Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 2, 295 – 302

О проблеме В. Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей

Людмила В. Выговская

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе рассматривается задача о максимуме функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где $\gamma \in (0, n]$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — система неналегающих многосвязных областей, причем области $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симметричные относительно единичной окружности, $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$. При $\gamma = 1$ и $n \geqslant 2$ данная задача была поставлена В. Н. Дубининым в 1994 г. в качестве открытой проблемы. В 2000 г. проблему В. Н. Дубинина решил Л. В. Ковалев. Данная статья посвящена нахождению максимума функционала $I_n(\gamma)$ при $\gamma > 1$.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутрирадиусные области, неналегающие области, радиальная система точек, разделяющие преобразования, квадратичный дифференциал.

Работа посвящена исследованию одной экстремальной задачи геометрической теории функций комплексной переменной.

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ множества натуральных и действительных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана.

На расширенной комплексной плоскости рассмотрим систему произвольных неналегающих многосвязных областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{0, n}$, причем области $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ обладают симметрией относительно единичной

Статья поступила в редакцию 12.05.2017
Автор выражает благодарность профессору А. Бахтину за постановку задачи, ценные советы и комментарии.

ISSN 1810 – 3200.

окружности. Пусть $r(B,a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [5,6]).

Обозначим

$$\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad k = \overline{1,n}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Рассмотрим следующую экстремальную проблему.

Проблема. Показать, что максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1.1}$$

где $\gamma \in (0,n]$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ – система неналегающих многосвязных областей, причем области $\{B_k\}_{k=1}^n$ обладают симметрией относительно единичной окружности, достигается для системы областей B_k и точек a_k, $k = \overline{0,n}$.

Впервые в 1984 г. аналогичную задачу для односвязных областей рассмотрела Г. П. Бахтина в работе [3]. В 1994 г. данную задачу при $\gamma = 1$ в качестве нерешенной проблемы поставил В. Н. Дубинин в работе [6]. В 2000 г. при $\gamma = 1$ и для всех $n \geqslant 2$ эту проблему решил Л. В. Ковалев [1,2]. В данной статье проблема изучена для значений параметра $\gamma > 1$. Справедлива теорема.

Теорема 1.1. *Для любого $\gamma > 1$ существует такое $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \geqslant n_0(\gamma)$, для любой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, и для любой системы попарно неналегающих областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$ таких, что области $\{B_k\}_{k=1}^n$ обладают симметрией относительно единичной окружности, выполняется следующее неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^\gamma\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right), \tag{1.2}$$

где $a_k^{(0)}$ и $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, — полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2, \tag{1.3}$$

соответственно, причем $|a_k^{(0)}| = 1$ для $k = \overline{1,n}$, $a_0^{(0)} = 0$, $a_k^{(0)} \in B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$.

Знак равенства в неравенстве (1.2) достигается если $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$.

Доказательство. Доказательство теоремы 1.1 основывается на методах и идеях работ [1–5] и состоит из двух частей.

Часть 1. Пусть $\alpha_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$. Справедливы неравенства:

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) = \prod_{k=1}^{n}\left[r(B_0,0)r(B_k,a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|^2\right]^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\leqslant \left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} = \left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

С другой стороны, из результатов Теоремы 5.2.3 работы [5] и свойств разделяющего преобразования, получаем

$$I_n^0(\gamma) = r^\gamma\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

где $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0^{(0)} = 0$, — круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (1.3), соответственно. Введем обозначение. Пусть

$$J_n(\gamma) = \frac{I_n}{I_n^0} = \frac{r^\gamma(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)},0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)},a_k^{(0)})}.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{\left[2^n\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}$$

$$\leqslant \frac{\left[2\cdot 2^{n-1}\cdot \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}(2-\frac{1}{\sqrt{2\gamma}})^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}}$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{2n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Рассмотрим члены полученного выражения. Положим, что $n\geqslant 3\gamma^2$. Тогда

$$\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}<1,$$

$$\left(\frac{2n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}<3,$$

$$\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}<1,$$

$$\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}<3,$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}<2,$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}<3.$$

Из приведенных выше оценок следует, что произведение этих величин ограничено некоторой константой $K=54$. Теперь с учетом всех предыдущих рассуждений можем записать:

$$J_n(\gamma)\leqslant 54\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1},\qquad \text{при } \gamma>1 \text{ и } n\geqslant 3\gamma^2.$$

Поскольку величина $\left[\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\right)^{n-1}\right]\to 0$ при произвольном фиксированном $\gamma>1$ и $n\to\infty$, то существует такое $n_0(\gamma)$, что $J_n(\gamma)<1$ при всех $n\geqslant n_0(\gamma)$ и при всех α_0 таких, что $\alpha_0\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$. Это означает, что при $n\geqslant n_0(\gamma)$ и $\alpha_0\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, для любых систем попарно непересекающихся областей и любых наборов различных точек a_k,

$|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_k \in B_k$, $a_0 = 0 \in B_0$, имеет место строгое неравенство

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) < r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right).$$

Часть 2. Остается рассмотреть случай, когда $\alpha_k < \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$, $k=\overline{1,n}$. Для цели дальнейшего исследования используем метод разделяющего преобразования, разработанный в работах [5–7]. Для этого рассмотрим систему функций $\zeta = \{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n} = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ называется допустимим для разделяющего преобразования областей B_k, $k=\overline{0,n}$ относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

