Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 3, 309 – 329

Экстремальное разбиение комплексной плоскости с ограничениями для свободных полюсов

Александр К. Бахтин

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В геометрической теории функций комплексного переменного хорошо известны задачи об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. Одной из таких задач является задача о максимуме функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

где $\gamma \in (0, n]$, B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n \geqslant 2$, – попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ различные точки окружности, $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$. В работе рассмотрена более общая задача в которой ограничение $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ заменено на более общее условие.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, непересекающиеся области, лучевые системы точек, управляющий функционал, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного [1–26]. Многие такие задачи сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. В 1968 году в работе [10] П. М. Тамразов привлек внимание специалистов к исследованию экстремальных задач которым соответствуют квадратичные дифференциалы с не фиксированными полюсами, имеющими определенную свободу. В этой работе он

Статья поступила в редакцию 08.09.2017

рассмотрел и решил одну важную экстремальную задачу геометрической теории функций комплексного переменного с пятью свободными простыми полюсами. В работах [11, 12] эта идея П. М. Тамразова получила применение к экстремальным задачам о неналегающих областях, которые в дальнейшем получили название "экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности". Именно такие задачи и являются предметом изучения данной работы.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$ – функция Жуковского. Пусть $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$. Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B соотношением

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \ln r(B, \infty) + o(1), z \to a,$$
$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Задача 1. (Дубинин В.Н. [1]) При всех значениях параметра $\gamma \in (0, n]$ найти максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1.1}$$

где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n \geqslant 2$, – попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, и описать все экстремальные конфигурации из областей областей B_k и точек a_k, $k = \overline{0, n}$.

Нетрудно показать, что при $\gamma > n$ экстремальных конфигураций не существует. Эта проблема изучалась во многих работах (см., например, [3–7]). Но на данный момент в этой проблеме получены только частичные результаты. В 1988 году в работе [6] сформуллированная выше Задача 1 была решена для значения параметра $\gamma = 1$ и всех значений натурального параметра $n \geqslant 2$. А именно, было показано, что при условиях Задачи 1 справедливо неравенство

$$r(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0, n}$, — полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - 1)w^n + 1}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Л .В. Ковалев в 1996 году в работе [7] получил решение Задачи 1 при определенных достаточно жестких ограничениях на геометрию расположения систем точек на единичной окружности, а именно для таких систем точек для которых выполняются следующие неравенства

$$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma},\ k = \overline{1,n},\ n \geqslant 5,$$

где величины α_k определены ниже. В работе [21] показано, что результат Л. В. Ковальова справедлив и при $n = 4$. В 2003 году в работе [17] получено решение Задачи 1 при $\gamma \in (0,1]$. В монографии [3] 2008 года было показано, что аналог результата В. Н. Дубинина [6, теорема 4] выполняется для произвольного $\gamma \in \mathbb{R}^+$, но начиная с некоторого номера $n_0(\gamma)$. Некоторые частные случаи этой задачи рассмотрены в работах [4, 5, 22–25].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n}\right\}$ назовем n-***лучевой***, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, и

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Введем обозначения

$$\Gamma_k = \Gamma_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \quad \theta_k := \arg a_k,$$

$$a_{n+1} := a_1, \quad \theta_{n+1} := 2\pi, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1,$$

$$k = \overline{1,n}, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2.$$

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ та $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ введем “управляющий” функционал:

$$\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

В работах [3, 4, 26] был предложен метод “управляющих” функционалов, который позволяет ослабить требования на геометрию расположения систем точек. Благодаря этому удалось обобщить Задачу 1.

Класс n-лучевых систем точек, для которых $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, автоматически содержит все системы n различных точек единичной окружности.

Будем говорить, что n-лучевая система точек подчинена управляющему функционалу $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)$, если выполняется равенство $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$. Таким образом, постановку Задачи 1 можно обобщить на случай n-лучевых систем точек, подчиненных управляющему функционалу $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)$. И так сформулируем следующую задачу.

Задача 2. При всех значениях параметра $\gamma \in (0, n]$ найти максимум функционала (1.1), где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n-лучевая система точек, такая, что $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ – система взаимно непересекающихся областей таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$, и описать все экстремали.

