Український математичний вісник
Том 14 **(2017)**, № 2, 201 – 219

Теорема Анскомбе и умеренно большие уклонения для траекторий обобщенного процесса восстановления

Артём В. Логачёв, Анатолий А. Могульский

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В работе предложен вариант теоремы Анскомбе для принципа больших уклонений траекторий случайного процесса. В качестве следствия получен принцип умеренно больших уклонений для обобщенных процессов восстановления.

2010 MSC. 60F10, 60J75, 60K05.

Ключевые слова и фразы. Теорема Анскомбе, принцип больших уклонений, принцип умеренно больших уклонений, обобщенный процесс восстановления, условие Крамера, функция уклонений.

1. Введение

Теорема Ф. Анскомбе [1], доказанная в 1952 году, является удобным инструментом для получения различных предельных теорем (центральной предельной, закона больших чисел, закона повторного логарифма, см. [2–7]), в которых индекс, по которому осуществляется предельный переход, является последовательностью случайных величин.

Естественно ожидать, что для принципа больших уклонений (п.б.у.) должен быть результат аналогичный теореме Анскомбе. В разделе 2 данной работы доказана такая теорема. Удобство применения полученной теоремы будет продемонстрировано на примере доказательства принципа умеренно больших уклонений (п.у.б.у.) для траекторий обобщенного процесса восстановления в разделе 3.

Статья поступила в редакцию 27.04.2017
Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ (N 05-01-00810), НШ (N 2139.2003.1) и INTAS (N 02-51-5019)

ISSN 1810 – 3200.

Обозначим произвольное метрическое пространство (м.п.) как $\mathbf{X}_\rho$, $\mathfrak{B}_{\mathbf{X}_\rho}$ — борелевскую σ-алгебру его подмножеств, $\overline{B}$, $[B]$, (B) — соответственно дополнение, замыкание, внутренность множества B.

Напомним необходимые нам определения (см., например, [8–15]).

Определение 1.1. Семейство случайных процессов s_T удовлетворяет п.б.у. в м.п. $\mathbf{X}_\rho$ с функционалом уклонений (ф.у.) $I = I(f) : \mathbf{X} \to [0, \infty]$ и нормирующей функцией (н.ф.) $\psi(T) : \lim\limits_{T\to\infty} \psi(T) = \infty$, если для любого $c \geq 0$ множество $\{f \in \mathbf{X} : I(f) \leq c\}$ является компактом в м.п. $\mathbf{X}_\rho$ и для любого множества $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{X}_\rho}$ выполнены неравенства

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}(\, s_T \in B\,) \leq -I([B]),$$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}(\, s_T \in B\,) \geq -I((B)),$$

где $I(B) = \inf\limits_{y\in B} I(y)$ для $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{X}_\rho}$, $I(\varnothing) = \infty$.

Везде далее фраза “семейство случайных процессов s_T удовлетворяет $(I, \psi(T), \mathbf{X}_\rho)$-п.б.у.” означает, что семейство случайных процессов s_T удовлетворяет п.б.у. в м.п. $\mathbf{X}_\rho$ с ф.у. $I = I(f)$ и н.ф. $\psi = \psi(T)$.

Определение 1.2. Семейство случайных процессов s_T будем называть экспоненциально плотным (э.п.) в м.п. $\mathbf{X}_\rho$ с н.ф. $\psi(T)$, если для любого $N > 0$ найдется компакт $K_N \subseteq \mathbf{X}$ такой, что

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}(\, s_T \in \overline{K_N}\,) \leq -N.$$

Мы будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{C}^d[0,c]$, $d \in \mathbb{N}$ — пространство d-мерных непрерывных на отрезке $[0,c]$ функций с равномерной метрикой $\rho(f,g) = \sup\limits_{t\in[0,c]} \|f(t) - g(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $\mathbb{D}^d[0,c]$ и $\mathbb{D}^d_S[0,c]$ — пространства d-мерных функций непрерывных справа и имеющих пределы слева на отрезке $[0,c]$ с равномерной метрикой и метрикой Скорохода, соответственно; $\mathbb{AC}^d_0[0,c]$ — множество d-мерных абсолютно непрерывных на отрезке $[0,c]$ функций, стартующих из нуля. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^2$ будем обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Настоящая работа написана под впечатлением доклада А. А. Боровкова “Обобщение теоремы Анскомбе на случайные процессы. Сходимость обобщенных процессов восстановления” (30 марта 2017 г., Институт математики СО РАН). В этом докладе автор предложил вариант теоремы Анскомбе для случайных процессов и в качестве следствия получил принцип инвариантности для обобщенных процессов восстановления (более подробно см. Замечание 3.3).

Оставшаяся часть настоящей работы состоит из трех разделов. В разделе 2 предложен вариант теоремы Анскомбе о больших уклонениях траекторий случайных процессов; в разделе 3 установлен п.у.б.у. для обобщенных процессов восстановления; раздел 4 посвящен вспомогательным утверждениям.

2. Основной результат

В этом разделе будет получена теорема Анскомбе о больших уклонениях, что является основным результатом работы.

Везде далее будем считать, что все случайные элементы, участвующие в формулировках утверждений, заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Математическое ожидание и дисперсию относительно меры $\mathbf{P}$ будем обозначать $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ соответственно.

Теорема 2.1. *Пусть для фиксированного $c > 0$ выполнены следующие условия:*

1) найдется $\Delta > 0$ такое, что семейство непрерывных случайных процессов $s_T(t)$, $t \geq 0$ является э.п. в м.п. $\mathbb{C}^d[0, c+\Delta]$, $d \geq 1$ с н.ф. $\psi(T)$;

2) стохастически непрерывный случайный процесс $\eta_T(t) \in \mathbb{D}[0,1]$ неотрицателен и для любого $\delta > 0$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |\eta_T(t) - ct| > \delta\right) = -\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \|s_T(ct) - s_T(\eta_T(t))\| > \varepsilon\right) = -\infty.$$

