О РЕШЕНИЯХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛУЦИЛИНДРЕ

© Г.В. Гришина

Москва, Россия

Резюме. Получены условия на рост на бесконечности решений некоторых классов нелинейных эллиптических уравнений, гарантирующие компактность носителя решений.

Рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} = f(x,u)\operatorname{sign} u \tag{1}$$

или

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} = f(x,u)\operatorname{sign} u \tag{1'}$$

в полуцилиндре $G_{0,\infty} = \{x = (x', x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) : \ x' \in \Omega, \ x_n \in (0,\infty)\}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{1,1}$, коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $f(x,\cdot)$ — измеримые ограниченные функции в любой подобласти $G_{0,t} = G_{0,\infty} \cap \{0 < x_n < t\}$, $a_{nn}(x) \equiv 1$, $b_i(x) \in L_n(G_{0,t})$ в условии (1) и $b_i(x) \in L_{q/2}(G_{0,t})$ для некоторого $q > n$ в (1′) ($i,j = 1,\ldots,n$);

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \qquad \lambda, \Lambda > 0,$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, п. в. в $G_{0,\infty}$; $f(x,0) = 0$ и $\forall p \in \mathbb{R}$

$$f(x,p) \ge \frac{a_0}{(1+|x|)^s}|p|^\sigma, \qquad s \in \mathbb{R}, \ a_0 > 0, \ \sigma < 1.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35J67, 35B05, 35B40.

Ключевые слова и фразы. Нелинейные эллиптические уравнения второго порядка, однородное условие Неймана, полуцилиндр, компактность носителя решения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 99-01-00225

Предположим, что на границе задано однородное условие Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\Omega \cap \{|x| > 0\}, \tag{2}$$

или

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) u_{x_i} \nu_j = 0, \qquad x \in \partial\Omega \cap \{|x| > 0\}, \tag{2'}$$

где ν обозначает вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$. Предположим, что $a_{in}(x) \equiv 0 \quad (i \neq n)$ в случае, когда задано граничное условие ($2'$).

Поведение решений уравнений такого типа существенно зависит от σ. Известно, что при $0 < \sigma < 1$ существуют решения с компактным носителем и неограниченные на бесконечности решения. Например, обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' = |y|^\sigma \operatorname{sign} y, \qquad y = y(t), \qquad t > 0$$

если $\sigma \in [0, 1)$ имеет решения

$$y_1 = \begin{cases} \left[\frac{2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} (T-t)^{\frac{2}{1-\sigma}}, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

и

$$y_2 = \left[\frac{2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} t^{\frac{2}{1-\sigma}}.$$

То же самое уравнение с параметром $\sigma < 0$ имеет решения, эквивалентные $C_1 t^{\frac{2}{1-\sigma}}$ при $t \to \infty$, если $-1 < \sigma < 0$ и $C_2 t$ при $t \to \infty$, если $\sigma < -1$.

Целью работы является получение утверждений следующего типа: если решение $u(x)$ уравнения (1) или ($1'$) удовлетворяет условию $u(x) = o(F(x_n))$ при $x_n \to \infty$, то $u(x)$ имеет компактный носитель. Для положительных или отрицательных решений, которые рассматриваются, в частности, при $\sigma < 0$, это означает, что не существует решений с таким поведением на бесконечности.

Функция F зависит от $b_n(x)$, σ и s, причем существенным является не только поведение коэффициента $b_n(x)$ при $x_n \to \infty$, но и его знак. Действительно, для уравнения

$$\Delta u + ku = |u|^\sigma \operatorname{sign} u, \qquad 0 \le \sigma < 1,\ k = \text{const}, x \in G_{0,\infty}$$

будет доказано, что $F(x_n) = x_n^{\frac{1}{1-\sigma}}$, если $k > 0$, и $F(x_n) = x_n^{\frac{2}{1-\sigma}}$, если $k < 0$.