Выше упомянутая работа Л. В. Ковалева [7] приводит нас к заключению, что весьма интересно рассмотреть Задачу 2 при определенных ограничениях на величины α_k, $k = \overline{1, n}$. Таким образом, имеет смысл рассмотреть Задачу 2 при определенных ограничениях на геометрию расположения свободных полюсов a_k, $k = \overline{1, n}$. В связи с этим сформулируем следующую задачу.

Пусть y_0 – корень уравнения

$$\ln \frac{4y^2}{4 - y^2} = \frac{2}{y^2}, \tag{1.2}$$

$y_0 \approx 1,32466$.

Задача 3. Найти максимум функционала (1.1), где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ – система взаимно непересекающихся областей таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, а n-лучевая система точек $\{a_k\}_{k=1}^n = A_n$ удовлетворяет условиям $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant T_0/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$, $y_0 \leqslant T_0 \leqslant 2$, и описать все экстремали.

Частичное решение задачи 2 и задачи 3 дают следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in [1, \gamma_n)$, $\gamma_n = \frac{1}{4} y_0^2 n^2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, где y_0 – корень уравнения* (1.2), *$k = \overline{1, n}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1, n})$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k), \tag{1.3}$$

где области Λ_0, Λ_k, и точки $\lambda_0 = 0$, λ_k, $k = \overline{1, n}$, есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{1.4}$$

Используя приближенное значение $y_0 \approx 1,32466$ мы можем получить более конкретное выражение для теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in [1, \gamma_n)$, $\gamma_n = 0,4386n^2$. *Тогда для любой n-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такой, что* $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $y_0 \approx 1,32466$, $k = \overline{1,n}$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,n})$, *справедливо неравенство* (1.3), *где области* Λ_0, Λ_k, *и точки* $\lambda_0 = 0$, λ_k, $k = \overline{1,n}$, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.4).

Доказательство. Рассмотрим систему функций

$$\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ является допустимим для разделяющего преобразования областей B_k, $k = \overline{0,n}$ относительно углов $\{\Gamma_k\}_{k=1}^n$.

Обозначим $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$ – область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$ – область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученная в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ – область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученная в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{\Gamma}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси.

Обозначим

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}, \quad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}, \quad k = \overline{1,n}, \quad \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{\Gamma_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{\Gamma_k}.$$

Тогда, используя соответствующие результаты работ [1, 3], получаем неравенства

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k=\overline{1,n}, \qquad (1.5)$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.6)$$

Условия реализации знака равенства в неравенствах (1.5), (1.6) полностью исследованы в теореме 1.9 [1].

Аналогично рассуждениям приведенным в [3] при доказательстве теоремы 5.2.1. получаем следующее неравенство для функционала (1.1)

$$\begin{aligned} I_n(\gamma) \quad &\leqslant \quad \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \quad \prod_{k=1}^{n}\alpha_k \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \qquad (1.7) \\ &\times \quad \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$y_3(\sigma^2, 1, 1, B_0, B_1, B_2, 0, a_1, a_2) = r^{\sigma^2}(B_0, 0) r(B_1, a_1) r(B_2, a_2), \ \sigma \in \mathbb{R}^+, \qquad (1.8)$$

где B_0, B_1, B_2 – взаимно непересекающиеся области, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,2}$, $a_0 = 0$. Учитывая (1.8), получаем

$$\begin{aligned} &I_n(\gamma) \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} y_3(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)})\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

В работе [6] полностью исследована задача о максимуме функционала (1.8) на тройках произвольных попарно непересекающихся областей B_0, B_1, B_2 расширенной комплексной плоскости таких, что

$a_k \in B_k$, $k = \overline{0,2}$, $a_0 = 0$, $a_k = (-1)^k i$ и получено следующее неравенство

$$y_3(\sigma^2, 1, 1, B_0, B_1, B_2, 0, i, -i) \leqslant S(\sigma) \tag{1.10}$$
$$= 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}, \quad \sigma \in [0,2],$$

и знак равенства в неравенстве (1.10) достигается, когда области B_0, B_1, B_2 являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(\sigma^2-4)w^2+\sigma^2}{w^2(w^2+1)^2}\,dw^2.$$