Доказательство. В силу э.п. семейства процессов $s_T(t)$ для любого $N > 0$ найдется компакт $K_N \subseteq \mathbb{C}^d[0, c+\Delta]$ такой, что при достаточно больших T

$$\mathbf{P}(\, s_T \in \overline{K_N}\,) \leq \exp\{-N\psi(T)\}. \tag{2.1}$$

В силу теоремы Асколи–Арцела найдется $\delta \in [0, \Delta]$ такое, что для любой функции $f \in K_N$ выполнено неравенство

$$\sup_{\substack{0\leq t,s\leq 1+\Delta/c \\ c|t-s|\leq\delta}} \|f(ct) - f(cs)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Обозначив $A_\delta = \{\omega : \sup\limits_{t\in[0,1]} |\eta_T(t) - ct| \le \delta\}$, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \|s_T(ct) - s_T(\eta_T(t))\| > \varepsilon\right) \\
\le\ & \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \|s_T(ct) - s_T(\eta_T(t))\| > \varepsilon, A_\delta, s_T \in K_N\right) \\
+\ & \mathbf{P}(\overline{A_\delta}) + \mathbf{P}(\, s_T \in \overline{K_N}\,) =: \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\Theta := \left\{\theta \in \mathbb{D}[0,1] : \sup_{t\in[0,1]} |\theta(t)| \le 1\right\}.$$

Из неравенства (2.2) следует, что

$$\left\{\omega : \sup_{t\in[0,1]} \|s_T(ct) - s_T(\eta_T(t))\| > \varepsilon, A_\delta, s_T \in K_N\right\}$$

$$\begin{aligned}
=\ & \left\{\omega : \sup_{t\in[0,1]} \left\|s_T(ct) - s_T\left(ct + \delta\left(\frac{\eta_T(t) - ct}{\delta}\right)\right)\right\| > \varepsilon, A_\delta, s_T \in K_N\right\} \\
\subseteq\ & \left\{\omega : \sup_{\substack{t\in[0,1] \\ \theta\in\Theta}} \|s_T(ct) - s_T(ct + \delta\theta(t))\| > \varepsilon, s_T \in K_N\right\} = \varnothing,
\end{aligned}$$

здесь мы воспользовались тем, что на событии A_δ траектории случайного процесса $\frac{\eta_T(t)-ct}{\delta}$ принадлежат множеству функций Θ.

Значит, $\mathbf{P}_1 = 0$.

Используя неравенства (2.1), (2.3) и условие 2) для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} \|s_T(ct) - s_T(\eta_T(t))\| > \varepsilon\right)$$

$$= \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \le \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln(2\max\{\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3\}) \le -N.$$

Предельный переход $N \to \infty$ завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 2.2. Лемма 4.9 монографии [15] содержит похожий результат, но там требуется, чтобы семейства процессов $s_T(t)$ и $\eta_T(t)$ были независимыми, константа $c = 1$, н.ф. имела вид $\psi(T) = T$.

Нас будет интересовать п.б.у. в пространстве $\mathbb{D}^d[0,c]$ с равномерной метрикой, но из-за несепарабельности борелевская σ-алгебра, построенная по открытым относительно этой метрики множествам, будет содержать множества неизмеримые для вероятностной меры $\mathbf{P}$, см. [16, §18]. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать меру $\mathbf{P}$ на множествах из σ-алгебры, построенной по открытым цилиндрическим подмножествам пространства $\mathbb{D}^d[0,c]$.

Определение 2.3. Будем говорить, что семейства случайных процессов $v_T(t)$ и $s_T(t)$, траектории которых принадлежат м.п. $\mathbf{X}_\rho$, эквивалентны с точки зрения п.б.у. ($v_T \overset{L.D.}{\sim} s_T$), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\psi(T)} \ln \mathbf{P}\left(\rho(v_T, s_T) > \varepsilon\right) = -\infty.$$

Легко показать, что если $v_T \overset{L.D.}{\sim} s_T$, м.п. $\mathbf{X}_\rho$ является полным и одно из семейств процессов удовлетворяет п.б.у., то этому же п.б.у. удовлетворяет и второе семейство (см., например, [8] теорема 4.2.13).

Определение 2.4. Будем говорить, что семейство стохастически непрерывных случайных процессов $v_T(t)$ удовлетворяет $\mathbb{C}$–$(I, \psi(T), \mathbb{D}^d[0,c])$-п.б.у., если существует эквивалентное ему с точки зрения п.б.у. семейство непрерывных случайных процессов $s_T(t)$, удовлетворяющее $(I, \psi(T), \mathbb{C}^d[0,c])$-п.б.у.

Замечание 2.5. Если семейство процессов $v_T(t)$ удовлетворяет $\mathbb{C}$–$(I, \psi(T), \mathbb{D}^d[0,c])$-п.б.у. и при этом $\mathbf{P}(v_T \in \mathbb{C}^d[0,c]) = 1$, то оно удовлетворяет $(I, \psi(T), \mathbb{C}^d[0,c])$-п.б.у.

Следствие 2.6. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.1. Тогда*

$$s_T(\eta_T(t)) \overset{L.D.}{\sim} s_T(ct)$$

и, следовательно, если семейство процессов $s_T(ct)$ удовлетворяет $(I, \psi(T), \mathbb{C}^d[0,1])$-п.б.у., то семейство процессов $s_T(\eta_T(t))$ будет удовлетворять $\mathbb{C}$–$(I, \psi(T), \mathbb{D}^d[0,1])$-п.б.у.

Замечание 2.7. Очевидно, что из $\mathbb{C}$–$(I, \psi(T), \mathbb{D}^d[0,c])$-п.б.у. следует $(I, \psi(T), \mathbb{D}^d_S[0,c])$-п.б.у.

Приведем простой пример применения Теоремы 2.1.

Пусть на вероятностном пространстве заданы винеровский процесс $w(t)$ и пуассоновский процесс $\nu(t)$ с параметром $\mathbf{E}\nu(t) = ct$. Рассмотрим семейство случайных процессов

$$w_T(t) = \frac{1}{x(T)} w(tT),$$

где функция $x(T)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{T\to\infty}\frac{x(T)}{\sqrt{T}}=\infty,\quad \lim_{T\to\infty}\frac{x(T)}{T}=0.$$

Нас будет интересовать п.у.б.у. для семейства процессов

$$w_{T,\nu}(t):=\frac{1}{x(T)}w(\nu(tT)).$$

Из теоремы 5.3.2 [18] и Леммы 4.1 (i) (см. раздел 4) следует, что для любых фиксированных $c>0$, $\Delta\geq 0$ семейство случайных процессов $w_T(t)$ будет удовлетворять $\left(I,\frac{x^2(T)}{T},\mathbb{C}[0,c+\Delta]\right)$-п.б.у., где

$$I(f)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^{c+\Delta}(f'(t))^2dt, & \text{если } f\in\mathbb{AC}_0[0,c+\Delta],\\ \infty, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Поэтому из теоремы Пухальского [19] следует, что семейство процессов $w_T(t)$ является э.п. в м.п. $\mathbb{C}[0,c+\Delta]$, а значит, условие 1) Теоремы 2.1 выполнено.

