РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

И.И. Скрыпник

Донецк, Украина

1. Введение. Изучается достаточное условие регулярности граничной точки $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ для неотрицательного решения параболического уравнения

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)u^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad m > 1 \tag{1.1}$$

в цилиндрической области $\Omega_T \equiv \Omega \times (0,T)$. Гельдеровость решения уравнения (1.1) внутри Ω_T и вблизи достаточно гладкой границы области Ω_T была показана в работах Д.Г.Аронсона [1], Е.Ди Бенедетто [3], [11].

Для уравнения теплопроводности вопрос о непрерывности решения вплоть до границы был рассмотрен А.Н.Тихоновым (см. [8]).

Для квазилинейного параболического уравнения с линейным ростом коэффициентов достаточное условие регулярности граничной точки было получено В.П.Цимером [10], Эклундом Н. [5]. Необходимое условие регулярности граничной точки было получено И.В.Скрыпником [7].

2. Доказательство основной теоремы при предполагаемых априорных оценках. Пусть Ω - ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^N$. Предположим, что $a_{ij}(x,t)$ ограниченные измеримые функции, которые определены при $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ и для которых при $\xi \in R^N$ выполнены неравенства с положительными постоянными C_0, C_1

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq C_0 |\xi|^2, \tag{2.1}$$

$$|a_{ij}(x,t)| \leq C_1, \ i,j = 1,\ldots,N. \tag{2.2}$$

Под решением уравнения (1.1) понимаем функцию $u(x,t) \in C_{loc}(0,T;\ L^2_{loc}(\Omega)) \cap L_\infty(\Omega_T)$ такую, что $u(x,t)^{\frac{m-1}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \in L_{2,loc}(\Omega_T)$ и выполнено тождество

$$\int_\Omega u(x,t)\psi(x,t)dx \,\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left\{-u(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)u^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right\}dx\,dt = 0, \tag{2.3}$$

справедливое для любой $\psi \in W^{1,2}(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$ с носителем в Ω_T и для всех $0 < t_1 < t_2 < T$. Здесь $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$.

Определение 2.1. Будем говорить, что $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ - регулярная граничная точка области Ω_T для уравнения (1.1), если для всякого определенного в Ω_T неотрицательного решения $u(x,t)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию $u(x,t)=f(x,t)$, $(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$, с функцией $f(x,t)\in C(\overline{\Omega}_T)\cap W_2^{1,1}(\Omega_T)$, выполнено равенство

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0/t_0)\\(x,t)\in\Omega_T}} u(x,t)=f(x_0,t_0) \tag{2.4}$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 2.1. *Для того, чтобы $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ была регулярной граничной точкой области Ω_T для уравнения (1.1) достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 \frac{C_2(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{N-1}}dr=\infty, \tag{2.5}$$

где $C_2(E)$ - емкость множества $E\subset R^N$, $B(x_0,r)$ - шар радиуса r с центром в точке x_0.

Зафиксируем точку $(x_0,t_0)\in S_T\equiv\partial\Omega\times(0,T)$ и положительное число R и рассмотрим цилиндр

$$Q_R^{(\varepsilon)}\equiv B(x_0,R)\times(t_0-R^{2-\varepsilon},t_0),\ 0<t_0-R^{2-\varepsilon}<t_0<T,$$

где ε достаточно малое положительное число.

Определим

$$\mu^+=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_R^{(\varepsilon)}\cap\Omega_T} u,\ \ \mu^-=\operatorname*{ess\,inf}_{Q_R^{(\varepsilon)}\cap\Omega_T} u,\ \ \omega=\mu^+-\mu^-, \tag{2.6}$$

предполагаем также, без ограничения общности, что $f(x,t)=0$ в $Q_R^{(\varepsilon)}\cap S_T$.

Рассмотрим цилиндр

$$Q(R,\theta R^2)\equiv B(x_0,R)\times(t_0-\theta R^2,t_0),\ \theta=\alpha\frac{1}{(\mu^+)^{m-1}}, \tag{2.7}$$

$\alpha\in[1,\infty)$ некоторое число, зависящее лишь от N,C_0,C_1, которое мы определим позже. Если $\mu^+\ge(\alpha R^\varepsilon)^{\frac{1}{m-1}}$, то имеет место включение $Q(R,\theta R^2)\subset Q_R^{(\varepsilon)}$.