Пусть $D_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначает область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $D_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначим такую область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, которая получена в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, обозначим через $D_k^{(0)}$ такую область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, которая получена в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Из определения функции π_k, следует, что

$$|\pi_k(w)| \sim |\omega_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \pi_k(e^{-i\theta_l})| \sim \frac{1}{2\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-e^{-i\theta_l}|^2,$$

$$w \to e^{-i\theta_l}, \quad l = k, k+1, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Далее, используя результаты работ [6, 7], получаем неравенства

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{4}r^{\alpha_k^2}\left(D_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k,a_k\right) \leqslant \left[2\alpha_k r\left(D_k^{(1)},1\right)\cdot 2\alpha_{k-1} r\left(D_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Используя методы работ [1, 5, 8] получаем оценку для функционала

$$J_n(\gamma)$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^{n}2^{2(1-\alpha_k^2\gamma)}\left\{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},1\right)r\left(D_k^{(2)},-1\right)\right\}\right]^{\frac{1}{4}},$$

где $D_k^{(0)}$, $D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$ неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$. Принимая во внимание Теорему 1 работы [8] и метод, разработанный в работе [6], получим функцию

$$J_n(\gamma)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\left[\prod_{k=1}^{n}2^{2-2\alpha_k^2\gamma}\cdot 2^{\alpha_k^2\cdot 2\gamma+6}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\times\left[(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\alpha_k^2\cdot 2\gamma}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\left[\prod_{k=1}^{n}2^8\cdot(\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{\alpha_k^2\cdot 2\gamma+4}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^{-\frac{(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}{2}}\right]^{\frac{1}{4}}\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\cdot[\Psi(x_k)]^{n/4},$$

где

$$\Psi(x)=2^8\cdot x^{x^2+4}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\ x_k=\alpha_k\sqrt{2\gamma},\ x\in[0,1].$$

В силу логарифмической выпуклости функции $\Psi(x)$ на промежутке $x\in[0,1]$, имеем неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ln\Psi(x_k)\leqslant ln\Psi(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}),$$

из которого следует, что

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

для всех фиксированных $\gamma>1$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant n(\gamma)$, которое и доказывает теорему. Утверждение о случае равенства проверяется непосредственно. □

Замечание. Рассмотрим класс $T=\{f_k\}_{k=0}^{n}$ систем однолистных функций, которые отображают единичный круг $U=\{z:|z|<1\}$ на взаимно неналегающиеся области $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ (причем области $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ обладают симметрией относительно единичной окружности) так, что

$$f_0(0)=0,|f_k(0)|=1.$$

Тогда из теоремы (1.1) для класса T справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Для произвольной системы функций* $\{f_k\}_{k=0}^n \in T$ *справедливо неравенство*

$$|f_0'(0)|^\gamma \prod_{k=1}^n |f_k'(0)| \leqslant |f_0^{(0)'}(0)|^\gamma \prod_{k=1}^n |f_k^{(0)'}(0)|.$$

Знак равенства достигается для системы функций $\{f_k\}_{k=0}^n \in T$, *такой, что* $f_k^{(0)}(U) = B_k^{(0)}$, $f_k^{(0)}(0) = a_k^{(0)}$, $a_0^{(0)} = 0$, *(*$B_k^{(0)}, a_k^{(0)}$ *— круговые области и полюсы квадратичного дифференциала* (1.3)*, соответственно.)*

Следствие 2. *Для любого* $\gamma > 1$ *существует такое* $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, *что для каждого* $n \geqslant n_0(\gamma)$, *для любой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, *и для любой системы попарно неналегающих областей* $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$ *таких, что области* $\{B_k\}_{k=1}^n$ *обладают симметрией относительно единичной окружности, выполняется следующее неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{1 - \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Знак равенства достигается когда a_k *и* B_k, $k = \overline{0,n}$ *— полюсы и круговые области квадратичного дифференциала* (1.3)*, соответственно.*

Литература

[1] Л. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей* // Изв. вузов. Матем., (2000), No. 6, 80–81.

[2] Л. Ковалев, *О трех непересекающихся областях* // Дальневост. матем. журн., **1** (2000), No. 1, 3–7.

[3] Г. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей* // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Ин–т матем. АН УССР, К., (1984), 21–27.

[4] Л. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневост. матем. сб., **2** (1996), 96–98.

[5] А. Бахтин, Г. Бахтина, Ю. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе* // Труды Ин–та математики НАН Украины, **73** (2008), 308.

[6] В. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи матем. наук, **49** (1994), No. 1 (295), 3–76.

[7] В. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **168**, Л., Изд–во "Наука", (1988), 48–66.

[8] A. Bakhtin, G. Bakhtina, I. Denega, *An extremal decomposition of complex plain with fixed poles* // Zb. Institute of mathematics of NAS, **14** (1), (2017), 34–38.

[9] В. Дубинин, *Метод симметризации в задачах о неналегающих областях* // Матем. сб., **128(170)** (1985), No. 1(9), 110—123.

Сведения об авторах

Людмила Вячеславовна Выговская

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

E-Mail: `liudmylavygivska@ukr.net`