УСТРАНИМЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© Н.Е. Товмасян

Ереван, Армения

1. Введение

Пусть $F(z,\zeta)$ – заданная непрерывная функция комплексных переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$, определенная при $0 < |z| \le 1$ и $|\zeta| < \infty$, и удовлетвояющая условию

$$|F(z,\zeta)| \le c\,(1 + |\zeta|)^{\alpha}, \quad 0 < |z| \le 1,\ |\zeta| < \infty, \tag{1}$$

где c и α – некоторые положительные постоянные, $\alpha \ge 1$.
В области $0 < |z| < 1$ рассмотрим следующее нелинейное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = F(z, u(z)), \quad 0 < |z| < 1, \tag{2}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Показатель α, участвующая в (1), называется порядком нелинейности уравнения (2).

Решение уравнения (2) ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых в области $0 < |z| < 1$ и непрерывных в области $0 < |z| \le 1$. Заметим, что точка $z = 0$ является изолированной особой точкой для уравнения (2).

Определение 1. Пусть $u(z)$ – решение уравнения (2). Если существует предел

$$\lim_{z \to 0} u(z) = A,$$

то точку $z = 0$ будем называть *устранимой особой точкой* для функции $u(z)$. При выполнении этого условия будем предполагать, что $u(0) = A$.

Хорошо известно (см. [1]), что если точка 0 является изолированной особой точкой для аналитической функции $u(z)$ и

$$\lim_{z \to 0} u(z)\, z = 0, \tag{3}$$

то эта точка является устранимой особой точкой для функции $u(z)$.

Справедливость этого утверждения для решений линейных эллиптических уравнений вида (2) доказана в монографии [2].

Цель данной работы – указать ограничения на порядок роста решения $u(z)$ уравнения (2) в окрестности точки 0, в терминах порядка нелинейности уравнения, при котором эта точка является устранимой особой точкой для $u(z)$.

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \ge 2$ и $u(z)$ – решение уравнения (2), удовлетворяющее условию*

$$|u(z)| \le \frac{c}{|z|^{\beta}}, \quad 0 < |z| \le 1, \tag{4}$$

где c и β –некоторые положительные постоянные, причем $\beta < (\alpha-1)^{-1}$. Тогда точка $z = 0$ является устранимой особой точкой для $u(z)$.

Теорема 2. *Пусть $1 \leq \alpha < 2$ и $u(z)$ – решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (3). Тогда точка $z = 0$ является устранимой особой точкой для $u(z)$.*

Предположим, что функция $F(z,\zeta)$ удовлетворяет также условию Гельдера по z и ζ при $|z| \leq 1$ и $|\zeta| < R$, где R – произвольное фиксированное положительное число. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть постоянная α и функция $u(z)$ удовлетворяют условиям теорем 1 или 2. Тогда функция $u(z)$ является решением уравнения (2) в круге $|z| < 1$.*

Работа организована следующим образом: в §2 приводятся некоторые предварительные леммы, в §3 доказываются теоремы 1 – 3, в §4 результаты §1 обобщаются для нелинейных эллиптических уравнений с особенностями, и наконец в §5 приводятся некоторые примеры, показывающие точность полученных результатов.

2. Вспомогательные предложения

Пусть α, β и γ – заданные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq \gamma < 1, \quad \alpha + \gamma \geq 2, \quad \beta < \frac{1-\gamma}{\alpha-1}, \tag{5}$$

и пусть γ_j $(j = 1, 2, \dots)$ – последовательность чисел, определенная по формуле

$$\gamma_1 = \alpha\beta + \gamma, \ \gamma_j = \alpha^j\beta + \gamma - (1-\gamma)\left(\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{j-1}\right), \quad j = 2, 3, \dots \tag{6}$$

Лемма 1. *Последовательность γ_j $(j = 1, 2, \dots)$ монотонно стремится к $-\infty$ при $j \to +\infty$, причем существует индекс m такой, что*

$$0 < \gamma_m \leq 1. \tag{7}$$

Доказательство. Из (6) имеем

$$\gamma_j = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-1} - \left(\frac{1-\gamma}{\alpha-1} - \beta\right)\alpha^j. \tag{8}$$

Из (5) и (8) следует, что последовательность γ_j $(j = 1, 2, \dots)$ монотонно стремится к $-\infty$ при $j \to +\infty$. Если $\gamma_1 < 1$, то в качестве γ_m можно взять γ_1. Пусть $\gamma_1 > 1$. Тогда существует номер m $(m \geq 2)$ такой, что

$$\gamma_{m-1} > 1 \tag{9}$$

и

$$\gamma_m \leq 1. \tag{10}$$

Согласно (8) и (9) имеем

$$\left(\frac{1-\gamma}{\alpha-1} - \beta\right)\alpha^{m-1} < \frac{1-\gamma}{\alpha-1}.$$

Следовательно

$$\gamma_{m-1} - \gamma_m = (\alpha-1)\left(\frac{1-\gamma}{\alpha-1} - \beta\right)\alpha^{m-1} < 1 - \gamma.$$

