К ВОПРОСУ ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЕМ ФИНАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

© В.Л. Камынин

Москва, Россия

§1. Введение.

В работе изучается вопрос об условиях однозначной разрешимости обратной задачи нахождения пары функций $\{u(t,x), f(x)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$\rho(t,x)u_t - \Delta u = f(x)g(t,x) + h(t,x), \ \ (t,x) \in Q \equiv [0,T] \times \Omega, \tag{1.1}$$

начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x), \ x \in \Omega, \tag{1.2}$$

граничному условию

$$u(t,x) = 0, \ t \in [0,T], x \in \partial\Omega, \tag{1.3}$$

и условию переопределения

$$u(T,x) = \varphi(x), \ x \in \Omega, \tag{1.4}$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Ранее обратные задачи определения правой части параболического уравнения с условием финального переопределения изучались рядом авторов (см. [1–5] и др.). В [1,2] изучался вопрос существования гладких решений соответствующей обратной задачи для параболических уравнений с гладкими, не зависящими от t коэффициентами. Отдельно был рассмотрен случай $n = 1$, где допускалась зависимость коэффициентов от t. В [3] рассматривалась обратная задача для уравнений, главная часть которого является оператором теплопроводности, но решения принадлежат классам Соболева. В [4] изучались обобщенные решения обратной задачи для параболического уравнения с коэффициентами, не зависящими от t.

В указанных работах были доказаны теоремы об однозначной разрешимости соответствующих обратных задач либо при условии определенной малости входящих в условие задачи данных (так называемая *локальная разрешимость*), либо при дополнительном условии, которое для уравнения (1.1) формулируется в виде

$$g(t,x) \geq 0, \ \ g_t(t,x) \geq 0, \ \ (t,x) \in Q. \tag{1.5}$$

Известные примеры показывают, что те или иные дополнительные условия на входящие в задачу данные необходимы. Без указанных условий в [2,4] для уравнений с гладкими коэффициентами (в [2] допускалась зависимость коэффициентов также и от t) были доказаны теоремы о том, что из единственности решения соответствующей обратной задачи следует существование решения такой задачи (так называемая *фредгольмова разрешимость* обратной задачи).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 00 01 00638).

В настоящей работе исследование однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4) проводится при существенно более слабых по сравнению с работами [1–5] требованиях на гладкость входящих в условие задачи функций. Получено несколько вариантов условий, обеспечивающих локальную разрешимость (в обобщенном смысле) задачи (1.1)–(1.4), а также теорема о фредгольмовой разрешимости рассматриваемой обратной задачи. Показано, что при $g(t,x) = const, \rho(t,x) = const$ полученные в работе результаты включают в себя известные ранее.

Будем использовать следующие обозначения.
Положим $Q_{t_2}^{t_1} = [t_1, t_2] \times \Omega, 0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $Q_t^0 \equiv Q_t$ $Q_T^0 \equiv Q$. Пространства $L_2(Q_{t_2}^{t_1}), L_2(\Omega), W_2^{1,2}(Q), \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), C(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)), C(0,T;L_2(\Omega)), W_2^2(\Omega)$ с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [6]).
Положим

$$\|v\| \equiv \|v\|_{L_2(\Omega)}, v(x) \in L_2(\Omega);$$

$$\|v_x\| = \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dx\right)^{1/2}; \ \|v_{xx}\| = \left(\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 dx\right)^{1/2}.$$

Через θ обозначим константу из неравенства Пуанкаре-Стеклова

$$\|v\| \leq \theta \|v_x\|, \tag{1.6}$$

которое справедливо для любой $v(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.
Мы будем использовать известное арифметическое неравенство

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \ \varepsilon > 0, \ \ a, b \in \mathbf{R}^1. \tag{1.7}$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи, измеримы и удовлетворяют следующим условиям.

(A) $\Lambda_1 \leq \rho(t,x) \leq \Lambda_2, \ -K_{\rho,1} \leq \rho_t(t,x) \leq K_{\rho,2}, \ (t,x) \in \bar{Q};$

(B) $|g(t,x)| \leq K_g, \ |g_t(t,x)| \leq K_g^*, \ |g(T,x)| \geq g_0 > 0, \ (t,x) \in \bar{Q};$

(C) $h(t,x) \in C(0,T;L_2(\Omega)), \|h(t,\cdot)\| \leq K_h, \ h_t(t,x) \in L_2(Q), \|h_t\|_{L_2(Q)} \leq K_h;$

(D) $u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \ \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M_0;$

(E) $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \ \|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq K_\varphi.$

Здесь $\Lambda_1, \Lambda_2, K_g, g_0 = const > 0$, $K_{\rho,1}, K_{\rho,2}, K_g^*, K_h, M_0, K_\varphi = const \geq 0$.
Положим $K_\rho = max\{K_{\rho,1}, K_{\rho,2}\} \geq 0$.
Ниже через c (возможно, с индексом) будем обозначать любые положительные константы, зависящие от $\Lambda_1, \Lambda_2, K_\rho, K_g, g_0, K_g^*, K_h, M_0, K_\varphi, \theta$.