Используя некоторые вспомогательные решения, в следующем параграфе будет доказана

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что выполнена оценка*

$$\mu^+\ge(\alpha R^\varepsilon)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{2.8}$$

Тогда существуют положительные постоянные s_*,β, зависящие лишь от N,p,C_0,C_1 такие, что выполнена оценка

$$u(x,t)\le\mu^+-\frac{\omega}{2^{s_*}}\Delta(R)\quad c\quad \Delta(R)=\frac{C_2(B(x_0,R)\setminus\Omega)}{R^{N-2}} \tag{2.9}$$

для $(x,t)\in B\left(x_0,\dfrac{R}{2}\right)\times\left(t_0-\beta\theta\left(\dfrac{R}{2}\right)^2,t_0\right)$.

Используя теорему 2.2 аналогично [9], стр.176, доказывается непрерывность решения $u(x,t)$ в точке $(x_0,t_0)\in S_T$, что и устанавливает результат теоремы 2.1.

Замечание 2.1. Отметим, что теорема 2.1 справедлива для уравнения

$$u_t-\sum_{i=1}^N\frac{d}{dx_i}a_i(x,t,u,u_x)=b(x,t,u,u_x), \tag{2.10}$$

при условии, что функции $a_i(x,t,u,p)$, $b(x,t,u,p)$, $i=1,\dots,N$ удовлетворяют условиям Каратеодори, для них выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x,t,u,p)p_i \geq C_0|p|^2|u|^{m-1} - 1,$$

$$|a_i(x,t,u,p)| \leq C_1|p|\cdot|u|^{m-1} + 1, \tag{2.11}$$

$$|b(x,t,u,p)| \leq C_2|p|^2\cdot|u|^{m-1} + 1,$$

и для уравнения (2.10) справедлива теорема сравнения.

3. Оценки вспомогательных решений.

Определим $Q_1 = (B(x_0,8R)\setminus E_R)\times\left(t_0-\theta(8R)^2, t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2\right)$, $Q_2 = B(x_0,8R)\times$ $\times\left(t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2, t_0-\frac{\theta}{4}(8R)^2\right)$, $E_R = B(x_0,R)\setminus\Omega$.

Предположим, что выполнено неравенство (2.8). В области Q_1 определим функцию $v_R(x,x_0;t,t_0;\omega)$, как решение уравнения

$$v_t - \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)(\mu^+ - v)^{m-1}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = 0, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$v_R(x,x_0;t_0-\theta(8R)^2,t_0;\omega) = 0,\ x\in B(x_0,8R)\setminus E_R, \tag{3.2}$$

$$v_R(x,x_0;t,t_0,\omega) = 0,\ (x,t)\in\partial B(x_0,8R)\times\left(t_0-\theta(8R)^2, t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2\right) \tag{3.3}$$

$$v_R(x,x_0;t,t_0,\omega) = \frac{\omega}{4},\ (x,t)\in\partial E_R\times\left(t_0-\theta(8R)^2, t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2\right). \tag{3.4}$$

В области Q_2 определим функцию $w_R(x,x_0;t,t_0;\omega)$, как решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям

$$w_R(x,x_0;t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2,t_0;\omega) = 0,\ x\in E_R, \tag{3.5}$$

$$w_R\left(x,x_0;t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2,t_0;\omega\right) = v_R\left(x,x_0;t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2,t_0;\omega\right),\ x\in B(x_0,8R)\setminus E_R, \tag{3.6}$$

$$w_R(x,x_0;t,t_0;\omega) = 0,\ (x,t)\in\partial B(x_0,8R)\times\left(t_0-\frac{\theta}{2}(8R)^2, t_0-\frac{\theta}{4}(8R)^2\right). \tag{3.7}$$

Без ограничения общности, считаем, что $x_0 = 0$, $t_0 = \theta(8R)^2$, и для упрощения записи обозначим $B_R = B(0,R)$, $v(x,t) = v_R(x,0;t,\theta(8R)^2;\omega)$, $w(x,t) = v(x,0;t,\theta(8R)^2;\omega)$, обозначим также $\bar{t} = \frac{\theta}{2}(8R)^2$. Через γ будем обозначать всевозможные положительные постоянные, зависящие лишь от N, p, C_0, C_1.