Проверим условие 2) Теоремы 2.1. Рассмотрим случайный процесс $\eta_T(t)=\frac{\nu(tT)}{T}$. Обозначим $\tilde\nu(t)=\nu(t)-ct$.

Используя неравенство Дуба (см., например, [17, глава 2, теорема 1.7]) для любого $r>0$ будем иметь

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}|\eta_T(tT)-ct|>\delta\right)\leq\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}r\tilde\nu(tT)>r\delta T\right)$$

$$+\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}-r\tilde\nu(tT)>r\delta T\right)\leq\frac{\mathbf{E}e^{r\tilde\nu(tT)}}{e^{r\delta T}}+\frac{\mathbf{E}e^{-r\tilde\nu(tT)}}{e^{r\delta T}}$$

$$=\exp\{(e^r-1-r)cT-r\delta T\}+\exp\{(e^{-r}-1+r)cT-r\delta T\}.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части. Т.к. при $r>0$

$$e^r-1-r\leq r^2e^r,$$

то выбирая $r=\frac{x(T)}{T}$, имеем

$$(e^r-1-r)cT-r\delta T\leq x(T)\left[\frac{cx(T)}{T}e^{\frac{x(T)}{T}}-\delta\right].$$

При достаточно большем T первое слагаемое в квадратных скобках будет меньше $\frac{\delta}{2c}$. Поэтому при достаточно больших T получим

$$\exp\{(e^r-1-r)cT-r\delta T\}\leq\exp\left\{-\frac{\delta x(T)}{2}\right\}.$$

Аналогичная оценка сверху верна и для слагаемого $\exp\{(e^{-r}-1+r)cT-r\delta T\}$. Следовательно, при достаточно больших T будем иметь

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}|\eta_T(tT)-ct|>\delta\right)\le 2\exp\left\{-\frac{\delta x(T)}{2}\right\},$$

откуда следует, что

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{T}{x^2(T)}\ln\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}|\eta_T(t)-ct|>\delta\right)=-\infty.$$

Значит, условие 2) Теоремы 2.1 выполнено.

Таким образом, все условия Теоремы 2.1 выполнены, поэтому

$$w_T(\eta_T(t))=w_{T,\nu}(t)\overset{L.D.}{\sim}w_T(ct)$$

в м.п. $\mathbb{D}[0,1]$.

Т.к. семейство случайных процессов $w_T(t)$ удовлетворяет $\left(I,\frac{x^2(T)}{T},\mathbb{C}[0,c]\right)$-п.б.у., то из Леммы 4.1 (ii) (см. раздел 4) следует, что семейство процессов $w_T(ct)$ будет удовлетворять $\left(\tilde{I},\frac{x^2(T)}{T},\mathbb{C}[0,1]\right)$-п.б.у., где

$$\tilde{I}(f)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^1(f'(t))^2dt, & \text{если } f\in\mathbb{AC}_0[0,1],\\ \infty, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Таким образом, из Следствия 2.6 следует, что семейство процессов $w_{T,\nu}(t)$ удовлетворяет $\mathbb{C}$–$\left(\tilde{I},\frac{x^2(T)}{T},\mathbb{D}[0,1]\right)$-п.б.у.

Заметим, что нигде не требовалась независимость процессов $w(t)$ и $\nu(t)$.

3. Принцип умеренно больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $\xi=(\tau,\zeta),\xi_2=(\tau_2,\zeta_2),\xi_3=(\tau_3,\zeta_3),\ldots$, где $\tau>0$, и независимый от этой последовательности случайный вектор $\xi_1=(\tau_1,\zeta_1)$, $\tau_1\ge 0$, имеющий, вообще говоря, другое, чем $\xi=(\tau,\zeta)$, распределение.

Положим $T_0=Z_0=0$, обозначим

$$T_n:=\sum_{j=1}^n\tau_j,\quad Z_n:=\sum_{j=1}^n\zeta_j,\quad S_n:=\sum_{j=1}^n\xi_j=(T_n,Z_n)\ \text{ при }\ n\ge 1.$$

Пусть при $t > 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : \ T_k \geq t\}, \quad \nu(t) := \max\{k \geq 0 : \ T_k < t\}. \tag{3.1}$$

Ясно, что

$$\nu(t) = \eta(t) - 1. \tag{3.2}$$

Обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $Z(t);\ t \geq 0$, определяется равенствами

$$Z(t) := Z_{\nu(t)} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad Z(0) = 0. \tag{3.3}$$

Наряду с о.п.в. $Z(t)$ будет изучен также процесс

$$Y(t) := Z_{\eta(t)} = Z(t) + \zeta_{\eta(t)} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(+0) = \zeta_1,$$

который мы также будем называть о.п.в.

Соглашение 1. Везде, если не оговорено противное, будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$. $\mathbf{E}e^{v|\xi|} < \infty$, $\mathbf{E}e^{v|\xi_1|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Кроме того, мы будем предполагать, что случайный вектор $\xi = (\tau, \zeta)$ является *невырожденным*, т.е. для любых $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $|\lambda| \neq 0$ и $c \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\mathbf{P}(\langle \lambda, \xi \rangle = c) < 1$. Эти два условия во избежание повторений в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.

Если распределение случайного вектора ξ_1 совпадает с распределением ξ, то этот случай назовем *однородным*. Если вектора ξ_1, ξ имеют различные распределения, то этот случай назовем *неоднородным*.

Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время появления первого скачка τ_1 и его величина ζ_1 имеют совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения (τ, ζ) (см., например, [18]). Это реализуется, например, для о.п.в. со стационарными приращениями.