Таким образом

$$\gamma_m > \gamma_{m-1} - 1 + \gamma > \gamma.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть $\omega(z)$ – непрерывная функция в области $0 < |z| \le 1$, удовлетворяющая условию

$$|\omega(z)| \le \frac{c_0}{|z|^\gamma}, \quad 0 < |z| \le 1,$$

где c_0 и γ – некоторые положительные постоянные, причем $\gamma < 2$.
Рассмотрим следующий интеграл

$$V(z) = \iint_{|\zeta|\le 1} \frac{\omega(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad (\zeta = \xi + i\eta,\ z = x + iy).$$

В монографии [2] доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $0 < \gamma < 1$, то функция $V(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \le 1$. Если же $1 \le \gamma < 2$, то функция $V(z)$ непрерывна в области $0 < |z| \le 1$ и удовлетворяет условиям*

$$|V(z)| \le \frac{c}{|z|^{\gamma-1}}, \quad 1 < \gamma < 2, \tag{11}$$

$$|V(z)| \le \frac{c_\varepsilon}{|z|^\varepsilon}, \quad \gamma = 1, \tag{12}$$

где c и c_ε – некоторые положительные постоянные, а ε ($\varepsilon < 1$) – произвольная положительная постоянная.

Лемма 3. *Если функция $u(z)$ – решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям теорем 1 или 2, то она допускает представление*

$$u(z) = T(\omega) + \varphi(z), \tag{13}$$

где

$$\omega(z) = F(z, u(z)), \tag{14}$$

и

$$T(\omega) = \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|\le 1} \frac{\omega(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad (\zeta = \xi + i\eta,\ z = x + iy), \tag{15}$$

а $\varphi(z)$ – некоторая аналитическая функция в круге $|z| < 1$.

Доказательство. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда из (1), (4) и (14) следует, что функция $\omega(z)$ непрерывна в области $0 < |z| \le 1$, и удовлетворяет условию

$$|\omega(z)| \le \frac{c_1}{|z|^{\gamma_1}}, \quad 0 < |z| \le 1, \tag{16}$$

где $\gamma_1 = \alpha\beta$, а c_1 – некоторая положительная постоянная.
Так как $\alpha \ge 2$ и $0 < \beta < (\alpha - 1)^{-1}$, то $\beta < 1$ и $0 < \gamma_1 < 2$. В монографии [2] доказано, что при (4) и (16) ($\beta < 1, \gamma < 2$), решение $u(z)$ уравнения (2) допускает представление вида (13). Это представление также имеет место, если условие (4) ($\beta < 1$) заменить условием (3). Аналогично доказывается представление (13) в случае, когда функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.
Лемма 3 доказана.

3. Доказательство теорем 1 – 3

Доказательство теоремы 1. Пусть постоянные α, β и функция $u(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, и пусть γ_j $(j = 1, 2, \dots)$ – последовательность (6) при $\gamma = 0$. Согласно лемме 1, эта последовательность монотонно стремится к $-\infty$ при $j \to +\infty$, и существует номер m такой, что $0 < \gamma_m \le 1$.
Согласно лемме 3, решение $u(z)$ уравнения (2) допускает представление (13), причем функция $\omega(z)$ удовлетворяет условию (16).
Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Пусть $\gamma_1 < 1$. Тогда согласно лемме 2, функция $T(\omega)$ непрерывна в круге $|z| < 1$. Отсюда и из формулы (13) следует, что функция $u(z)$ также непрерывна в этом круге.

2. Пусть $\gamma_1 = 1$. Тогда из леммы 2 следует, что функция $T(\omega)$ непрерывна в круге $|z| < 1$, кроме быть может точки 0, и удовлетворяет условию (12), причем $0 < \varepsilon < \alpha^{-1}$. Поэтому из (1) и (14) имеем

$$|\omega(z)| \le \frac{c_1}{|z|^{\alpha\varepsilon}}, \quad 0 < |z| < 1, \tag{17}$$

Так как $\alpha\varepsilon < 1$, то из (13) и (17) аналогично получим, что функция $u(z)$ непрерывна в круге $|z| < 1$.

3. Пусть $\gamma_1 > 1$. Тогда из (11) и (16) при $\gamma = \gamma_1$, и представления (13) имеем

$$|u(z)| \le |T(\omega)| + |\varphi(z)| \le \frac{c_2}{|z|^{\gamma_1 - 1}}.$$

Поэтому из (1) и (14) получим

$$|\omega(z)| \le \frac{c_3}{|z|^{\gamma_2}}, \quad 0 < |z| \le 1, \tag{18}$$

где $\gamma_2 = \alpha\gamma_1 - \alpha$. Таким образом оценка (18) следует из оценки (16). Если $\gamma_2 > 1$, то аналогично из (18) получим

$$|\omega(z)| \le \frac{c_4}{|z|^{\gamma_3}}, \quad 0 < |z| < 1, \tag{19}$$

где $\gamma_3 = \alpha\gamma_2 - \alpha$. Повторяя этот процесс m раз, получим оценку