ЛЕММА 3.1. *Имеет место оценка*

$$\sup_{0<t<\bar{t}}\int_{B_{8R}\setminus E_R} v^2(x,t)dx + \int_0^{\bar{t}}\int_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^2(\mu^+ - v(x,t))^{m-1}\,dx\,dt \leq \gamma\,\omega^2\theta\cdot\Delta(R)R^N. \tag{3.8}$$

Доказательство. Можно показать, что при $h>0,\ 0<\tau<\bar{t}-h$ справедливо интегральное тождество

$$\int_0^{\tau}\int_{B_{8R}\setminus E_R}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[v(x,t)]_h\psi(x,t)+\sum_{i,j=1}^{N}\left[a_{ij}(x,t)(\mu^+-v)^{m-1}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]_h\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right\}\cdot dx\,dt=0, \tag{3.9}$$

для любой функции $\psi\in\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1}(Q_1)$, здесь $[g(x,t)]_h=\dfrac{1}{h}\int_t^{t+h}g(x,\tau)d\tau$.

Обозначим через $m(E_R)$ множество, образованное функциями $\varphi(x)\in C_0^{\infty}(B_{2R})$, удовлетворяющими условию $\varphi(x)\equiv1$ на E_R. Легко проверяется (см. [6], стр.304), что

$$\inf\left\{\int_{B_{2R}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2dx,\ \varphi\in m(E_R)\right\}\le\gamma\,C_2(E_R).$$

Подставим в (3.9) функцию $\psi(x,t)=[v(x,t)]_h-\dfrac{\omega}{4}\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in m(E_R)$.

Используя оценки (2.1), (2.2), осуществляя предельный переход при $h\to0$, получим

$$\sup_{0<t<\bar{t}}\int_{B_{8R}\setminus E_R}v^2(x,t)dx+\int_0^t\int_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2(\mu^+-v(x,t))^{m-1}\,dx\,d\tau\le$$

$$\le\gamma\omega^2\int_{B_{2R}}\varphi^2(x)\,dx+\gamma\,\bar{t}\,\omega^2(\mu^+)^{m-1}\int_{B_{2R}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2dx\,.$$

Применяя неравенство Пуанкаре, отсюда получаем (3.8).

ЛЕММА 3.2. *Справедлива оценка*

$$\sup_{\bar{t}<t<2\bar{t}}\int_{B_{8R}}w^2(x,t)dx+\int_{\bar{t}}^{t}\int_{B_{8R}}|w_x|^2(\mu^+-w(x,t))^{m-1}\,dx\,d\tau\le\gamma\omega^2\theta\ \Delta(R)R^N. \tag{3.10}$$

Доказательство. Легко проверяется интегральное тождество

$$\int_{\bar{t}}^{\tau}\int_{B_{8R}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[w(x,t)]_h\psi(x,t)+\sum_{i,j=1}^{N}\left[a_{ij}(x,t)(\mu_+-w)^{m-1}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right]_h\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_j}dx\,dt\right\}=0, \tag{3.11}$$

с функцией $\psi\in\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1}(Q_2)$.

Подставим в (3.11) функцию $\psi(x,t)=[w(x,t)]_h$, используя неравенства (2.1), (2.2), осуществляя предельный переход при $h\to0$, получим

$$\sup_{\bar{t}<t<2\bar{t}}\int_{B_{8R}}w^2(x,t)dx+\int_{\bar{t}}^{t}\int_{B_{8R}}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2(\mu^+-w)^{m-1}\,dx\,d\tau\le\int_{B_{8R}\setminus E_R}v^2(x,\bar{t})dx.$$

Отсюда, используя (3.8), получим (3.10).

Обозначим $v_\mu(x,t)=\min\{v(x,t),\mu\}$.