Обозначим для $t \geq 0$

$$Z_1(t) := Z(t) - at, \quad Y_1(t) := Y(t) - at,$$

$$Z_2(t) := Z(t) - a_\zeta \nu(t), \quad Y_2(t) := Y(t) - a_\zeta \eta(t),$$

$$Z_3(t) := a_\zeta \left(\nu(t) - \frac{1}{a_\tau} t \right), \quad Y_3(t) := a_\zeta \left(\eta(t) - \frac{1}{a_\tau} t \right),$$

где $a := \frac{a_\zeta}{a_\tau}$, $a_\zeta := \mathbf{E}\zeta$, $a_\tau := \mathbf{E}\tau$.

Легко видеть, что

$$Z_2(t) = Z_1(t) - Z_3(t), \quad Y_2(t) = Y_1(t) - Y_3(t), \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Фиксируем функцию $x = x(T)$, такую, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{x(T)}{\sqrt{T}} = \infty, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{x(T)}{T} = 0. \tag{3.5}$$

Везде далее, там где это не мешает изложению, аргумент T у функции $x(T)$ будет опускаться.

Основной объект изучения — два процесса

$$\overline{z}_T = \overline{z}_T(t) = (z_{1,T}(t), z_{3,T}(t)) := \left(\frac{1}{x}Z_1(tT), \frac{1}{x}Z_3(tT)\right), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\overline{y}_T = \overline{y}_T(t) = (y_{1,T}(t), y_{3,T}(t)) := \left(\frac{1}{x}Y_1(tT), \frac{1}{x}Y_3(tT)\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Эти процессы лежат в пространстве $\mathbb{D}^2[0,1]$. В пространстве $\mathbb{D}^2[0,1]$ будем использовать равномерную метрику $\rho = \rho(f,g)$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим функцию уклонений

$$\Lambda(\alpha) := \frac{1}{2}\alpha A \alpha^T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}\alpha_i\alpha_j, \tag{3.6}$$

где $A = \|A_{ij}\|$ — матрица, обратная к ковариационной матрице $B = \|\mathbf{E}\theta_i\theta_j\|$ случайного вектора $\theta = (\theta_1, \theta_2) := (\zeta - a\tau, a_\zeta - a\tau)$.

Для любой функции $f \in \mathbb{D}^2[0,1]$ положим

$$I(f) = \begin{cases} a_\tau \int_0^1 \Lambda(f'(t))dt, & \text{если} \quad f \in \mathbb{AC}_0^2[0,1], \\ \infty, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Теорема 3.1. ***(п.у.б.у. для о.п.в.)*** *Каждый из процессов*

$$\overline{z}_T = \overline{z}_T(t) = (z_{1,T}(t), z_{3,T}(t)), \quad \overline{y}_T = \overline{y}_T(t) = (y_{1,T}(t), y_{3,T}(t))$$

удовлетворяет $\mathbb{C}$–$(I, \frac{x^2}{T}, \mathbb{D}^2[0,1])$-*п.б.у.*

Обозначим

$$z_{2,T}(t) := \frac{1}{x}Z_2(tT), \quad y_{2,T}(t) := \frac{1}{x}Y_2(tT).$$

Определим далее три функционала уклонений $I_1(f)$, $I_2(f)$, $I_3(f)$, $f \in \mathbb{D}[0,1]$, положив

$$I_i(f) := \frac{a_\tau}{2\sigma_i^2} I_0(f), \quad I_0(f) := \begin{cases} \int_0^1 (f'(t))^2 dt, & \text{если} \quad f \in \mathbb{AC}_0[0,1], \\ \infty, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\sigma_1^2 = \mathbf{D}(\zeta - a\tau)$, $\sigma_2^2 = \mathbf{D}\zeta$, $\sigma_3^2 = a^2\mathbf{D}\tau$.

Т.к. $z_{i,T}(t) = \beta_1^{(i)} z_{1,T}(t) + \beta_2^{(i)} z_{3,T}(t)$, где $\beta_1^{(1)} = 1$, $\beta_2^{(1)} = 0$; $\beta_1^{(2)} = 1$, $\beta_2^{(2)} = -1$; $\beta_1^{(3)} = 0$, $\beta_2^{(3)} = 1$, то используя Лемму 4.2 (см. раздел 4) выводим из Теоремы 3.1

Следствие 3.2. *Каждый из процессов $z_{i,T}(t)$, $y_{i,T}(t)$ удовлетворяет $\mathbb{C}$–$(I_i, \frac{x^2}{T}, \mathbb{D}[0,1])$-п.б.у., $i = 1, 2, 3$.*

Замечание 3.3. Как уже отмечалось во введении, отправной точкой настоящей работы является доклад А. А. Боровкова (см. введение), в котором автор установил, в частности, при минимальном условии $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$ принцип инвариантности для процессов $Z_1(t)$, $Y_1(t)$, т.е. слабую сходимость процессов

$$\frac{Z_1(tT)}{\sigma_1\sqrt{T}}, \quad \frac{Y_1(tT)}{\sigma_1\sqrt{T}}; \ t \in [0,1]$$

к винеровскому процессу. Следствие 3.2 распространяет, таким образом, при условии $[\mathbf{C}_0]$, принцип инвариантности (в логарифмической форме) на область умеренно больших уклонений, определяемую функцией $x(T)$ вида (3.5).

Доказательство Теоремы 3.1. Выполним для первого процесса

$$\overline{z}_T = \overline{z}_T(t) = (z_{1,T}(t), z_{3,T}(t)), \quad 0 \le t \le 1.$$

Доказательство для второго процесса

$$\overline{y}_T = \overline{y}_T(t) = (y_{1,T}(t), y_{3,T}(t)), \quad 0 \le t \le 1,$$

осуществляется аналогичным образом.