$$|\omega(z)| \le \frac{c_m}{|z|^{\gamma_m}}, \quad 0 < |z| < 1,$$

где c_m – некоторая положительная постоянная, а $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – последовательность, определенная по (6), причем $0 < \gamma_m \le 1$. Выше мы показали, что если функция $\omega(z)$ удовлетворяет условию (19) при $0 < \gamma_m \le 1$, то функция $u(z)$ непрерывна в круге $|z| < 1$.
Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично докзательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Пусть функция $F(z, \zeta)$ и решение $u(z)$ уравнения (2) удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда согласно теорем 1 и 2, функция $u(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \le 1$. Из свойств оператора T, определенная (15), следует (см. [2]), что $T(\omega)$ удовлетворяет условию Гельдера в замкнутом круге $|z| \le 1$. Поэтому из (13) и (14) следует, что в любом замкнутом круге $|z| \le 1 - \varepsilon$ функции $u(z)$ и $\omega(z)$ также удовлетворяют условию Гельдера, где ε произвольное положительное число. Поэтому функция $V(z) = T(\omega)$ имеет непрерывные производные в круге $|z| < 1$ и $\frac{\partial V(z)}{\partial \bar z} = \omega(z)$ (см. [2]). Из представления (13) следует, что функция $u(z)$ также имеет непрерывные производные в круге $|z| < 1$, где она удовлетворяет условию (2).
Теорема 3 доказана.

4. Нелинейные эллиптические уравнения с особеностями

В области $0 < |z| < 1$ рассмотрим следующее нелинейное эллиптическое уравнение с особеностями

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = |z|^{-\gamma} F(z, u(z)), \quad 0 < |z| < 1, \tag{20}$$

где $F(z, \zeta)$ – та же функция, что и в начале работы, а γ – постоянная, удовлетворяющая условию $0 \leq \gamma < 1$.
Решение уравнения (20) также ищется в классе функций непрерывно дифференцируемых в области $0 < |z| < 1$ и непрерывных в области $0 < |z| \leq 1$.

Теорема 4. *Пусть $0 \leq \gamma < 1$ и $\alpha + \gamma \geq 2$, а решение $u(z)$ уравнения (20) удовлетворяет условию*

$$|u(z)| \leq \frac{c}{|z|^\beta}, \quad 0 < |z| \leq 1, \tag{21}$$

где c и β -некоторые положительные постоянные, причем $\beta < \frac{1-\gamma}{\alpha-1}$. Тогда точка $z = 0$ является устранимой особой точкой для функции $u(z)$.

Теорема 5. *Пусть $0 \leq \gamma < 1$ и $\alpha + \gamma < 2$, а решение $u(z)$ уравнения (20) удовлетворяет условию (3). Тогда точка $z = 0$ является устранимой особой точкой для функции $u(z)$.*

Доказательства теорем 4 и 5 аналогичны доказтельствам теорем 1 и 2, при этом используется лемма 1 при $0 \leq \gamma < 1$ и представление (13), где $\omega(z)$ – правая часть уравнения (20) т.е. $\omega(z) = |z|^{-\gamma} F(z, u(z))$.

5. Примеры

В этом параграфе мы приводим некоторые примеры, показывающие точность полученных результатов.
Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{|z|} \cdot |z|^\alpha, \quad 0 < |z| < 1, \quad \alpha \geq 2. \tag{22}$$

Функция

$$u(z) = -\frac{2}{\beta} \cdot |z|^{-\beta}, \quad \beta = (\alpha - 1)^{-1}$$

является решением уравнения (22) и точка $z = 0$ является неустранимой особой точкой для этого решения. Следовательно, теорема 1 верна при $\beta < (\alpha - 1)^{-1}$ и не верна при $\beta = (\alpha - 1)^{-1}$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{|z|^\gamma} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot |u(z)|^\alpha, \quad 0 < |z| < 1, \tag{23}$$

где $0 < \gamma < 1$ и $\alpha + \gamma \geq 2$.
Функция

$$u(z) = -\frac{2}{\beta} \cdot |z|^{-\beta}, \quad \beta = \frac{1-\gamma}{\alpha - 1}$$

является решением уравнения (23) и точка $z = 0$ является неустранимой особой точкой для этого решения. Таким образом, теорема 4 верна при $\beta < (1-\gamma)(\alpha - 1)^{-1}$ и не верна при $\beta = (1-\gamma)(\alpha - 1)^{-1}$.

Замечание 1. Функция $u(z) = z^{-1}$ является решением уравнения (2) при $F \equiv 0$ и точка $z = 0$ является неустранимой особой точкой этого решения. Это показывает точность утверждения теоремы 2.

Замечание 2. Рассмотрим условие

$$\lim_{z \to 0} u(z) \, |z|^{\beta_0} = 0, \tag{24}$$

где $\beta_0 = (1-\gamma)(\alpha-1)^{-1}$. Условие (24) более слабее, чем условие (21). Нам кажется, что утверждение теоремы 4 остается в силе, если условие (21) заменить условием (24). Однако это утверждение нуждается в доказательстве.

Литература

[1] М. А. Лаврентьев и Б. А. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, Москва, 1973.

[2] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Наука, Москва, 1959.

Государственный Инженерный Университет Армении

E-mail address: `hterzian@seua.am`