ЛЕММА 3.3. *Справедлива оценка*

$$\sup_{0<t<\bar{t}}\int_{B_{8R}\setminus E_R}v_\mu^2(x,t)dx+\int_0^t\int_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v_\mu(x,\tau)}{\partial x}\right|^2(\mu^+-v(x,t))^{m-1}\,dx\,d\tau\le\gamma\omega\mu\theta\cdot\Delta(R)R^N. \tag{3.12}$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (3.9) функцию $\psi(x,t)=$

$[v_\mu(x,t)]_h - \mu\varphi(x)$. Используя неравенства (2.1), (2.2), осуществляя предельный переход при $h\to 0$, получим

$$\sup_{0<t<\bar t}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v_\mu^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^{\bar t}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}\left|\frac{\partial v_\mu(x,\tau)}{\partial x}\right|^2(\mu^+-v(x,\tau))^{m-1}\,dx\,d\tau\le$$

$$\le\mu\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R} v(x,t)\varphi(x)\,dx+\gamma\mu\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\cdot(\mu^+-v(x,\tau))^{m-1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|dx\,d\tau.$$

Используя неравенства Гёльдера, Пуанкаре и (3.8), получим (3.12).

ЛЕММА 3.4. *Справедлива оценка*

$$\sup_{\bar t<t<2\bar t}\int\limits_{B_{8R}} w_\mu^2(x,t)\,dx+\iint\limits_{Q_2}\left|\frac{\partial w_\mu(x,t)}{\partial x}\right|^2(\mu^+-w(x,t))^{m-1}dz\,d\tau\le\gamma\omega\mu\theta\cdot\Delta(R)R^N. \tag{3.13}$$

Доказательство. В интегральное тождество (3.11) подставим функцию $\psi(x,t)=[w_\mu(x,t)]_h$. Оценка (3.13) получается аналогично (3.10) с использованием неравенства (3.12).

ЛЕММА 3.5. *Справедливы оценки*

$$\operatorname{ess}\sup_{|x|\ge 4R,\,0<t<\bar t} v(x,t)+\operatorname{ess}\sup_{|x|\ge 4R,\,\bar t<t<2\bar t} w(x,t)\le\gamma\,\omega\,\theta\,\Delta(R), \tag{3.14}$$

$$\operatorname{ess}\sup_{|x|\ge 8R,\,\frac32\bar t<t<2\bar t} w(x,t)\le\gamma\,\omega\,\frac{1}{\theta^{\frac{1}{m-1}}}\,\Delta(R). \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим две числовые последовательности $\rho_i^{(1)}=$ $=\frac{8}{3}R(1+2^{-i})$, $\rho_2^{(i)}=\frac{8}{3}R(3-2^{-i})$, $i=1,2,\ldots$. Определим последовательность функций

$$\varsigma_i(x)\in C_0^\infty(R^N),\ \ \varsigma_i(x)=1,\ x\in G_i=\{\rho_i^{(1)}\le|x|\le\rho_i^{(2)}\},$$

$$\varsigma_i(x)=0,\ \ x\notin G_{i+1};\ \left|\frac{\partial\varsigma_i(x)}{\partial x}\right|\le\frac{\gamma 2^i}{R}.$$

Подставим в интегральное тождество (3.9) функцию $\psi(x,t)=[v(x,t)]_h^l\,\varsigma_i^k(x)$, $l,k>0$. Используя неравенства (2.1), (2.2) и переходя к пределу при $h\to 0$, получим

$$I_1=\operatorname{ess}\sup_{0<t<\bar t}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}[v(x,t)]^{l+1}\varsigma_i^k(x)\,dx+\int\limits_0^{\bar t}\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}[v(x,\tau)]^{l-1}(\mu^+-v)^{m-1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2dx\,d\tau\le$$

$$\le\gamma\frac{2^{2i}(\mu^+)^{m-1}}{R^2}\iint\limits_{Q_1}v^{l+1}(x,t)\varsigma_i^{k-2}(x)\,dx\,dt. \tag{3.16}$$