Нам понадобятся следующие обозначения. Через $\widetilde{\widetilde{Z}}(t)$ обозначим непрерывную случайную ломаную (н.с.л.), построенную по узловым точкам

$$(T_k, \ (Z_k - aT_k, \ a_\zeta k - aT_k)), \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Через $\widetilde{\widetilde{S}}(t)$ обозначим н.с.л., построенную по узловым точкам

$$(k, \ (Z_k - aT_k, \ a_\zeta k - aT_k)), \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Через $\widetilde{\nu}(t)$ обозначим н.с.л., построенную по узловым точкам

$$(T_k, \ k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Тогда легко видеть, что справедлива формула

$$\widetilde{\widetilde{Z}}(t) = \widetilde{\widetilde{S}}(\widetilde{\nu}(t)), \quad t \ge 0. \tag{3.7}$$

Обозначим далее

$$\widetilde{\widetilde{z}}_T(t) := \frac{1}{x}\widetilde{\widetilde{Z}}(tT), \quad 0 \le t \le 1;$$

$$\widetilde{\widetilde{s}}_T(t) := \frac{1}{x}\widetilde{\widetilde{S}}(tT), \quad 0 \le t < \infty;$$

$$\widetilde{\nu}_T(t) := \frac{1}{T}\widetilde{\nu}(tT), \quad 0 \le t < \infty.$$

Тогда, в силу (3.7) имеем

$$\widetilde{\widetilde{z}}_T(t) = \widetilde{\widetilde{s}}_T(\widetilde{\nu}_T(t)), \quad 0 \le t \le 1. \tag{3.8}$$

Для того, чтобы воспользоваться Теоремой 2.1, проверим выполнение условий этой теоремы.

Лемма 3.4.
(i) Для любого $c > 0$ семейство случайных процессов $\widetilde{\widetilde{s}}_T = \widetilde{\widetilde{s}}_T(t);\ 0 \le t \le c$, удовлетворяет $(I_c, \frac{x^2}{T}, \mathbb{C}^2[0,c])$-п.б.у., где I_c определяется как

$$I_c := \begin{cases} \int_0^c \Lambda(f'(t))dt, & \text{если} \quad f \in \mathbb{AC}_0^2[0,c], \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(ii) Для любого $c > 0$ семейство случайных процессов $\widetilde{\widetilde{s}}_T = \widetilde{\widetilde{s}}_T(t);\ 0 \le t \le c$ является э.п. в м.п. $\mathbb{C}^2[0,c]$ с н.ф. $\frac{x^2}{T}$.
(iii) Имеет место соотношение

$$\widetilde{\nu}_T \overset{L.D.}{\sim} \frac{1}{a_\tau}h$$

в пространстве $\mathbb{C}[0,1]$, где функция $h(t) = t$.
(iv) Имеет место соотношение

$$\widetilde{\widetilde{z}}_T \overset{L.D.}{\sim} \overline{z}_T$$

в пространстве $\mathbb{D}^2[0,1]$.

Лемма 3.4 будет доказана ниже, а сейчас вернемся к доказательству Теоремы 3.1. Поскольку в силу утверждений $(i)-(iii)$ Леммы 3.4 все условия Теоремы 2.1 выполнены, то в силу этой теоремы, Леммы 4.1 (см. раздел 4) и Следствия 2.6 имеем: семейство процессов $\widetilde{\widetilde{z}}_T$ удовлетворяет $\left(I, \frac{x^2}{T}, \mathbb{C}^2[0,1]\right)$-п.б.у. Привлекая далее утверждение (iv) Леммы 3.4, получаем в силу Определения 2.4 утверждение Теоремы 3.1. □

Осталось выполнить

Доказательство Леммы 3.1. $(i)-(ii)$. Рассмотрим сначала однородный случай, когда распределения случайных векторов ξ_1 и ξ совпадают. Утверждения $(i)-(ii)$ Леммы 3.1 следуют из теорем 5.2.1, 5.2.2 [18], Лемм 4.1, 4.3 (см. раздел 4).

Пусть теперь распределения случайных векторов ξ_1 и ξ различны. Тогда можно считать, что на вероятностном пространстве определены независимые случайные векторы

$$\xi_1^* = (\tau_1^*, \zeta_1^*), \xi_1 = (\tau_1, \zeta_1), \xi_2 = (\tau_2, \zeta_2), \cdots ,$$

и при этом векторы $\xi_1, \xi_2, \cdots$ имеют общее распределение, отличное от распределения вектора ξ_1^*. Тогда однородному случаю соответствует последовательность

$$\xi_1 = (\tau_1, \zeta_1), \xi_2 = (\tau_2, \zeta_2), \cdots ,$$

и по ней строится н.с.л.

$$\widetilde{\overline{s}}_T = \widetilde{\overline{s}}_T(t);\ 0 \le t \le c;$$

неоднородному случаю соответствует последовательность

$$\xi_1^* = (\tau_1^*, \zeta_1^*), \xi_2 = (\tau_2, \zeta_2), \cdots ,$$

и по ней строится н.с.л.

$$\widetilde{\overline{s}}_T^* = \widetilde{\overline{s}}_T^*(t);\ 0 \le t \le c.$$

Легко видеть, что в этом случае

$$\rho(\widetilde{\overline{s}}_T, \widetilde{\overline{s}}_T^*) = \sup_{0\le t\le c} |\widetilde{\overline{s}}_T(t) - \widetilde{\overline{s}}_T^*(t)| \le \frac{1}{x}(|\zeta_1 - \zeta_1^*| + |a|(|\tau_1 - \tau_1^*|))$$

$$\le \frac{1}{x}(|\zeta_1| + |\zeta_1^*| + |a|(\tau_1 + \tau_1^*)).$$

Из последнего, в силу условия $[\mathbf{C}_0]$, легко вытекает соотношение $\widetilde{\overline{s}}_T \overset{L.D.}{\sim} \widetilde{\overline{s}}_T^*$. Тем самым, мы доказали утверждения (i), (ii) для общего случая.

(iii). Доказательство утверждения (iii) осуществим сначала для однородного случая. Легко видеть, что $\{\nu(T) < N\} = \{T_N \ge T\}$. Поэтому $\{\nu(T) \ge N\} = \{T_N < T\}$, и для $N = [cT]$ при $a_\tau N > T$ в силу экспоненциального неравенства Чебышева имеем

$$\mathbf{P}(\nu(T) \ge [cT]) = \mathbf{P}(T_N < T) \le e^{-N\Lambda_\tau(\frac{T}{N})} = e^{-T\frac{N}{T}\Lambda_\tau(\frac{T}{N})}, \qquad (3.9)$$

где

$$\Lambda_\tau(\alpha) := \sup_\lambda\{\lambda\alpha - \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau}\}$$

— функция уклонений случайной величины τ. Поскольку функция уклонений $\Lambda_\tau(\alpha)$ убывает на интервале $(0, a_\tau)$, то при $\frac{T}{N} \le \frac{a_\tau}{2}$ имеем

$$\Lambda_\tau\left(\frac{T}{N}\right) \ge \Lambda_\tau\left(\frac{a_\tau}{2}\right) =: \delta,$$

$$\frac{N}{T}\Lambda_\tau\left(\frac{T}{N}\right) \ge \frac{2}{a_\tau}\Lambda_\tau\left(\frac{T}{N}\right) \ge \frac{2}{a_\tau}\delta =: \gamma_1 > 0.$$

Следовательно, при $c = \frac{3}{a_\tau}$ для всех достаточно больших T в силу (3.9) имеем

$$\mathbf{P}(\nu(T) \ge [cT]) \le e^{-T\gamma_1}. \tag{3.10}$$

Оценим теперь на событии $\{\nu(T) \le [cT]\}$ значение $\rho\left(\widetilde{\nu}_T, \frac{1}{a_\tau}h\right)$.

