СХОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

© Ю.В. Намлеева

Донецк, Украина

Abstract. A behavior of eigenvalues and eigenfunctions of linear Dirichlet in perforated domains is considered.

Пусть Ω — произвольная ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве $R^n, n > 2$. Предположим, что при каждом натуральном s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_k^{(s)}, k = 1, ..., I(s)$, содержащихся в Ω. Пусть область $\Omega_s = \Omega \setminus \cup_{k=1}^{I(s)} F_k^{(s)}$ имеет бесконечно дифференцируемую границу. В области Ω_s исследуем краевую задачу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u_s(x)}{\partial x_j}\right) + \lambda_s u_s(x) = 0, \qquad x \in \Omega_s, \tag{1}$$

$$u_s(x) \mid_{\partial\Omega_s} = 0, \tag{2}$$

Задачи на собственные значения в областях сложной структуры для оператора Лапласа при краевых условиях Дирихле впервые изучались А.А. Самарским в работе [1]. Усреднение задач на собственные значения для линейных уравнений в мелкозернистых областях рассматривались в работе [2] Е.Я. Хруслова. Спектральные задачи теории усреднения в областях с периодической структурой исследовались также О.А.Олейник и другими авторами в [3]. В работах Ш. Озавы изучается поведение собственных значений лапласиана в сингулярно возмущенных областях, ([4]). В настоящей работе рассматриваются задачи на собственные значения в мелкозернистых областях. Усреднение краевых задач Дирихле для нелинейных уравнений второго порядка в таких областях были изучены И.В. Скрыпником в [5].

Пусть $a_{ij}(x)$ удовлетворяют следующим условиям

A1) $a_{ij}(x)$ ограничены, симметричны и измеримы в Ω;

A2) существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in R^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Обозначим через $d_k^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_k^{(s)}$ и пусть $x_k^{(s)}$ — центр такого шара радиуса $d_k^{(s)}$, что $F_k^{(s)} \subset \overline{B(x_k^{(s)}, d_k^{(s)})}$. Здесь и дальше $B(x_0, \rho)$ — шар радиуса ρ с центром в точке x_0. Через $r_k^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_k^{(s)}, d_k^{(s)})$ до множества $\cup_{l\neq k} B(x_l^{(s)}) \cup \partial\Omega$. Будем предполагать, что выполнены условия

B1) $\lim_{s\to\infty}(\max\limits_{1\leq k\leq I(s)} d_k^{(s)}) = \lim_{s\to\infty}(\max\limits_{1\leq k\leq I(s)} r_k^{(s)}) = 0;$

B2) $d_k^{(s)} < C_2 r_k^{(s)}, \quad C_2 > 1,$
$\sum_{k=1}^{I(s)} \frac{[d_k^{(s)}]^{2(n-2)}}{[r_k^{(s)}]^n} \le C_3.$

В области $B(x_k^{(s)}, 1)$ определим $v_k^{(s)}(x)$ как решение задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v_k^{(s)}(x)}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad x \in B(x_k^{(s)}, 1) \backslash F_k^{(s)},$$

$$v_k^{(s)}(x) \mid_{\partial B(x_k^{(s)},1)} = 0, \qquad v_k^{(s)}(x) \mid_{F_k^{(s)}} = 1.$$

Продолжим $v_r^{(s)}(x)$ на R^n, полагая равной нулю вне $B(x_k^{(s)}, 1)$.

C) существует непрерывная функция $c(x)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k \in I_s(B)} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \frac{\partial v_k^{(s)}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k^{(s)}(x)}{\partial x_j} dx = \int_{B} c(x) dx,$$

здесь $I_s(B)$ — множество таких номеров $k, 1 \le k \le I(s)$, для которых $x_k^{(s)} \in B$.

Обозначим

$$\rho_k^{(s)} = max\left\{d_k^{(s)}(1 + \frac{1}{2C_2}), \frac{1}{2C_4}[r_k^{(s)}]^{\frac{n}{n-2}} ln^2 \frac{1}{r_k^{(s)}}\right\},$$

где $C_4 = \max\limits_{0 \le t \le diam\Omega} \left\{t^{\frac{2}{n-2}} ln^2 \frac{1}{t}\right\}$.