Аналогичным образом, подставляя в (3.11) функцию $\psi(x,t)=[w(x,t)]_h^l\,\varsigma_i^k(x)$, получим

$$I_2=\operatorname{ess}\sup_{\bar t<t<2\bar t}\int\limits_{B_{8R}}[w(x,t)]^{l+1}\varsigma_i^k(x)\,dx+\int\limits_{\bar t}^{\bar t}\int\limits_{B_{8R}}[w(x,\tau)]^{l-1}(\mu^+-w)^{m-1}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2dx\,d\tau\le$$

$$\le\int\limits_{B_{8R}\setminus E_R}[v(x,\bar t)]^{l+1}\varsigma_i^k(x)\,dx+\gamma\frac{2^{2i}(\mu^+)^{m-1}}{R^2}\iint\limits_{Q_2}[w(x,t)]^{l+1}\varsigma_i^{k-2}(x)\,dx\,d\tau. \tag{3.17}$$

Объединяя неравенства (3.16), (3.17), получим

$$I_1+I_2\le\frac{\gamma 2^{2i}(\mu^+)^{m-1}}{R^2}\left\{\iint\limits_{Q_1}[v(x,t)]^{l+1}\varsigma_i^{k-2}(x)\,dx\,dt+\iint\limits_{Q_2}[w(x,t)]^{l+1}\varsigma_i^{k-2}(x)\,dx\,dt\right\}. \qquad (3.18)$$

Обозначим $\mu_i=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{G_i\times(0,\bar t)}v(x,t)+\operatorname*{ess\,sup}\limits_{G_i\times(\bar t,2\bar t)}w(x,t)$. Будем использовать неравенства $\mu^+-v(x,t)\ge\gamma\,\mu^+$ и $\mu^+-w(x,t)\ge\gamma\,\mu^+$. Тогда из (3.18) получаем итерационным методом Мозера следующую оценку

$$\mu_i^2\le\gamma\,2^{2i}\,\frac{(\mu^+)^{m-1}}{R^{N+2}}\left\{\iint\limits_{G_i\times(0,\bar t)}v^2(x,t)\,dx\,dt+\iint\limits_{G_i\times(\bar t,2\bar t)}w^2(x,t)\,dx\,dt\right\}. \qquad (3.19)$$

Далее, используя неравенство Пуанкаре и леммы 3.3, 3.4, из (3.19) получим

$$\mu_i^2\le\gamma\,2^{2i}\,\mu_{i+1}\,\omega\,\theta\,\Delta(R).$$

Итерируя последнее неравенство, получим (3.14). Неравенство (3.15) доказывается аналогичным образом.

ЛЕММА 3.6. *Существуют число $\beta\in(0,1)$ и натуральное число s_0, не зависящие от ω, R, такие, что выполнено, по крайней мере, одно из неравенств*

$$meas\left\{(x,t)\in Q_1: v(x,t)\le\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\}\le\beta\,meas\,Q_1, \qquad (3.20)$$

$$meas\left\{(x,t)\in Q_2: w(x,t)\le\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\}\le\beta\,meas\,Q_2. \qquad (3.21)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^N)$, $\varphi(x)=1$ при $|x|\le 5R$, $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge 6R$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\le\frac{\gamma}{R}$.

Подставим в интегральные тождества (3.9) и (3.11) функции $\psi(x,t)=[v(x,t)]_h-\frac{\omega}{4}\varphi(x)$ и $\psi(x,t)=[w(x,t)]_h-\frac{\omega}{4}\varphi(x)$ соответственно. Переходя к пределу при $h\to0$, получим

$$\int\limits_{B_{6R}\setminus E_R}v^2(x,\bar t)\,dx+\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^2(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\le$$

$$\le\frac{\omega}{4}\int\limits_{B_{6R}\setminus E_R}v(x,\bar t)\varphi(x)\,dx+\omega\gamma\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|(\mu^+-v)^{m-1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|dx\,dt;$$

$$\int\limits_{B_{6R}}w^2(x,\tfrac{3}{2}\bar t)\,dx+\iint\limits_{Q_2}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2(\mu^+-w)^{m-1}\,dx\,dt\le$$

$$\le\frac{\omega}{4}\int\limits_{B_{6R}}w(x,\tfrac{3}{2}\bar t)\varphi(x)\,dx-\frac{\omega}{4}\int\limits_{B_{6R}\setminus E_R}w(x,\bar t)\varphi(x)\,dx+$$

$$+\omega\gamma\iint\limits_{Q_2}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|\cdot(\mu^+-w)^{m-1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|dx\,dt.$$