Отметим, что во многих случаях имеются примеры, показывающие точность полученных результатов.

Уравнениям типа (1) или ($1'$) посвящены многие работы (отметим, например, [1–4] для $0 < \sigma < 1$ и [5] для $\sigma < 0$). Однако другие авторы, главным образом, изучают уравнения без членов первого порядка, с более строгими ограничениями на коэффициенты и только при значении параметра $s = 0$. В отличие от этих работ, в настоящей статье исследуется влияние параметра s, σ и коэффициентов

$b_n(x)$ при членах первого порядка на свойства решения. Аналогичные вопросы как для положительных, так и для отрицательных $\sigma < 1$ рассматривались ранее автором настоящей заметки в [6–7].

Итак, мы будем рассматривать строгие решения задач (1)–(2) и (1)–(2′), принадлежащие пространству $W_n^2(G_{0,t}) \cap C^1(\overline{G_{0,\infty}})$ $\forall t > 0$, а также и слабые решения задачи (1′)–(2′), принадлежащие пространству $W_2^1(G_{0,t}) \cap C(\overline{G_{0,\infty}})$ $\forall t > 0$.

Будем говорить, что функция $u(x) \in W_2^1(G_{0,t}) \cap C(\overline{G_{0,\infty}})$ $\forall t > 0$ является слабым решением задачи (1′)–(2′), если для любой функции $\phi(x) \in W_2^1(G_{0,\infty})$ такой, что $\phi(x) \geq 0$, $\phi(x) \equiv 0$ при $x' \in \overline{\Omega}$ и $x_n = 0$ или $x_n \geq t$, следующее интегральное тождество справедливо для любого $t > 0$:

$$Q(u,\phi) = \int_{G_{0,t}} f(x,u)\phi(x)\,dx$$

где

$$Q(u,\phi) = \int_{G_{0,t}} \left[-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_j} \phi_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} \phi \right] dx.$$

В случае $\sigma < 0$ будут рассматриваться только положительные или отрицательные решения.

1. О случае $0 \leq \sigma < 1$. Основная идея доказательства всех теорем состоит так же, как и в работах [6–7], в использовании принципа максимума.

Теорема 1. *Предположим, что* $0 \leq \sigma < 1$, $0 \leq b_n(x) \leq B_2(1+x_n)^\alpha$, $\operatorname{mes}\{x \in G_{0,\infty} \cap \{x_n > t\} : b_n(x) > 0\} > 0$ $\forall t > 0$, $\alpha \neq -1$, $u(x)$ *— решение задачи* (1)-(2) *или* (1)-(2′) *или* (1′)-(2′) *в* $G_{0,\infty}$. *Тогда, если выполнено одно из следующих утверждений, то решение имеет компактный носитель:*

1. $\alpha > -1$
   (a) $s < 1-\alpha$, $u(x) = o(x_n^{\frac{1-\alpha-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;
   (b) $s = 1-\alpha$, $u(x) = o(\ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;
   (c) $1-\alpha < s \leq 2$, $u(x) = o(1)$ *при* $x_n \to \infty$;
   (d) $s > 2$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;
2. $\alpha < -1$
   (a) $s < 1+\sigma$ *или* $s > 2$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;
   (b) $s = 1+\sigma$, $u(x) = o(x_n \ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;
   (c) $1+\sigma < s \leq 2$, $u(x) = O(x_n^{1-\varepsilon})$ *при* $x_n \to \infty$, $\varepsilon \in (0,1)$;
   (d) $s = 2$, $u(x) = o(\ln^{\frac{2}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$.