Заметим, что функционал (1.8) при $\sigma > 2$ не ограничен. Известно [18], что функционал

$$Y_3(t_1, t_2, t_3, D_1, D_2, D_3, d_1, d_2, d_3) \tag{1.11}$$
$$= \frac{r^{t_1}(D_1, d_1) \cdot r^{t_2}(D_2, d_2) \cdot r^{t_3}(D_3, d_3)}{|d_1-d_2|^{t_1+t_2-t_3} \cdot |d_1-d_3|^{t_1-t_2+t_3} \cdot |d_2-d_3|^{-t_1+t_2+t_3}},$$

где $t_k \in \mathbb{R}^+$, $\{D_k\}_{k=1}^3$ – произвольная система взаимно неналегающих областей таких, что $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1,2,3$, инвариантен относительно всех конформных автоморфизмов комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Полагая $t_1 = (\alpha_k\sqrt{\gamma})^2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, а $D_k = B_{k-1}$, $d_k = a_{k-1}$, $k = 1,2,3$, $a_0 = 0$, получаем, что функционал

$$\frac{y_3((\alpha_k\sqrt{\gamma})^2, 1, 1, B_0, B_1, B_2, a_0, a_1, a_2)}{|a_0-a_1|^{\gamma\alpha_k^2}|a_0-a_2|^{\gamma\alpha_k^2}|a_1-a_2|^{2-\gamma\alpha_k^2}}$$
$$= \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\,(B_0, 0)\, r\,(B_1, a_1)\, r\,(B_2, a_2)}{|a_1|^{\gamma\alpha_k^2}|a_2|^{\gamma\alpha_k^2}|a_1-a_2|^{2-\gamma\alpha_k^2}}$$

при каждом $k = \overline{1,n}$ инвариантен относительно конформных автоморфизмов плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Из соотношений (1.7) и (1.11), получаем

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}$$
$$\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.12}$$
$$\times \left[\prod_{k=1}^n |\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad |\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \tag{1.13}$$

$$|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Учитывая (1.11) и (1.12), имеем следующее соотношение

$$I_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k |a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot \left\{ \prod_{k=1}^{n} Y_3(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} |\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.14}$$

Правую часть неравенства (1.14) обозначим Δ. Тогда

$$\Delta = \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3,$$

где

$$T_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| \right),$$

$$T_2 = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|} \right)^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}},$$

$$T_3 = \left\{ \prod_{k=1}^{n} Y_3(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, поочередно исследуем величины T_1, T_2, T_3. Из соотношений (1.13) непосредственно вытекает, что

$$T_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot |a_k|$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k| = 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k|.$$

Аналогично предыдущему следует, что

$$\frac{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|} = \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} \cdot |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}$$

$$= \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}} \right)^{-1} = \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \right)^{-1} |a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}$$

$$= 2^{-1} \cdot \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{-1} \cdot |a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}.$$

Далее, непосредственно получаем

$$T_2 = 2^{-\frac{\gamma}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{-\frac{\gamma \alpha_k^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k + \alpha_{k-1})}.$$

Таким образом, подытоживая все выше сказанное, получим следующее равенство

$$\Delta = 2^{n-\frac{\gamma}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \cdot \mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n) \cdot T_3. \qquad (1.15)$$

Теперь приступим к преобразованию величины T_3. При каждом $k = \overline{1,n}$ несложно указать конформный автоморфизм $\zeta = T_k(z)$ плоскости комплексных чисел $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $T_k(0) = 0$, $T_k\left(\omega_k^{(s)}\right) = (-1)^s \cdot i$, $D_k^{(q)} := T_k\left(\Omega_k^{(q)}\right)$, $k = \overline{1,n}$, $s = 1,2$, $q = 0,1,2$. Тогда в силу указанной конформной инвариантности функционала (1.11), получаем следующее равенство

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, \Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, 0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}\right)$$
$$= Y_3\left(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, 0, -i, i\right),$$

где $k = \overline{1,n}$ и

$$Y_3\left(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, 0, -i, i\right)$$
$$= \frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(D_k^{(1)}, -i\right) \cdot r\left(D_k^{(2)}, i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}}.$$

Отсюда

$$\Delta = 2^{n-\frac{\gamma}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \cdot \mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)$$
$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(D_k^{(1)}, -i\right) \cdot r\left(D_k^{(2)}, i\right)}{2^{2-\gamma\alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего равенства и неравенств (1.12) и (1.15), окончательно получаем следующую оценку для функционала (1.1)

$$I_n(\gamma) \leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)\cdot 2^{-n+\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_n)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