Складывая два последних неравенства, имеем

$$\iint_{Q_1}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^2\cdot(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\le\frac{\omega}{4}\int_{B_{8R}}w(x,\frac{3}{2}\bar t)\varphi(x)\,dx+$$

$$+\frac{\gamma\omega}{R}\int_0^{\bar t}\int_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt+\frac{\gamma\omega}{R}\int_{\bar t}^{\frac{3}{2}\bar t}\int_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|(\mu^+-w)^{m-1}\,dx\,dt. \qquad (3.22)$$

Оценим каждое слагаемое, стоящее в правой части (3.22). В силу неравенства (3.15), имеем

$$\frac{\omega}{4}\int_{B_{8R}}w(x,\frac{3}{2}\bar t)\,dx\le\gamma\frac{\omega^2}{\alpha^{\frac{1}{m-1}}}\Delta(R). \qquad (3.23)$$

Далее

$$\frac{\omega}{R}\int_0^{\bar t}\int_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\le\frac{\gamma\omega}{R}\left(\int_0^{\bar t}\int_{5R\le|x|\le 6R}v^{2\delta}\cdot(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^{\bar t}\int_{5R\le|x|\le 6R}v^{-2\delta}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2\cdot(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{\gamma\,\omega}{R^2}\left(\int_0^{\bar t}\int_{4R\le|x|\le 7R}v^{2\delta}(x,t)\cdot(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^{\bar t}\int_{4R\le|x|\le 7R}v^{-2\delta+2}\cdot(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.24)$$

Последнее неравенство в (3.24) получено подстановкой в интегральное тождество (3.9) функции

$$\psi(x,t)=[v(x,t)]_h^{-2\delta+1}\chi^p(x), \qquad (3.25)$$

где $0<\delta<\frac{1}{2}$, $\chi(x)\in C_0^\infty(R^N)$, $\chi(x)=1$ при $5R\le|x|\le 6R$,

$\chi(x)=0$ при $|x|\le 4R$, $|x|\ge 7R$,

$\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|\le\frac{\gamma}{R}$, $0\le\chi(x)\le 1$.

Далее, воспользовавшись неравенством (3.14) и неравенством Юнга, из неравенства (3.24) получим

$$\frac{\omega}{R}\int_0^{\bar t}\int_{5R\le|x|\le 6R}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\le$$

$$\le\frac{\gamma\omega}{R^2}\left[\iint_{\{v>\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\}}v^{2-2\delta}(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt+\iint_{\{v<\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\}}v^{2-2\delta}(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\iint_{\{v>\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\}}v^{2\delta}(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt+\iint_{\{v<\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\}}v^{2\delta}(\mu^+-v)^{m-1}\,dx\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\frac{\gamma\omega^2}{R^2}\Delta(R)(\mu^+)^{m-1}\left\{\gamma(\alpha)meas\{Q_1:v>\frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)+\frac{1}{2^{s_0(2-2\delta)}}R^N\bar t\}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\gamma(\alpha) meas\{Q_2 : w > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R) + \frac{1}{2^{s_0 2\delta}} R^N \bar{t}\}\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \gamma\,\bar{t}\,\omega^2(\mu^+)^{m-1} C_2(E_R)\left\{\frac{1}{2^{s_0(s-2\delta)}} + \frac{1}{2^{s_0 2\delta}}\right\} +$$

$$+\gamma(\alpha)\omega^2 \frac{C_2(E_R)}{R^N}(\mu^+)^{m-1} meas\left\{(x,t)\in Q_1 : v > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\} +$$

$$+\gamma(\alpha)\omega^2 \frac{C_2(E_R)}{R^N}(\mu^+)^{m-1} meas\left\{(x,t)\in Q_2 : w > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\}. \tag{3.26}$$

Здесь $\left\{v > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\} = \left\{(x,t)\in Q_1 : v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\}$, $\gamma(\alpha)$ - постоянная, зависящая от известных параметров и α.