Доказательство. Как следует из теоремы 1 [6], для доказательства достаточно показать, что при выполнении каждого из условий решение стремится к нулю при $x_n \to \infty$. Рассмотрим, например, случай 1(a) и предположим, что это не так. А именно, что существует последовательность точек $x^{(k)} = (x'_{(k)}, T_k) \in G_{0,\infty}$, $T_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такая что

$$|u(x^{(k)})| \geq 2\delta > 0.$$

Построим систему функций

$$v_k(x_n) = \begin{cases} C_{1,k}(T_k - x_n)^{\frac{2}{1-\sigma}}, & 0 \le x_n \le T_k \\ C_{2,k}(x_n - T_k)^{\frac{2}{1-\sigma}}(1+x_n)^{-\frac{1+s+\alpha}{1-\sigma}}, & x_n > T_k, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots$, где положительные постоянные $C_{1,k}$, $C_{2,k}$ должны быть выбраны из условия:

$$Lv_k = v_k'' + b_n(x)v_k' \le \frac{a_0}{(1+x_n)^s} v_k^\sigma \tag{3}$$

на интервалах $0 < x_n < T_k$ и $x_n \ge T_k$ соответственно.

При этом мы можем найти $T_k > 0$ такое, что

$$M = \max_{x' \in \overline{\Pi}} |u(x', 0)| < v(0) = C_{1,k} T_k^{\frac{2}{1-\sigma}}.$$

Затем, рассматривая $L(v_k - u)$, придем к противоречию с принципом максимума, что и доказывает теорему.

В остальных случаях доказательство также сводится к построению подходящей системы функций v_k .

Теоремы 2–4 доказываются с использованием теорем 2 и 3 из [6].

Теорема 2. *Предположим, что* $0 \le \sigma < 1$, $b_n(x) \equiv 0$ *в* $G_{0,\infty} \cap \{x_n > t_0\}$, $t_0 \ge 0$. *Тогда, если выполнено одно из следующих условий, то решение* $u(x)$ *задачи* (1) - (2) *или* (1) - (2') *или* (1') - (2') *в* $G_{0,\infty}$ *имеет компактный носитель:*

1. $s < 1 + \sigma$ *или* $s > 2$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;
2. $s = 1 + \sigma$, $u(x) = o(x_n \ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;
3.
   $1 + \sigma < s \le 2$, $u(x) = o(x_n)$ *при* $x_n \to \infty$,
4. $s = 2$, $u(x) = o(\ln^{\frac{2}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$.

Теорема 3. *Предположим, что* $0 \le \sigma < 1$, $0 \le b_n(x) \le B_2(1+x_n)^{-1}$, $\operatorname{mes}\{x \in G_{0,\infty} \cap \{x_n > t\} : b_n(x) > 0\} > 0 \quad \forall t > 0$. *Тогда, если выполнено одно из следующих условий, то решение* $u(x)$ *задачи* (1) - (2) *или* (1) - (2') *или* (1') - (2') *в* $G_{0,\infty}$ *имеет компактный носитель:*

1. $s = 2$
   (a) $0 < B_2 \le 1$, $u(x) = o(\ln^{\frac{2}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;
   (b) $B_2 > 1$, $u(x) = o(\ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;
2. $s \ne 2$, $B_2 \ge 1$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;
3. $s \ne 2$, $0 < B_2 < 1$
   (a) $s < 2 - (1 - B_2)(1 - \sigma)$ *или* $s > 2$ $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;
   (b) $2 - (1 - B_2)(1 - \sigma) < s < 2$, $u(x) = o(x_n^{1-B_2})$ *при* $x_n \to \infty$;
   (c) $s = 2 - (1 - B_2)(1 - \sigma)$, $u(x) = o(x_n^{1-B_2} \ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$.