С учетом условий теоремы 1, получим неравенство

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right) r\left(D_k^{(1)},-i\right) r\left(D_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.16}$$

Так как по условиям теоремы 1 величины α_k удовлетворяют условиям $0 < \sqrt{\gamma}\alpha_k \leqslant y_0$, $k = \overline{1,n}$, $y_0 \approx 1,32466$, то в силу (1.10) справедливо неравенство

$$y_3(\gamma\alpha_k^2, 1, 1, D_k^{(0)}, D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, 0, i, -i)$$

$$\leqslant 2^{\gamma\alpha_k^2+6}\cdot(\sqrt{\gamma}\alpha_k)^{\gamma\alpha_k^2}\cdot(2-\sqrt{\gamma}\alpha_k)^{-\frac{1}{2}(2-\sqrt{\gamma}\alpha_k)^2}\cdot(2+\sqrt{\gamma}\alpha_k)^{-\frac{1}{2}(2+\sqrt{\gamma}\alpha_k)^2}.$$

Отсюда и из (1.16) следует оценка

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}. \tag{1.17}$$

Тогда

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\left[\prod_{k=1}^{n} S(\tau_k)\right]^{1/2}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^n\left[\prod_{k=1}^{n} 2^{\tau_k^2+6}\cdot\tau_k^{\tau_k^2+2}\cdot(2-\tau_k)^{-\frac{1}{2}(2-\tau_k)^2}\cdot(2+\tau_k)^{-\frac{1}{2}(2+\tau_k)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\tau_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$.

Пусть

$$\Psi(x) = 2^{x^2+6}\cdot x^{x^2+2}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}.$$

Функция $\Psi(x)$ логарифмически выпукла вверх на интервале $(0, y_0]$. Так как $x_k \in (0, y_0]$, $k = \overline{1, n}$, тогда имеет место соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \Psi\left(x_k\right) \leqslant \ln \Psi\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}\right).$$

Это равносильно тому, что

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \Psi\left(x_k\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \ln\left(\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right).$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается когда $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = \frac{2\sqrt{\gamma}}{n}$, то есть когда $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$. В этом случае из (1.16) следует, что

$$I_n(\gamma) \leqslant I_n^0(\gamma) = \left(\frac{2}{n}\right)^n \left[r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_0, 0\right) r\left(D_1, -i\right) r\left(D_2, i\right)\right]^{\frac{n}{2}},$$

где D_0, D_1, D_2 – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(\frac{4\gamma}{n^2} - 4)w^2 + \frac{4\gamma}{n^2}}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2. \qquad (1.18)$$

Отсюда окончательно имеем

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Используя конкретное выражение для $\Psi\left(x\right)$, получаем основное неравенство теоремы 1. Квадратичный дифференциал (1.18) несложно представить в следующем виде

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(\gamma - n^2)w^2 + \gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2. \qquad (1.19)$$

Осуществляя в квадратичном дифференциале (1.19) замену переменной $w = -iz^{\frac{n}{2}}$ получаем квадратичный дифференциал (1.4). Знак равенства в неравенстве (1.3) проверяется непосредственно. Теорема 1 доказана. □

Приведем еще несколько следствий теоремы 1, но предварительно вычислим величину

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(\Lambda_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

где $0\cup\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^{n}$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (1.4).

Из результатов работ [1, 3, 6, 7] и свойств разделяющего преобразования, имеем

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{2}{n}\right)^n\left(\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Используя несложные преобразования, получаем

$$A=\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2},$$

$$B=\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=2^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}.$$

$$M=\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2-\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}},$$

$$N=\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}=\left(1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{2+\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}+\frac{2\gamma}{n^2}},$$

Отсюда следует, что

$$MN=\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}},$$

и

$$AB=2^{4\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}MN=2^{4\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{2\left(1+\frac{\gamma}{n^2}\right)}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}}.$$

Окончательно получаем

$$I_n^0(\gamma)=\left(\frac{2}{n}\right)^n\left(\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+4}\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{\left(2+\frac{2\gamma}{n^2}\right)}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{4\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Величина $I_n^0(\gamma)$ получена в работе [6] при $\gamma = 1$ и для произвольного γ в работах [7, 17]. Форма выражения $I_n^0(\gamma)$, которая используется в данной работе, была предложенна в [3].