Зафиксируем функцию $\chi(t) : R^1 \to R^1$, бесконечно дифференцируемую и невозрастающую

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t > \vartheta_1 \\ 1, & \text{при } t < \vartheta_2 \end{cases}$$

$\vartheta_2 < \vartheta_1 < 1$. Пусть $\psi_k^{(s)}(x) = \chi\left(\frac{|x - x_k^{(s)}|}{\rho_k^{(s)}}\right)$.

В области Ω рассмотрим задачу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - c(x)u(x) + \lambda u(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x) \mid_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Пусть λ_l — l-е собственное значение задачи (3),(4), $\tilde{u}_l(x)$ — соответствующая собственная функция, $||\tilde{u}_l(x)||_{L_2(\Omega)} = 1, l = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\tilde{u}_{k,l}^{(s)}$ среднее значение функции $\tilde{u}_l(x)$ по шару $D_k^{(s)} = B(x_k^{(s)}, \vartheta_1 \rho_k^{(s)})$.

Рассмотрим последовательность функций $\tilde{u}_{s,l}(x)$, $\forall s \in N$

$$\tilde{u}_{s,l}(x) = \tilde{u}_l(x) + \sum_{m=1}^{3} \nu_{s,l}^{(m)}(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_s), \tag{5}$$

где $$\nu_{s,l}^{(1)}(x) = -\sum_{k \in I'(s)} v_k^{(s)}(x)\tilde{u}_{k,l}^{(s)}\psi_k^{(s)}(x),$$

$$\nu_{s,l}^{(2)}(x) = -\sum_{k \in I''(s)} v_k^{(s)}(x)\tilde{u}_{k,l}^{(s)}\psi_k^{(s)}(x), \tag{6}$$

$$\nu_{s,l}^{(3)}(x) = \sum_{k=1}^{I(s)} \psi_k^{(s)}(x)[\tilde{u}_{k,l}^{(s)} - \tilde{u}_l(x)].$$

$$I'(s) = \left\{k : 1 \le k \le I(s), \rho_k^{(s)} = d_k^{(s)}\left(1 + \frac{1}{2C_2}\right)\right\},$$

$$I''(s) = \left\{k : 1 \le k \le I(s), \rho_k^{(s)} = \frac{1}{2C_4}[r_k^{(s)}]^{\frac{n}{n-2}} ln^2 \frac{1}{r_k^{(s)}}\right\}.$$

В [5] было изучено поведение $\nu_{s,l}^{(m)}(x)$, $m = 1, 2, 3$, и доказаны следующие утверждения

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A1),A2),B), *тогда последовательности* $\nu_{s,l}^{(m)}(x)$, $m = 1, 3$, *сильно сходятся к нулю в* $W_2^1(\Omega)$ *при* $s \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* A1),A2),B),C), *тогда последовательность* $\nu_{s,l}^{(2)}(x)$ *слабо сходится к нулю в* $W_2^1(\Omega)$, *сильно сходится к нулю в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p < 2$, *при* $s \to \infty$.*Кроме того,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial \nu_{s,l}^{(2)}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_{s,l}^{(2)}(x)}{\partial x_j} dx \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega c(x)\tilde{u}_l^2(x)dx.$$

Пусть $\lambda_l(\Omega_s)$ — l-е собственное значение задачи (1),(2), $u_{s,l}(x)$ — соответствующая собственная функция, $l = 1, 2, \ldots$. Докажем, что

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_1(\Omega_s) = \lambda_1 \tag{7}$$

и $u_{s,1}(x)$ сходится слабо к $\tilde{u}_1(x)$. Для этого сначала покажем ограниченность последовательности $\{\lambda_1(\Omega_s)\}_{s=1}^\infty$ постоянной, не зависящей от s. Построим функцию $\tilde{u}_{s,1}(x)$ вида (5)

$$\tilde{u}_{s,1}(x) = \tilde{u}_1(x) + \sum_{m=1}^{3} \nu_{s,1}^{(m)}(x),$$

где $\nu_{s,1}^{(m)}(x), m = 1, 2, 3$, определяются равенствами (6) в случае $l = 1$. Тогда, пользуясь леммами 1,2 и определением $\lambda_1(\Omega_s)$, получаем

$$\lambda_1(\Omega_s) = \inf_{u_s(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_s)} \frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u_s(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_s(x)}{\partial x_j}dx}{\int\limits_\Omega u_s^2(x)dx} \le \frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial \tilde{u}_{s,1}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{u}_{s,1}(x)}{\partial x_j}dx}{\int\limits_\Omega \tilde{u}_{s,1}^2(x)dx} =$$

$$\frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial \tilde{u}_1(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{u}_1(x)}{\partial x_j}dx + \int\limits_\Omega c(x)\tilde{u}_1^2(x)dx + \alpha_1(s)}{\int\limits_\Omega \tilde{u}_1^2(x)dx + \alpha_2(s)}, \tag{8}$$

здесь и дальше $\lim_{s\to\infty} \alpha_m(s) = 0, \forall m \in N$.