Поскольку $\nu(T_k + 0) = k$, то $\widetilde{\nu}(T_k) = k$, и, следовательно,

$$\rho\left(\widetilde{\nu}_T, \frac{1}{a_\tau}h\right) = \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{1}{T}\widetilde{\nu}(tT) - \frac{1}{a_\tau}t\right|$$

$$= \frac{1}{T}\max_{0\le u\le T}\left|\widetilde{\nu}(u) - \frac{1}{a_\tau}u\right| \le \frac{1}{T}\max_{1\le k\le [cT]+1}\left|k - \frac{1}{a_\tau}T_k\right|.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\rho\left(\widetilde{\nu}_T, \frac{1}{a_\tau}h\right) \ge \delta,\ \nu(T) \le [cT]\right)$$
$$\le ([cT]+1)\max_{1\le k\le [cT]+1}\mathbf{P}\left(\left|k - \frac{1}{a_\tau}T_k\right| \ge T\delta\right).$$

Оценим при $1 \le k \le [cT]+1$ с помощью экспоненциального неравенства Чебышева вероятность

$$\mathbf{P}_k := \mathbf{P}\left(\left|k - \frac{1}{a_\tau}T_k\right| \ge T\delta\right) = \mathbf{P}(T_k \ge ka_\tau + T\delta a_\tau) + \mathbf{P}(T_k \le ka_\tau - T\delta a_\tau).$$

Имеем

$$\mathbf{P}_k \le e^{-k\Lambda_\tau(a_\tau + \frac{1}{k}T\delta a_\tau)} + e^{-k\Lambda_\tau(a_\tau - \frac{1}{k}T\delta a_\tau)}.$$

Поскольку при $|\alpha| \ge \frac{\delta a_\tau}{c+1}$ в силу условия $[\mathbf{C}_0]$ для некоторого $r = r_\delta > 0$ выполняется $\Lambda_\tau(a_\tau + \alpha) \ge r|\alpha|$, то

$$k\Lambda_\tau\left(a_\tau \pm \frac{1}{k}T\delta a_\tau\right) \ge kr\frac{1}{k}T\delta a_\tau = Tr\delta a_\tau.$$

Получили равномерную по k в пределах $1 \le k \le [cT]+1$ оценку

$$\mathbf{P}_k \le 2e^{-T\gamma_2}, \qquad \gamma_2 := r\delta a_\tau,$$

откуда получаем

$$\mathbf{P}\left(\rho\left(\widetilde{\nu}_T, \frac{1}{a_\tau}h\right) \ge \delta, \quad \nu(T) \le [cT]\right) \le 2(cT+1)e^{-T\gamma_2}. \qquad (3.11)$$

Из оценок (3.10), (3.11) вытекает утверждение (iii).

Доказательство (iii) в неоднородном случае легко сводится к доказательству в однородном случае. Для этого формулу (3.9) следует заменить на

$$\mathbf{P}(\nu(T) \ge [cT]+1) = \mathbf{P}(T_{N+1} < T)$$
$$\le \mathbf{P}(\tau_2 + \dots \tau_{n+1} + < T) \le e^{-N\Lambda_\tau(\frac{T}{N})} = e^{-T\frac{N}{T}\Lambda_\tau(\frac{T}{N})},$$

а затем повторить приведенное выше доказательство. При этом будет получено неравенство (3.10) и в неоднородном случае.

Доказательство (iv) осуществим сразу в общем (неоднородном) случае. Имеем

$$\rho_T := \rho(\widetilde{\overline{z}}_T, \overline{z}_T) = \sup_{0\le t\le 1} |\widetilde{\overline{z}}_T(t) - \overline{z}_T(t)| = \frac{1}{x}\sup_{0\le u\le T}\left|\widetilde{\overline{Z}}(u) - \overline{Z}(u)\right|.$$

Поскольку процессы $\widetilde{\overline{Z}}(u)$, $\overline{Z}(u)$ совпадают при $u = T_k$, $k = 0, 1, \cdots$, то на событии $\{\nu(T) \le [cT]\}$ имеем

$$\rho_T \le \frac{1}{x}\max_{1\le k\le [cT]+1} X_k,$$

где $X_k := \sqrt{(\zeta_k - a\tau_k)^2 + (a_\zeta - a\tau_k)^2}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\rho_T > \delta, \quad \nu(T) \le [cT]\right) \le ([cT]+1)\max\{\mathbf{P}(X_1 \ge x\delta), \mathbf{P}(X_2 \ge x\delta)\}.$$

Случайные величины X_1, X_2 удовлетворяют условию $[\mathbf{C}_0]$, поэтому для некоторых $M < \infty$ и $r_2 > 0$ соответствующие X_1, X_2 функции уклонений удовлетворяют при всех $\alpha > 0$ неравенствам

$$\Lambda_{X_1}(\alpha) \ge -M + r_2\alpha, \quad \Lambda_{X_2}(\alpha) \ge -M + r_2\alpha.$$

Учитывая, что для всех достаточно больших T выполняется $x \ge \sqrt{T}$, получаем $(cT+1)e^{-x\gamma_3} = o(1)$ и

$$\mathbf{P}\left(\rho_T > \delta, \quad \nu(T) \le [cT]\right) \le e^{M - x\gamma_3}, \quad \gamma_3 := \frac{1}{2}r_2\delta. \qquad (3.12)$$