Следствие 2. *При условиях Теоремы 1 справедливо следующее неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (1.4).

Далее в связи с постановкой задачи с ограничениями на углы α_k, $k = \overline{1, n}$, приведем некоторые другие результаты.

Следствие 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in [1, \gamma_n)$, $\gamma_n = \frac{1}{4}y_0^2 n^2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, где y_0 – корень уравнения* (1.2)*, $k = \overline{1, n}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1, n})$, справедливо неравенство* (1.3)*, где области Λ_0, Λ_k, и точки $\lambda_0 = 0$, λ_k, $k = \overline{1, n}$, есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.4).

Следствие 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in [1, \gamma_n)$, $\gamma_n = 0{,}4386n^2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $y_0 \approx 1{,}32466$, $k = \overline{1, n}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1, n})$, справедливо неравенство* (1.3)*, где области Λ_0, Λ_k, и точки $\lambda_0 = 0$, λ_k, $k = \overline{1, n}$, есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.4).

Следствие 5. *Пусть $n = 2$, $\gamma \in [1, \gamma_2)$, $\gamma_2 = y_0^2$. Тогда для любой 2-лучевой системы точек $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^2$ такой, что $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, где y_0 – корень уравнения* (1.2)*, $k \in \{1, 2\}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k \in \{1, 2\})$, справедливо неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0)\, r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2) \leqslant r^\gamma(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_1, \lambda_1)\, r(\Lambda_2, \lambda_2), \qquad (1.20)$$

где области Λ_0, Λ_1, Λ_2, *и точки* $\lambda_0 = 0$, λ_1, λ_2, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(w^2-1)^2}\,dw^2. \tag{1.21}$$

Следствие 6. *Пусть* $n = 2$, $\gamma \in [1, \gamma_2)$, $\gamma_2 = 1,75$. *Тогда для любой 2-лучевой системы точек* $A_2 = \{a_k\}_{k=1}^{2}$ *такой, что* $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $y_0 \approx 1,32466$, $k \in \{1, 2\}$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k \in \{1, 2\})$, *справедливо неравенство* (1.20), *где области* Λ_0, Λ_1, Λ_2, *и точки* $\lambda_0 = 0$, λ_1, λ_2, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.21).

Следствие 7. *Пусть* $n = 3$, $\gamma \in [1, \gamma_3)$, $\gamma_3 = \frac{9}{4}y_0^2$. *Тогда для любой 3-лучевой системы точек* $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^{3}$ *такой, что* $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, *где* y_0 *– корень уравнения* (1.2), $k = \overline{1,3}$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,3})$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(\Lambda_0, 0)\prod_{k=1}^{3} r(\Lambda_k, \lambda_k), \tag{1.22}$$

где области Λ_0, Λ_k, *и точки* $\lambda_0 = 0$, λ_k, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(9-\gamma)w^3+\gamma}{w^2(w^3-1)^2}\,dw^2. \tag{1.23}$$

Следствие 8. *Пусть* $n = 3$, $\gamma \in [1, \gamma_3)$, $\gamma_3 = 3,94$. *Тогда для любой 3-лучевой системы точек* $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^{3}$ *такой, что* $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $y_0 \approx 1,32466$, $k = \overline{1,3}$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,3})$, *справедливо неравенство* (1.22), *где области* Λ_0, Λ_k, *и точки* $\lambda_0 = 0$, λ_k, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.23).

Следствие 9. *Пусть* $n = 4$, $\gamma \in [1, \gamma_4)$, $\gamma_4 = 4y_0^2$. *Тогда для любой 4-лучевой системы точек* $A_4 = \{a_k\}_{k=1}^{4}$ *такой, что* $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, *где* y_0 *– корень уравнения* (1.2), $k = \overline{1,4}$, *и любого* *набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,4})$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{4} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\gamma}\left(\Lambda_0, 0\right) \prod_{k=1}^{4} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right), \tag{1.24}$$

где области Λ_0, Λ_k, *и точки* $\lambda_0 = 0$, λ_k, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(16-\gamma)w^4+\gamma}{w^2(w^4-1)^2}\, dw^2. \tag{1.25}$$

Следствие 10. *Пусть* $n = 4$, $\gamma \in [1, \gamma_4)$, $\gamma_4 = 7,01$. *Тогда для любой 4-лучевой системы точек* $A_4 = \{a_k\}_{k=1}^{4}$ *такой, что* $|a_k| = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant y_0/\sqrt{\gamma}$, $y_0 \approx 1,32466$, $k = \overline{1,4}$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,4})$, *справедливо неравенство* (1.24), *где области* Λ_0, Λ_k, *и точки* $\lambda_0 = 0$, λ_k, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.25).