Левая часть неравенства (3.21) оценивается снизу в силу определения емкости

$$\iint\limits_{Q_1}\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^2 (\mu^+ - v)^{m-1}\,dx\,dt \ge \gamma\,\omega^2\,(\mu^+)^{m-1}\,\bar{t}\,C_2(E_R). \tag{3.27}$$

Из неравенств (3.22)-(3.27), выбирая вначале достаточно большим α, а затем натуральное число s_0, получим

$$meas\left\{(x,t)\in Q_1 : v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\} +$$

$$+ meas\left\{(x,t)\in Q_2 : w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\} \ge \gamma^{-1}(\alpha)(8R)^N\,\bar{t}. \tag{3.28}$$

Возможны два случая: либо

$$(i) \qquad meas\left\{(x,t)\in Q_1 : v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\} \le \frac{1}{2}\gamma^{-1}(\alpha)(8R)^N\,\bar{t},$$

либо

$$(ii) \qquad meas\left\{(x,t)\in Q_1 : v(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\} > \frac{1}{2}\gamma^{-1}(\alpha)(8R)^N\,\bar{t}.$$

В случае (i) из неравенства (3.28), получаем

$$meas\left\{(x,t)\in Q_2 : w(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\} \ge \frac{\gamma^{-1}(\alpha)}{2}(8R)^N\,\bar{t},$$

и тем самым неравенство (3.21) выполнено при $\beta = 1 - \frac{\gamma^{-1}(\alpha)}{2}$.

В случае (ii) получаем неравенство (3.20). Таким образом, лемма 3.6 доказана.

Далее, в силу теоремы сравнения, имеем оценки

$$u(x,t) \le \mu^+ - v(x,t), \quad (x,t)\in Q_1, \tag{3.29}$$

$$u(x,t) \le \mu^+ - w(x,t), \quad (x,t)\in \widetilde{Q}_2 = Q_2 \setminus \left[E_R \times \left(\frac{\bar{t}}{2}, \bar{t}\right)\right]$$

и тем самым доказывается

ЛЕММА 3.7. *Существуют число $\beta\in(0,1)$ и натуральное число $s_0 = s_0(N, p, C_0, C_1)$, независящие от ω, R, такие, что выполнено неравенство*

$$meas\left\{(x,t)\in Q(8R,\theta(8R)^2): u(x,t)\ge \mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0}}\Delta(R)\right\}\le \beta\ meas\ Q(8R,\theta(8R)^2). \qquad (3.30)$$

Теперь мы находимся в ситуации, аналогичной ([3], стр.29-43), откуда и следует теорема 2.2.

Список литературы

[1] D.G.Aronson. *The porous medium equation in some problems in non-lineardiffusion*, in "Lecture Notes in Mathematics", **1224** (1986), Springer-Verlag, New York.

[2] E.Di Benedetto. *On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sc., Serie IV, XIII3,(1986), 487-535.

[3] E.Di Benedetto. *Topics on degenerate and singular parabolic equations*, in "Notes on the Lipschitz Lectures", Inst. Angew. Math. Bonn, June, (1990).

[4] A.V.Ivanov. *The classes $B_{m,e}$ and Hölder continuity of weak solutions for quasilinear doubly nonlinear degenerate equations*, Part I and Part II, POMI Preprints, E, 12, (1991).

[5] Eklund N. *Boundary behabiour of solutions of parabolic equations with discontinuous coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), 788-792.

[6] Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М., Наука, (1990).

[7] Скрыпник И.В. *Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения*, Мат. сб., **183**, №7 (1992), 3-22.

[8] Тихонов А.Н. *Об уравнениях теплопроводности для нескольких переменных*, Бюлл. МГУ, секция А, **1**, вып.9 (1938), 1-49.

[9] M.M.Porzio, V.Vespri. *Hölder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations*, Journ. of Diff. Equat., **103**, №3 (1993), 146-178.

[10] Ziemer W.P. *Behaviour at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations*, Journ. of Diff. Equat., **35**, №36 (1980), 291-305.

[11] E.Di Benedetto. *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J., **332**, 1 (1983), 83-118.

83114, Донецк 114, ул. Розы Люксембург, 74.