Теорема 4. *Предположим, что* $0 \le \sigma < 1$, $-B_1(1+x_n)^\alpha \le b_n(x) \le 0$, *где* $B_1 > 0$. *Тогда, если выполнено одно из следующих условий, то решение* $u(x)$ *задачи* (1) – (2) *или* (1) – (2′) *или* (1′) – (2′) *в* $G_{0,\infty}$ *имеет компактный носитель:*

1. $\alpha \le 0$

   (a) $s < 1$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;

   (b) $s \ge 1$, $u(x) = o(\ln^{\frac{1-s}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;

2. $0 < \alpha < 1$

   (a) $s < 1-\alpha$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;

   (b) $s \ge 1-\alpha$, $u(x) = o(x_n^{\frac{1-\alpha-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;

3. $\alpha \ge 1$

   (a) $s \ge 0$, $u(x) = o(x_n^{\frac{1-\alpha}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;

   (b) $s > 0$, $u(x) = o(x_n^{\frac{1-\alpha-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$.

2. О знакопостоянных решениях в случае $\sigma < 1$. Поскольку рассматриваются только положительные или отрицательные решения, то достаточно предположить, что $f(x,\cdot)$ — локально измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая неравенству

$$f(x,p) \ge \frac{a_0}{(1+|x|)^s}|p|^\sigma, \qquad s \in \mathbb{R},\ a_0 > 0,\ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Классы решений описаны выше.

Теорема 5. *Предположим, что* $\sigma < 1$, $0 \le b_n(x) \le B_2(1+x_n)^\alpha$, $\alpha \ne -1$, $\operatorname{mes}\{x \in G_{0,\infty} \cap \{x_n > t\} : b_n(x) > 0\} > 0 \quad \forall t > 0$. *Тогда не существует положительных или отрицательных решений задачи* (1) – (2) *или* (1) – (2′) *или* (1′) – (2′) *таких, что выполнены следующие условия:*

1. $\alpha > -1$

   (a) $s < 1-\alpha$, $u(x) = o(x_n^{\frac{1-\alpha-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;

   (b) $s = 1-\alpha$, $u(x) = o(\ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;

   (c) $1-\alpha < s \le 2$, $u(x) = o(1)$ *при* $x_n \to \infty$;

   (d) $s > 2$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;

2. $\alpha < -1$

   (a) $s < 1+\sigma$ *или* $s > 2$, $u(x) = o(x_n^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$ *при* $x_n \to \infty$;

   (b) $s = 1+\sigma$, $u(x) = o(x_n \ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$;

   (c) $1+\sigma < s \le 2$, $u(x) = O(x_n^{1-\varepsilon})$ *при* $x_n \to \infty$, $\varepsilon \in (0,1)$;

   (d) $s = 2$, $u(x) = o(\ln^{\frac{2}{1-\sigma}} x_n)$ *при* $x_n \to \infty$.

Доказательство. Для $\sigma \in [0,1)$ теорема 5 следует немедленно из теоремы 1.

Пусть σ отрицательно. Если положим

$$u = v^\gamma, \tag{4}$$

где $\gamma \in (0,1)$ будет выбрано позже, то тогда из теорем вложения Соболева следует, что $v(x)$ принадлежит тому же классу, что и $u(x)$.

Подстановка (4) приводит к следующему уравнению относительно v:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)v_{x_i} = g(x,v),$$

где

$$g(x,v) = \frac{1}{\gamma} f(x, v^{\gamma}) + \frac{1-\gamma}{v} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j} \geq \frac{a_0}{\gamma}\frac{v^p}{(1+x_n)^s}$$

локально ограниченная измеримая функция, и $p = 1-\gamma(1-\sigma)$. Возьмём $\gamma = \frac{\theta}{1-\sigma}$, где θ — любое число из интервала $(0,1)$. Тогда γ, $p \in (0,1)$. На границе $v(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $u(x)$.