Из оценок (3.10), (3.12) вытекает утверждение (iv) доказываемой леммы. $\square$

4. Вспомогательные результаты

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 4.1. *(i) Пусть для любой функции x, удовлетворяющей условию* (3.5) *семейство непрерывных процессов $s_T(t) := \frac{1}{x}S(tT)$ удовлетворяет $\left(I, \frac{x^2}{T}, \mathbb{C}^d[0,1]\right)$-п.б.у. Тогда для любого $c > 0$ это семейство также будет удовлетворять $\left(\tilde{I}, \frac{x^2}{T}, \mathbb{C}^d[0,c]\right)$-п.б.у., где $\tilde{I}(f) = I(g)$ для $g(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}f(tc)$.*

(ii) Пусть для любой функции x, удовлетворяющей условию (3.5) *семейство непрерывных случайных процессов $s_T(t) := \frac{1}{x}S(tT)$ удовлетворяет $\left(I, \frac{x^2}{T}, \mathbb{C}^d[0,c]\right)$-п.б.у. Тогда семейство процессов $s_T(ct)$ будет удовлетворять $\left(\tilde{I}, \frac{x^2}{T}, \mathbb{C}^d[0,1]\right)$-п.б.у., где $\tilde{I}(f) = I(g)$ для $g(t) = f(t/c)$.*

Доказательство. Доказательство утверждения (i). Из (3.5) следует, что семейство $s_r^c(t) := \frac{1}{\sqrt{c}x(r/c)}S(tr)$, удовлетворяет $\left(I, \frac{x^2(r/c)}{r/c}, \mathbb{C}^d[0,1]\right)$-п.б.у. Тогда произведя замену переменной $T = \frac{r}{c}$ получим, что семейство случайных процессов $s_{Tc}^c(t) := \frac{1}{\sqrt{c}x(T)}S(tTc)$ будет удовлетворять $\left(I, \frac{x^2(T)}{T}, \mathbb{C}^d[0,1]\right)$-п.б.у.

Рассмотрим непрерывный оператор $\mathbf{F}$ действующий из $\mathbb{C}^d[0,1]$ в $\mathbb{C}^d[0,c]$, который отображает функцию $f(t)$ в $\sqrt{c}f(t/c)$. Очевидно, что $\mathbf{F}s_{Tc}^c(\cdot) = s_T(\cdot)$, поэтому, (см., например, теорему 3.1 [14]) получаем, что семейство процессов $s_T(t)$ удовлетворяет $\left(\tilde{I}, \frac{x^2(T)}{T}, \mathbb{C}^d[0,c]\right)$-п.б.у., где $\tilde{I}(f) = I(g)$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{c}}f(tc)$.

Утверждение (ii) доказывается аналогичными рассуждениями.

□

Лемма 4.2. *Семейство процессов $\beta_1 z_{1,T}(t) + \beta_2 z_{3,T}(t)$, где $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$ удовлетворяет $\mathbb{C}$–$\left(\hat{I}, \frac{x^2}{T}, \mathbb{D}[0,1]\right)$-п.б.у., где*

$$\hat{I}(f) := \begin{cases} \frac{a_\tau}{2\mathbf{D}(\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2)} \int_0^1 (f'(t))^2 dt, & \text{если} \quad f \in \mathbb{AC}_0[0,1], \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку для вектор-функции $g = (g_1, g_2)$ оператор $\mathbf{F}(g) := \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2$ действующий из $\mathbb{D}^2[0,1]$ в $\mathbb{D}[0,1]$ непрерывен, то используя “contraction principle” (см., например, теорему 3.1 [14]), получаем, что семейство процессов $\beta_1 z_{1,T}(t)+\beta_2 z_{3,T}(t)$ будет удовлетворять п.б.у. с функционалом уклонений

$$\hat{I}(f)=\inf_{g\colon\ \beta_1 g_1+\beta_2 g_2=f} I(g).$$

Покажем, что функционал $\hat{I}(f)$ имеет заявленный выше вид.

Если $f\notin \mathbb{AC}_0[0,1]$, то ее прообраз не содержит функций из множества $\mathbb{AC}_0^2[0,1]$, а значит, $\inf\limits_{g\colon\ \beta_1 g_1+\beta_2 g_2=f} I(g)=\infty$.

Пусть $f\in\mathbb{AC}_0[0,1]$ и $\beta_1\neq 0$ (случай $\beta_2\neq 0$ рассматривается полностью аналогично), тогда

$$\begin{aligned}
&\inf_{g\colon\ \beta_1 g_1+\beta_2 g_2=f} I(g)\\
=\ &\inf_{g\colon\ \beta_1 g_1+\beta_2 g_2=f}\frac{a_\tau}{2\Delta_B}\int_0^1 (B_{22}(g_1'(t))^2-2B_{12}g_1'(t)g_2'(t)+B_{11}(g_2'(t))^2)dt\\
=\ &\inf_{g_2}\frac{a_\tau}{2\Delta_B}\int_0^1\left(\frac{B_{22}}{\beta_1^2}(f'(t)-\beta_2 g_2'(t))^2\right.\\
-\ &\left.\frac{2B_{12}}{\beta_1}(f'(t)-\beta_2 g_2'(t))g_2'(t)+B_{11}(g_2'(t))^2\right)dt\\
=\ &:\inf_{g_2}\frac{a_\tau}{2\Delta_B}\int_0^1 u(f'(t),g_2'(t))dt.
\end{aligned}$$

где Δ_B — определитель ковариационной матрицы $B=\|\mathbf{E}\theta_i\theta_j\|$, $B_{11}=\mathbf{D}\theta_1$, $B_{12}=\mathbf{E}\theta_1\theta_2$, $B_{22}=\mathbf{D}\theta_2$.

Выделяя полный квадрат получаем

$$\begin{aligned}
u(f'(t),g_2'(t))=\frac{\mathbf{D}(\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2)}{\beta_1^2}\left(g_2'(t)-f'(t)\frac{B_{12}\beta_1+B_{22}\beta_2}{\mathbf{D}(\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2)}\right)^2\\
+(f'(t))^2\frac{\Delta_B}{\mathbf{D}(\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, инфимум достигается на функции

$$g_2(t)=f(t)\frac{B_{12}\beta_1+B_{22}\beta_2}{\mathbf{D}(\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2)},$$

а значит,

$$\inf_{g_2}\frac{a_\tau}{2\Delta_B}\int_0^1 u(f'(t),g_2'(t))dt=\frac{a_\tau}{2\mathbf{D}(\beta_1\theta_1+\beta_2\theta_2)}\int_0^1 (f'(t))^2dt.$$

□

Везде далее $[T]$ — целая часть числа T.