Приведем результат дающий решение частного случая задачи 3. Введем некоторые определения. Пусть $t = t(x) = [\log \Psi(x)]'_x$ введенная в (1.17). Эта функция дает много важной информации о поведении экстремалей функционала (1.1). График функции $t = t(x)$ представлен на рисунке 1.

На промежутке $(0, y_0]$ $t(x)$ монотонно убывает, а на $(y_0, 2]$ – монотонно возрастает. При каждом $t' \in (t(y_0), t(T_0))$, $y_0 \leqslant T_0 \leqslant 2$, уравнение $t' = t(x)$ имеет два решения $x_1(t') \in (0, t(y_0)]$ и $x_2(t') \in [t(y_0), 2]$. Пусть

$$\min_{t\in[t(y_0),t(T_0)]}[(n-1)x_1(t) + x_2(t)] = \sigma_n(T_0), \tag{1.26}$$

$$n \geqslant 2, \quad y_0 \leqslant T_0 \leqslant 2.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть*

$$n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \gamma \in \left[1, \gamma_n^0\right),\ \gamma_n^0 = \min\left\{\frac{1}{4}[\sigma_n(T_0)]^2, \frac{T_0^2 n^2}{4}\right\}.$$

Тогда для любой n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такой, что* $\mathcal{M}^{(\gamma)}\left(A_n\right) = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant T_0/\sqrt{\gamma}$, $t(y_0) < T_0 \leqslant 2$, $k = \overline{1,n}$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 =$

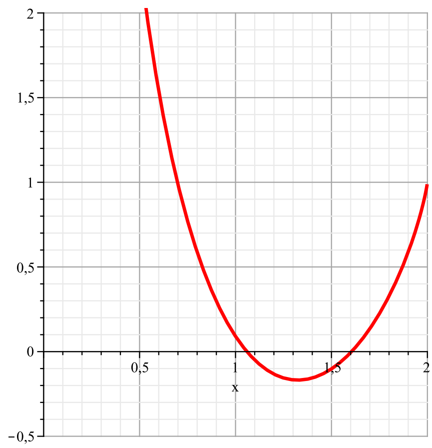

Рис. 1: График функции $t(x)$

$0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(k = \overline{1,n})$, *справедливо неравенство* (1.3), *где* Λ_k, λ_k, $k = \overline{0,n}$, *– соответственно, круговые области и полюсы квадратичного дифференциала* (1.4), $\lambda_0 = 0$.

Доказательство. Из неравенства (1.17) следует, что

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\{\tau_k\}_{k=1}^{n}$ и $\Phi(x)$ – определены в (1.17). В соответствии с условиями теоремы 2 величины $\{\tau_k\}_{k=1}^{n}$ удовлетворяют соотношению

$$0 < \tau_k \leqslant T_0.$$

Рассмотрим задачу

$$\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} \tau_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$\tau_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}, \quad 0 < \tau_k \leqslant T_0.$$

Аналогично работам [7,21,24], получаем условия для экстремального набора $\{\tau_k^0\}_{k=1}^{n}$

$$\frac{\Phi'(\tau_k^0)}{\Phi(\tau_k^0)} = \frac{\Phi'(\tau_j^0)}{\Phi(\tau_j^0)}, \quad \tau_k^0 < \tau_j^0 < T_0,$$

$$\frac{\Phi'(\tau_k^0)}{\Phi(\tau_k^0)} \leqslant \frac{\Phi'(T_0)}{\Phi(T_0)}, \quad \tau_k^0 < \tau_j^0 = T_0, k, j = \overline{1,n}, k \neq j.$$