Автор благодарит профессора А.И.Прилепко и участников руководимого им семинара за полезное обсуждение результатов работы.

§2. Сведение обратной задачи к операторному уравнению. Фредгольмова разрешимость обратной задачи.

Определение 2.1. *Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4) будем называть пару функций* $\{u(t,x), f(x)\}$, $u(t,x) \in C(0,T; \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega))$, $u_t, u_{xx} \in C(0,T; L_2(\Omega))$. $f(x) \in L_2(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в* Q, *причем функция* $u(t,x)$ *удовлетворяет условиям (1.3),(1.4) в* $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Решение исходной обратной задачи будем искать в виде

$$\{u(t,x), f(x)\} = \{z(t,x), f(x)\} + \{v(t,x), 0\}, \tag{2.1}$$

где $v(t,x)$ – решение в Q прямой задачи

$$\rho(t,x)v_t - \Delta v = h(t,x),\ (t,x) \in Q, \tag{2.2}$$

$$v(0,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$v(t,x) = 0,\ t \in [0,T], x \in \partial\Omega, \tag{2.4}$$

а пара $\{z(t,x), f(x)\}$ – решение в Q обратной задачи

$$\rho(t,x)z_t - \Delta z = f(x)g(t,x),\ (t,x) \in Q, \tag{2.5}$$

$$z(0,x) = 0,\ x \in \Omega, \tag{2.6}$$

$$z(t,x) = 0,\ t \in [0,T], x \in \partial\Omega, \tag{2.7}$$

$$z(T,x) = \varphi(x) - v(T,x) \equiv \psi(x),\ x \in \Omega. \tag{2.8}$$

Обратимся к задаче (2.2)–(2.4).

Определение 2.2. *Энергетическим решением задачи (2.2)–(2.4) будем называть функцию* $v(t,x) \in C(0,T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega))$, *удовлетворяющую соответствующему интегральному тождеству (см., например, [6, с. 158-164].)*

В силу [6, с. 189] энергетическое решение задачи (2.2)–(2.4) существует и единственно. Однако, в силу наших предположений это решение обладает дополнительной гладкостью.

Во-первых, в силу [7] $v(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$. Во-вторых, в силу теоремы 4.1, доказанной ниже в §4, функция $y(t,x) \equiv v_t(t,x)$ является энергетическим решением первой краевой задачи. получаемой из задачи (2.2)–(2.4) путем формального дифференцирования ее по t:

$$\rho(t,x)y_t + \rho_t(t,x)y - \Delta y = h_t(t,x),\ (t,x) \in Q, \tag{2.9}$$

$$y(0,x) = \frac{\Delta u_0 + h(0,x)}{\rho(0,x)},\ x \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$y(t,x) = 0,\ \ t \in [0,T], x \in \partial\Omega. \tag{2.11}$$

Из результатов работы [6] следует, что

$$y(t,x) \equiv v_t(t,x) \in C(0,T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)),$$

причем

$$\sup_{0 \le t \le T} \|v_t(t,\cdot)\| + \|v_{tx}\|_{L_2(Q)} \le c_1. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.12), нетрудно повторить рассуждения из [8, с. 116-117], в результате которых получается оценка

$$\|v_{xx}(t,\cdot)\| \le c_2. \tag{2.13}$$

Рассмотрим функцию $\psi(x)$ из соотношения (2.8). Из оценки (2.13) и условия (E) следует, что

$$\psi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \tag{2.14}$$

причем

$$\|\psi\|_{W_2^2(\Omega)} \le K_\psi, \tag{2.15}$$

где $K_\psi = const > 0$ зависит от $n, \Lambda_1, \Lambda_2, K_\rho, K_\varphi, M_0, K_h$.

Замечание 2.1. В силу приведенных рассуждений и оценки (2.15) получаем, что изучение однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4) эквивалентно исследованию однозначной разрешимости обратной задачи (2.5)–(2.8).

Выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$.