Отсюда легко видеть, что $\lambda_1(\Omega_s) \le 2(\lambda_1 + \frac{1}{2})$ и в (8) можно переходить к пределу при $s \to \infty$, обращаясь, если нужно, к подпоследовательностям

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \lambda_1(\Omega_s) \le \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial \tilde{u}_1(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{u}_1(x)}{\partial x_j}dx + \int\limits_\Omega c(x)\tilde{u}_1^2(x)dx = \lambda_1. \tag{9}$$

Пусть $||u_{s,1}(x)||_{L_2(\Omega)} = 1$, тогда из доказанного выше неравенства (9) и определения первого собственного значения следует, что существует постоянная $C_5 \ne C_5(s)$ такая, что $||u_{s,1}(x)||_{W_2^1(\Omega)} \le C_5$. Значит, существует функция $\tilde{u}_1(x)$, являющаяся слабым пределом последовательности $\{u_{s,1}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ в $W_2^1(\Omega)$ при $s\to\infty$. Запишем ассимптотическое разложение функции $u_{s,1}(x)$

$$u_{s,1}(x)=\bar{u}_1(x)+\sum_{m=1}^{3}\bar{\nu}_{s,1}^{(m)}(x)+\bar{\omega}_{s,1}(x). \tag{10}$$

Здесь $\bar{\nu}_{s,1}^{(m)}(x), m=1,2,3$, строятся так же, как и в (6), если вместо $\tilde{u}_1(x)$ взять функцию $\bar{u}_1(x)$. $\bar{\omega}_{s,1}(x)\in \overset{0}{W_2^1}(\Omega_s)$ — остаточтный член разложения. В [5] доказано, что $\bar{\omega}_{s,1}(x)$ сильно сходится к нулю в $W_2^1(\Omega)$ при $s\to\infty$. Тогда из определения первого собственного значения задачи (1),(2) и лемм 1,2 получаем

$$\underline{\lim}_{s\to\infty}\lambda_1(\Omega_s)=\underline{\lim}_{s\to\infty}\frac{\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial u_{s,1}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_{s,1}(x)}{\partial x_j}dx}{\int\limits_{\Omega}u_{s,1}^2(x)dx}=$$

$$\underline{\lim}_{s\to\infty}\frac{\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial\bar{u}_1(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{u}_k(x)}{\partial x_j}dx+\int\limits_{\Omega}c(x)\bar{u}_1^2(x)dx+\alpha_3(s)}{\int\limits_{\Omega}\bar{u}_1^2(x)dx+\alpha_4(s)}\geq$$

$$\inf_{u\in\overset{0}{W_2^1}(\Omega)}\frac{\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}dx+\int\limits_{\Omega}c(x)u^2(x)dx}{\int\limits_{\Omega}u^2(x)dx}=\lambda_1. \tag{11}$$

То есть, доказано следующее неравенство

$$\underline{\lim}_{s\to\infty}\lambda_1(\Omega_s)\geq\lambda_1. \tag{12}$$

Из (9) и (12) получаем (7) и требуемую сходимость собственных функций. Теперь применяем метод математической индукции. Допустим, что $\forall l=\overline{2,p-1}$

$$\lim_{s\to\infty}\lambda_l(\Omega_s)=\lambda_l. \tag{13}$$

Тогда $u_{s,l}(x)$ представима в виде

$$u_{s,l}(x)=\tilde{u}_l(x)+\sum_{m=1}^{3}\nu_{s,l}^{(m)}(x)+w_{s,l}(x). \tag{14}$$