В случае задачи $(1')-(2')$, сделав подстановку (4) и полагая $\phi = v^{1-\gamma}\psi$, где $\psi(x) \in C^1(G_{0,t})$ такая, что $\psi(x) \geq 0$, $\psi(x) \equiv 0$, при $x' \in \overline{\Omega}$ и $x_n = 0$ или $x_n \geq t$, получим относительно $v(x)$ следующее интегральное тождество, справедливое для любого $t > 0$:

$$Q(v,\psi) = \int_{G_{0,t}} \left[\frac{1}{\gamma} f(x,v^{\gamma})v^{1-\gamma} + (1-\gamma)\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j}}{v} \right] \psi \, dx.$$

В случае 1(a), из условия $u(x) = o(x_n^{\frac{1-\alpha-s}{1-\sigma}})$ при $x_n \to \infty$ следует, что $v(x) = o(x_n^{\frac{1-\alpha-s}{1-p}})$ при $x_n \to \infty$. Применяя теорему 1 к решению $v(x)$, полчим, что $v(x)$ имеет компактный носитель, но это невозможно для положительных или отрицательных решений.

Такое же заключение получим во всех остальных случаях за исключением 2(b), 2(c), когда непосредственное применение теоремы 1 приводит к значительно более слабому результату.

Предположим теперь, что $\alpha < -1$, $s = 1+\sigma$. Тогда достаточно показать, что из условия $v(x) = o(x_n^{1/\gamma} \ln^{\frac{1}{1-\sigma}} x_n)$ при $x_n \to \infty$ следует, что $v(x) \to 0$ при $x_n \to \infty$.

Предположим, что это не так, т. е. существует последовательность точек $(x'_{(k)}, T_k) \to \infty$, принадлежащих $G_{0,\infty}$, такая, что $T_k \to \infty$ и $v(x'_{(k)}, T_k) > \delta > 0$. Рассмотрим функции

$$w_k(x_n) = \begin{cases} C_{1,k}(T_k - x_n)^{\frac{2}{1-p}}, & 0 \leq x_n \leq T_k \\ C_{2,k} x_n^{\frac{1}{\gamma}} \ln^{\frac{2}{1-p}}(1 + x_n - T_k) \ln^{-\frac{1}{1-p}} x_n, & x_n > T_k, \end{cases}$$

где постоянные $C_{1,k}$, $C_{2,k}$ будут найдены из условий типа (3) и

$$Lw_k = w_k'' + b_n(x)w_k' \leq \frac{a_0}{\gamma(1+x_n)^s} w_k^p + \frac{1-\gamma}{w_k}(w_k')^2.$$

Аналогично поступим и в случае 2(c).

Заметим, что теоремы 2–4 могут быть переформулированы аналогичным образом с полным сохранением условий относительно решения $u(x)$.

Список литературы

1. Diaz J.I., *Solucionos con soporte compacto para ciertos problemas semilineares*, Universitad Complutense de Madrid, Facultad de Matematicas, 1976.
2. Veron L., *Equations d'évolution semi-linéaires du second ordre dans* L^1, Rev.Roum.Math.Pures et Appl., Bucarest **XXVII** (1982), no. 1, 95–123.
3. Кондратьев В.А., Ландис Е.М., *О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка*, Математический сборник, 3, **135** **(177)** (1988), 346–360.
4. Kondratiev V.A., Veron L., *Asymptotic homogenisation of solution of some nonlinear parabolic and elliptic equations*, Asymptotic Analysis **14** (1997), 117–156.
5. Kawano N., *On bounded entier solutions of semilinear elliptic equations*, Hirosima Math. J. **14** (1984), no. 1, 125–158.
6. Гришина Г.В., *О компактности носителя решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка в полуограниченном цилиндре*, Математические заметки, 5, **65** (1997), 700–711.
7. Гришина Г.В., *О решениях сингулярных эллиптических уравнений в неограниченных областях*, Материалы международной конференции и Чебышёвских чтений, посвящённых 175-летию П.Л.Чебышёва, vol. 1, Мех.-мат. МГУ, Москва, 1996, pp. 128–131.

МГТУ им. Н.Э.Баумана, кафедра Прикладной математики
Россия, 207005 Москва, 2-ая Бауманская ул., 5,
E-mail address: grishina@mx.bmstu.ru