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ произвольна. Тогда соотношения (2.5)–(2.7) представляют собой первую краевую задачу для нахождения функции $z(t,x)$. Повторяя рассуждения, проведенные выше для задачи (2.2)–(2.4), получим, что для любой $f(x) \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $z(t,x)$ задачи (2.5)–(2.7), причем

$$z(t,x) \in C(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)), z_t \in C(0,T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),$$
$$z_{xx} \in C(0,T; L_2(\Omega)). \tag{2.16}$$

Полагая в (2.5) $t = T$ и учитывая (2.8), приходим к соотношению

$$\rho(T,x) z_t(T,x) - \Delta\psi = f(x) g(T,x), \tag{2.17}$$

откуда

$$f(x) = \frac{\rho(T,x)}{g(T,x)} z_t(T,x) - \frac{\Delta\psi}{g(T,x)}. \tag{2.18}$$

Введем линейный оператор $B : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ по формуле

$$B(f) = \frac{\rho(T,x)}{g(T,x)} z_t(T,x), \tag{2.19}$$

где $z(t,x)$ – решение прямой задачи (2.5)–(2.7) при заданной функции $f(x)$ в правой части уравнения (2.5). В силу (2.19) соотношение (2.18) можно записать в виде операторного уравнения

$$f = B(f) - \frac{\Delta\psi}{g(T,x)}. \tag{2.20}$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия $(A)-(E)$. Тогда для того, чтобы пара $\{z, f\}$ была обобщенным решением задачи (2.5)–(2.8) необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (2.5)–(2.7), (2.20).*

Доказательство. Необходимость доказана выше при выводе соотношения (2.20).

Докажем достаточность. Итак, пусть $f^*(x) \in L_2(\Omega)$ является решением уравнения (2.20). Рассмотрим функцию $z^*(t,x)$ как единственное решение прямой задачи (2.5)–(2.7) с выбранной функцией $f(x) \equiv f^*(x)$ в правой части уравнения (2.5). Как и выше, получим, что $z^*(t,x)$ удовлетворяет (2.16). Положим

$$\psi^*(x) = z^*(T,x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{2.21}$$

Тогда, очевидно,

$$\rho(T,x) z_t^*(T,x) - \Delta\psi^* = f^*(x) g(t,x). \tag{2.22}$$

С другой стороны, $f^*(x)$ является решением уравнения (2.20) и в силу определения оператора B имеем, что $f^*(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\rho(T,x)z_t^*(T,x) - \Delta\psi = f^*(x)g(t,x).$$

Сравнивая его с (2.22), получаем, что

$$\Delta\psi^*(x) = \Delta\psi(x), \ x \in \Omega.$$

Из последнего соотношения с учетом (2.14) и (2.21) вытекает, что $\psi^*(x) = \psi(x)$ в Ω, а следовательно, пара $\{z^*(t,x), f^*(x)\}$ является решением обратной задачи (2.5)–(2.8). Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* $(A)-(E)$. *Тогда оператор* B, *введенный соотношением (2.19), является вполне непрерывным как оператор из* $L_2(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$. Пусть $z(t,x)$ – решение прямой задачи (2.5)–(2.7). Положим $w(t,x) = z_t(t,x)$. Тогда в силу (2.16)

$$w(t,x) \in C(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)), \tag{2.23}$$

причем из доказанной ниже теоремы 4.1 вытекает, что $w(t,x)$ является в Q энергетическим решением первой краевой задачи

$$(\rho w)_t - \Delta w = f(x)g_t(t,x), \tag{2.24}$$

$$w(0,x) = \frac{f(x)g(0,x)}{\rho(0,x)}, \ x \in \Omega, \tag{2.25}$$

$$w(t,x) = 0, \ t \in [0,T], \ x \in \partial\Omega, \tag{2.26}$$

которая получается из задачи (2.5)–(2.7) путем формального дифференцирования по t.

Из (2.23) следует, что для почти всех $t \in (0,T]$ $w_x(t,x) \in L_2(\Omega)$. Выберем и фиксируем $\varepsilon \in (0,T)$ так, чтобы $w_x(\varepsilon,\cdot) \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим в Q_T^ε первую краевую задачу

$$(\rho y)_t - \Delta y = f(x)g_t(t,x), \tag{2.27}$$

$$y(\varepsilon,x) = w(\varepsilon,x), \ x \in \Omega, \tag{2.28}$$

$$y(t,x) = 0, \ t \in [\varepsilon,T], \ x \in \partial\Omega. \tag{2.29}$$

в силу [6, с.202-206] такая задача имеет единственное энергетическое решение $y(t,x)$, причем, пользуясь методами работ [6, с.212] и [9], нетрудно показать, что

$$y(t,x) \in C(\varepsilon,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q_T^\varepsilon). \tag{2.30}$$

Очевидно, что $w(t,x)$ также является энергетическим решением задачи (2.27)–(2.29) (см. соотношение (2.23)). Следовательно, $w(t,x) = y(t,x)$ в Q_T^ε и из (2.30) вытекает тогда, что

$$w_x(t,x) \in C(\varepsilon,T;L_2(\Omega)). \tag{2.31}$$

Из теоремы о среднем в силу (2.31) вытекает существование $\tau^* \in [\varepsilon,T]$ такого, что

$$\int_\varepsilon^T\int_\Omega |w_x(t,x)|^2 dxdt = (T-\varepsilon)\|w_x(\tau^*,\cdot)\|^2. \tag{2.32}$$