Лемма 4.3. *Пусть для любой функции x, удовлетворяющей условию (3.5) последовательность непрерывных случайных процессов $s_{[T]}(t) := \frac{1}{x([T])}S(t[T])$ удовлетворяет $\Big(I, \frac{x^2([T])}{[T]}, \mathbb{C}^d[0,1]\Big)$-п.б.у. Тогда семейство $s_T(t)$ будет удовлетворять $\Big(I, \frac{x^2(T)}{T}, \mathbb{C}^d[0,1]\Big)$-п.б.у.*

Доказательство. Из Леммы 4.1 (i) и теоремы Пухальского [19] следует, что последовательность $s_{[T]}(t)$ будет экспоненциально плотной в м.п. $\mathbb{C}^d[0,1+\Delta]$ с нормирующей функцией $\frac{x^2([T])}{[T]}$. Поэтому, выбирая

$$\eta_T(t) := \frac{tT}{[T]},\ 0 \le t \le 1$$

мы попадаем в условия Теоремы 2.1. Значит, в силу равенства $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{T}{[T]} = 1$, Следствия 2.6 и Замечания 2.5 получаем: для семейства

$$\frac{1}{x([T])}S(tT),\ 0 \le t \le 1,$$

выполнен $\Big(I, \frac{x^2([T])}{T}, \mathbb{C}^d[0,1]\Big)$-п.б.у.

Дальнейшее доказательство проведем методом от противного. Если для семейства s_T не выполнен $\Big(I, \frac{x^2(T)}{T}, \mathbb{C}^d[0,1]\Big)$-п.б.у., то тогда найдутся $\delta > 0$, $N < \infty$, множество $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{C}^d[0,1]}$ и подпоследовательность R_k, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = \infty$ такие, что для всех k будет выполнено хотя бы одно из трех условий

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{R_k}{x^2(R_k)} \ln \mathbf{P}(\, s_{R_k} \in B\,) \ge -I([B]) + \delta,\ I([B]) < \infty;$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{R_k}{x^2(R_k)} \ln \mathbf{P}(\, s_{R_k} \in B\,) \ge -N,\ I([B]) = \infty;$$

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{R_k}{x^2(R_k)} \ln \mathbf{P}(\, s_{R_k} \in B\,) \le -I((B)) - \delta.$$

Пусть для определенности выполнено первое условие (для остальных условий доказательство полностью аналогичное).

Очевидно, что можно считать, что $R_k - R_{k-1} > 1$.

Определим $\tilde{x}(T)$ следующим образом

$$\tilde{x}(T) = \begin{cases} x(R_k), & \text{если} \quad T \in [[R_k],[R_k]+1), \\ a_k T + b_k, & \text{если} \quad T \in [[R_k]+1,[R_{k+1}]), \end{cases}$$

где a_k и b_k подобраны так, чтобы

$$a_k([R_k]+1) + b_k = x(R_k), \quad a_k[R_{k+1}] + b_k = x(R_{k+1}).$$

Очевидно, что функция $\tilde{x}(T)$ удовлетворяет условию (3.5).

Тогда в силу того, что для семейства случайных процессов $s_{T,\tilde{x}} := \frac{1}{\tilde{x}([T])} S(tT)$ выполнен $\left(I, \frac{\tilde{x}^2([T])}{T}, \mathbb{C}^d[0,1]\right)$-п.б.у., будем иметь

$$-I([B]) \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{R_k}{\tilde{x}^2([R_k])} \ln \mathbf{P}(\, s_{R_k,\tilde{x}} \in B\,)$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \frac{R_k}{x^2(R_k)} \ln \mathbf{P}(\, s_{R_k} \in B\,) \geq -I([B]) + \delta.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Литература

[1] F. J. Anscombe, *Large sample-theory of sequential estimation* // Proc. Cambridge Philos. Soc., **48** (1952), 600–607.

[2] J. R. Blum, D. L. Hanson, J. I. Rosenblatt, *On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables* // Z. Wahrsch. verw. Gebiete 1, 1963, 389–393.

[3] M. Csörgő, L. Horváth, J. Steinebach, *Invariance principles for renewal processes* // Ann. Probab., **15** (1987), 1441–1460.

[4] M. Csörgő, Z. Rychlik, *Weak convergence of sequences of random elements with random indices* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. , **88** (1980), 171–174.

[5] M. Csörgő, Z. Rychlik, *Asymptotic properties of randomly indexed sequences of random variables* // Canad. J. Statist., **9** (1981), 101–107.

[6] A. Gut, *On the law of the iterated logarithm for randomly indexed partial sums with two applications* // Studia Sci. Math. Hungar., **20** (1985), 63–69.

[7] A. Gut, *Anscombe laws of the iterated logarithm* // Probab. Math. Statist., **12** (1991), 127–137.

[8] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, NY, 1998.

[9] J. D. Deuschel, D. W. Stroock, *Large Deviation*, Boston, 1989.

[10] F. Hollander, *Large Deviations*, Fields Institute Monographs 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[11] E. Olivieri, M. E. Vares, *Large deviations and metastability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[12] A. Puhalskii, *Large Deviations and Idempotent Probability*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[13] S. R. Varadhan, *Large Deviations and Applications*, Philadelphia, 1984.

[14] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, М., 1979.

[15] J. Feng, T. Kurtz, *Large Deviations for Stochastic Processes* // Math. Surveys Monogr. 131, American Mathematical Society, Providence, 2006.

[16] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, М., 1977.

[17] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Third Edition, 1999.

[18] А. А. Боровков, *Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений*, М., 2013.

[19] А. А. Пухальский, *К теории больших уклонений* // Теория вероятностей и ее применения, **38** (1993), No. 3, 490–497.

Сведения об авторах

Артём Васильевич Логачёв
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
Новосибирский государственный университет экономики и управления,
Новосибирск, Россия
E-Mail: omboldovskaya@mail.ru

Анатолий Альфредович Могульский
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия
E-Mail: mogul@math.nsc.ru