Положив $\gamma_n^0 = \min\left\{\frac{1}{4}[\sigma_n(T_0)]^2, \frac{T_0^2 n^2}{4}\right\}$, получим $\gamma_n^0 \leqslant \frac{1}{4}[\sigma_n(T_0)]^2$ и $\gamma_n^0 \leqslant \frac{T_0^2 n^2}{4}$. Таким образом, для любого $\gamma \in (1, \gamma_n^0)$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_k^0 = 2\sqrt{\gamma} < 2\sqrt{\gamma_n^0},$$

а отсюда следует, что $\tau_k^0 \in (0, y_0]$, $k = \overline{1,n}$. Тогда

$$\tau_1^0 = \tau_2^0 = \ldots = \tau_n^0 = \frac{2\sqrt{\gamma}}{n}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получим, что

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}},$$

где Λ_k, λ_k, $k = \overline{0,n}$, – соответственно, круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (1.4). Теорема 2 доказана. □

Приведем некоторые конкретизации теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_3^0 = 3,29$, $\gamma \in \left[1, \gamma_3^0\right)$. *Тогда для любой* 3*-лучевой системы точек* $A_3 = \{a_k\}_{k=1}^3$ *такой, что* $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_3) = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant 1,7/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,3}$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $(k = \overline{0,n})$, *справедливо неравенство* (1.22), *где* Λ_k, λ_k, $k = \overline{0,3}$, $\lambda_0 = 0$, *– круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.23).

Доказательство. Положив в теореме 2 $T_0 = 1,7$, вычислим γ_3^0. Следующая таблица позволяет получить оценку снизу величины $\sigma_3(1,7)$. Интервал $[t(y_0), t(T_0)] = [t(y_0), t(1,7)]$ значений функции $t = t(x) = [\log\Psi(x)]'_x$ разобьем на подинтервалы $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$ так, чтобы на каждом подинтервале $[t_{k+1}, t_k]$, выполнялось неравенство

$$2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) > 3,63.$$

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$2x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	0,14	0.972559	1.702843	
2	0,12	0.983296	1.690609	3,635727
3	0,08	1.006181	1.664642	3,631234
4	0,02	1.044976	1.621015	3,633377
5	-0,06	1.109881	1.549295	3,639247
6	-0,15	1.234855	1.416171	3,635933
7	-0.168173	1.32466	1.32466	3,7944

Из анализа таблицы следует, что

$$3,63 < \sigma_3(1,7) = \min_{t\in[t(y_0),t(T_0)]}[2x_1(t) + x_2(t)].$$

Положим $\gamma_3^0 = \min\left\{\frac{1}{4}[\sigma_3(1,7)]^2, \frac{9T_0^2}{4}\right\} = \min\left\{\frac{1}{4}[3,63]^2, 6,5\right\}$, тогда $\gamma_3^0 = 3,29$. Следовательно, если $1 < \gamma \leqslant 3,29$, то $\tau_1^0 = \tau_2^0 = \tau_3^0 = \frac{2\sqrt{\gamma}}{3}$ и в соответствии с теоремой 2 получаем утверждение Теоремы 3. Теорема 3 доказана. □

Аналогичным образом получаем конкретизацию теоремы 2 для случая $n = 4$ и $T_0 = 1,7$.

Теорема 4. *Пусть $n = 4$, $\gamma_4^0 = 5,29$, $\gamma \in \left[1, \gamma_4^0\right)$. Тогда для любой 4-лучевой системы точек $A_4 = \{a_k\}_{k=1}^4$ такой, что $\mathcal{M}^{(\gamma)}(A_4) = 1$, $0 < \alpha_k \leqslant 1,7/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,4}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^4$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $k = \overline{0,n}$, справедливо неравенство* (1.24)*, где Λ_k, λ_k, $k = \overline{0,4}$, $\lambda_0 = 0$, – круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала* (1.25).