где $\omega_{s,l}(x)\in\overset{0}{W_2^1}(\Omega)$ и сильно сходится к нулю в $W_2^1(\Omega)$ при $s\to\infty$. Докажем, что последовательность $\{\lambda_p(\Omega_s)\}_{s=1}^{\infty}$ также ограничена постоянной, не зависящей от s, и что имеет место равенство

$$\lim_{s\to\infty}\lambda_p(\Omega_s)=\lambda_p. \tag{15}$$

Рассуждения проводятся так же, как и в случае $l=1$. Пусть

$$K_l(s)=\left(\tilde{u}_{s,p}(x),u_{s,l}(x)\right)_{L_2(\Omega)},$$

где $\tilde{u}_{s,p}(x)$ определяется аналогично (5). Очевидно, что функция

$$\tilde{\tilde{u}}_{s,p}(x)=\tilde{u}_{s,p}(x)-\sum_{l=1}^{p-1}K_l(s)u_{s,l}(x)\in\overset{0}{W_2^1}(\Omega_s)$$

и ортогональна в $L_2(\Omega)$ функциям $u_{s,l}(x), l=\overline{1,p-1}$. Следовательно, аналогично (8)

$$\lambda_p(\Omega_s) = \inf_{\substack{u_s \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_s),\\ (u_s, u_{s,l})_{L_2(\Omega)}=0,\\ l=\overline{1,p-1}.}} \frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u_s(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_s(x)}{\partial x_j}dx}{\int\limits_\Omega u_s^2(x)dx} \le \frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial \bar{\tilde{u}}_{s,p}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{\tilde{u}}_{s,p}(x)}{\partial x_j}dx}{\int\limits_\Omega \tilde{\bar{u}}_{s,p}^2(x)dx}.$$

Отсюда получаем ограниченность $\lambda_p(\Omega_s)$ постоянной, не зависящей от s и следующее неравенство

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\lambda_p(\Omega_s) \le \lambda_p. \tag{16}$$

Легко видеть, что из ограниченности последовательности $\{\lambda_p(\Omega_s)\}_{p=1}^\infty$ следует существование $\bar{u}_p(x)$ — слабого предела последовательности $\{u_{s,p}(x)\}_{s=1}^\infty$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $s\to\infty$, и, значит, функцию $u_{s,p}(x)$ можно представить в виде (10) и она удовлетворяет равенствам $(\bar{u}_p(x), \bar{u}_l(x))_{L_2(\Omega)}=0, l=\overline{1,p-1}$, так как $(u_{s,p}(x), u_{s,l}(x))_{L_2(\Omega)}=0, l=\overline{1,p-1}$. Значит, из определения $\lambda_p(\Omega_s)$ получаем

$$\underline{\lim_{s\to\infty}}\lambda_p(\Omega_s) = \underline{\lim_{s\to\infty}} \frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u_{s,p}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u_{s,p}(x)}{\partial x_j}dx}{\int\limits_\Omega u_{s,p}^2(x)dx} =$$

$$= \frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial \bar{u}_p(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}_p(x)}{\partial x_j}dx + \int\limits_\Omega c(x)\bar{u}_p^2(x)dx}{\int\limits_\Omega \bar{u}_p^2(x)dx} \ge$$

$$\inf_{\substack{u_s \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\\ (u, \bar{u}_l)_{L_2(\Omega)}=0,\\ l=\overline{1,p-1}.}} \frac{\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}dx + \int\limits_\Omega c(x)u^2(x)dx}{\int\limits_\Omega u^2(x)dx} = \lambda_p.$$

То есть, получено неравенство

$$\underline{\lim_{s\to\infty}}\lambda_p(\Omega_s) \ge \lambda_p. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что доказано следующее утверждение

Теорема. *Пусть $\lambda_k(\Omega_s)$ — k-е собственное значение задачи* (1),(2), *λ_k — k-е собственное значение задачи* (3),(4), *и $u_{s,k}(x), u_k(x)$ — k-е собственные функции задач* (1),(2) *и* (3),(4) *соответственно. Пусть выполнены условия* A1),A2),B),C), *тогда*

$$\lim_{s\to\infty}\lambda_k(\Omega_s) = \lambda_k,$$

и последовательность $\{u_{s,k}(x)\}_{s=1}^\infty$ сходится слабо к $u_k(x)$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ при $s\to\infty$.

Список литературы

[1] Самарский А.А. *О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов*, ДАН СССР, 6, **63** (1948), 631–634.

[2] Хруслов Е.Я. *Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области*, Матем. сборник, 4 (8), **106 (148)** (1978), 604–621.

[3] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.

[4] Ozawa S. *Singular variation of domains and eigenvalues of the laplasian*, Duke Math. J. **48** (1981), no. 4, 767–778.

[5] Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М.: Наука, 1990, 448 с.

83114, Донецк, ул. Розы Люксембург, 74