классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн., **44** (1992), No. 5, 662–672.

[19] С. А. Стасюк, *Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$* // Мат. заметки, **87** (2010), No. 1, 108–121.

[20] С. А. Стасюк, *Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных* // Тр. ИММ УрО РАН, **20** (2014), No. 1, 247-257.

[21] Н. Н. Пустовойтов, *Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности* // Мат. заметки, **65** (1999), No. 1, 107–117.

[22] С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных* // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **38** (1951), 244–278.

[23] D. Jakson, *Certain problem of closest approximation* // Bull. Amer. Math. Soc., **39** (1933), 889–906.

[24] Н. Н. Пустовойтов, *О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида* // Anal. Math., **29** (2003), 201–218.

Відомості про авторів

Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: fedunyk@ukr.net

Катерина Василівна Соліч
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
E-Mail: solichkatia@gmail.com