Доказательство. Полагая в условиях теоремы 2 $n = 4$ и $T_0 = 1,7$, аналогично доказательству теоремы 3, составим следующую таблицу значений функции $t = [log\Psi(x)]'_x$.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$3x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	0,14	0.972559	1.702843	
2	0,12	0.983296	1.690609	4,6082
3	0,08	1.006181	1.664642	4,6145
4	0,02	1.044976	1.621015	4,6395
5	-0,06	1.109881	1.549295	4,6842
6	-0.168173	1.32466	1.32466	4,6543

Из анализа табличных данных и с учетом свойств функции $t = t(x)$ следует, что

$$4,6 < \sigma_4(1,7) = \min_{t\in[t(y_0),t(1,7)]}[3x_1(t) + x_2(t)].$$

Тогда полагая $2\sqrt{\gamma_4^0} = 4,6$, получим, что $\gamma_4^0 = 5,29$. Следовательно для любого $\gamma \in \left[1, \gamma_4^0\right)$ справедливы соотношения $2\sqrt{\gamma} < 2\sqrt{\gamma_4^0} = 4,6$. С другой стороны $3\tau_1^0 + \tau_2^0 = 2\sqrt{\gamma}$, что возможно только когда $\tau_2^0 \in (0, y_0)$. Следовательно $\tau_k^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,4}$. Отсюда следует утверждение теоремы 4. Теорема 4 доказана. □

Проводя аналогичные рассуждения при $n = 2$ и $T_0 = 1,7$, несложно получить, что $\gamma_2^0 = 1,69$.

Таким образом, сопоставляя результаты теорем 1–4 и следствий 1–10, приходим к заключению, что максимальные значения для величин γ_n^0 получены при $T_0 = y_0$, а при величинах $T_0 > y_0$, соответствующие значения γ_n^0 уменьшаются.

Литература

[1] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (295) (1994), No. 1, 3–76.

[2] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Владивосток, Дальнаука ДВО РАН, 2009.

[3] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАН України, 2008.

[4] Г. П. Бахтина, А. К. Бахтин, *Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях* // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту мат-ки НАН України, Київ, Ін-т матем. НАН України, **3** (2006), No. 4, 273–281.

[5] Я. В. Заболотний, *Застосування розділяючого перетворення в одній задачі про неперетинні області* // Доповіді НАН України, **9** (2011), 13–17.

[6] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168** (1988), 48–66.

[7] Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневосточный матем. сборник, **2** (1996), 96–98.

[8] Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **276** (2001), 253–275.

[9] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр. лит., 1962.

[10] П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и по- люсы квадратичных дифференциалов* // Изв. АН СССР. Серия мат., **32** (1968), No. 5, 1033–1043.

[11] Г. П. Бахтина, *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях* : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, К., 1975, 11 с.

[12] Г. П. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей* // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа, Киев, Ин-т математики АН УССР (1984), 21–27.

[13] В. Н. Дубинин, *О произведении внутренних радиусов “частично неналегающих” областей* // Вопросы метрической теории отображений и ее применение, Киев, Наук. думка, 1978.

[14] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5** (1934), 159–245.

[15] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966.

[16] Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II* // Алгебра и анализ, **9** (1997), No. 3, 41–103; No. 5, 1–50.

[17] Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **302** (2003), 52–67.

[18] Л. И. Колбина, *Конформное отображение единичного круга на неналегающие области* // Вестник Ленингр. ун-та, **5** (1955), 37–43.

[19] Г. В. Кузьмина, *Об одном экстремально-метрическом подходе к задачам об экс- тремальном разбиении* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **449** (2016), 214–229.

[20] Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней кон- формных радиусов неналегающих областей* // Зап. науч. семин. ПОМИ, **286** (2002), 103–114.

[21] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **62** (2012), No. 2, 83–92.

[22] I. V. Denega, *Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles* // Annales universitatis Mariae Curie-Skladovska, Lublin-Polonia, **LXVII** (2013), No. 1, 11–22.

[23] A. Bakhtin, I. Dvorak, I. Denega, *Separating transformation and extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la societe des sciences et des lettres de Lodz, Recherches sur les deformations, **LXVI** (2016), No. 2, 13–20.

[24] A. Bakhtin, L. Vygivska, I. Denega, *N-Radial Systems of Points and Problems for Non-Overlapping Domains* // Lobachevskii Journal of Mathematics, **38** (2017), No. 2, 229–235.

[25] A. K. Bahtin, Ya. V. Zabolotnii, *Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains* // Ukr. Mat. Visn., **13** (2016), No. 2, 148–156; transl. in Journal of Mathematical Sciences, **221** (2017), No. 5, 623–629.

[26] А. К. Бахтин, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств* // Доп. НАН України, (2006), No. 10, 7–13.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: abahtin@imath.kiev.ua