Перепишем уравнение (2.24) в виде

$$-w_t + \frac{1}{\rho(t,x)}\Delta w = \frac{\rho_t(t,x)}{\rho(t,x)}w - \frac{g_t(t,x)}{\rho(t,x)}f,$$

умножим его на Δw и проинтегрируем по цилиндру $Q_T^{\tau^*}$. После несложных преобразований с применением неравенства (1.7), получим соотношение

$$\frac{1}{2}\|w_x(T,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2\Lambda_2}\|\Delta w\|^2_{L_2(Q_T^{\tau^*})} \le c_1 T\|f\|^2 + c_2\|w\|^2_{L_2(Q_T^{\tau^*})} + \frac{1}{2}\|w_x(\tau^*,\cdot)\|^2,$$

из которого после использования (2.32) приходим к оценке

$$\frac{1}{2}\|w_x(T,\cdot)\|^2 \le c_1 T\|f\|^2 + c_2\|w\|^2_{L_2(Q_T^{\tau^*})} + \frac{1}{2(T-\varepsilon)}\|w_x\|^2_{L_2(Q_T^{\tau^*})}. \qquad (2.33)$$

Умножим теперь уравнение (2.24) на $w(t,x)$ и проинтегрируем по цилиндру Q_t. Тогда с учетом (2.26) после интегрирования по частям придем к неравенству

$$\frac{\Lambda_1}{2}\|w(t,\cdot)\|^2 + \|w_x\|^2_{L_2(Q_t)} \le c_3\|f\|^2 + K_\rho\|w\|^2_{L_2(Q_t)} + K_g^*\sqrt{t}\|f\|\cdot\|w\|_{L_2(Q_t)}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\frac{\Lambda_1}{2}\sup_{0\le\tau\le t}\|w(\tau,\cdot)\|^2 + \|w_x\|^2_{L_2(Q_t)} \le (K_\rho+1)\|w\|^2_{L_2(Q_t)} + (c_3 + tK_g^{*^2})\|f\|^2 \le$$

$$\le (K_\rho+1)t\cdot\sup_{0\le\tau\le t}\|w(\tau,\cdot)\|^2 + c_4(T)\|f\|^2. \qquad (2.34)$$

Пусть $t\equiv t_0$ таково, что

$$(K_\rho+1)t < \frac{\Lambda_1}{4}. \qquad (2.35)$$

Тогда из (2.34) следует оценка

$$\frac{\Lambda_1}{4}\sup_{0\le\tau\le t_0}\|w(\tau,\cdot)\|^2 + \|w_x\|^2_{L_2(Q_{t_0})} \le c_4(T)\|f\|^2.$$

Выбор t_0 в (2.35) не зависит от начального условия (2.26), поэтому за конечное число шагов мы получим оценку

$$\sup_{0\le t\le T}\|w(t,\cdot)\|^2 + \|w_x\|^2_{L_2(Q)} \le c_5(T)\|f\|^2. \qquad (2.36)$$

Подставляя (2.36) в (2.33), получаем, что

$$\|w_x(T,\cdot)\|^2 \le c_6(T,\varepsilon)\|f\|^2. \qquad (2.37)$$

Поскольку $\varepsilon\in(0,T)$ было фиксировано, то из (2.37) следует оценка

$$\|z_{tx}(T,\cdot)\|^2 \equiv \|w_x(T,\cdot)\|^2 \le c^*(T)\|f\|^2. \qquad (2.38)$$

Из оценки (2.38), определения оператора B и компактности вложения пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ следует, что оператор B вполне непрерывен как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях (A) – (E) обратная задача (1.1)–(1.4) является фредгольмово разрешимой, т.е. из единственности решения обратной задачи (1.1)–(1.4) следует существование решения этой задачи.*

Доказательство. В силу замечания 2.1 теорему достаточно доказать для задачи (2.5)–(2.8). В силу леммы 2.2 оператор B является вполне непрерывным. Поэтому утверждение теоремы для задачи (2.5)–(2.8) следует из известных результатов функционального анализа [10, с. 472] и леммы 2.1.

§3. Локальная разрешимость обратной задачи.

Дадим два типа условий, достаточных для однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия $(A)-(E)$. Предположим дополнительно, что*

$$\gamma \equiv \frac{1}{\theta^2} - \frac{K_{\rho,1}}{2} > 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{g^2(T,x)}{\rho(T,x)} - \frac{g^2(0,x)}{\rho(0,x)} \geq \mu_0 > 0, \; x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$T < \frac{(2-K_{\rho,1})\mu_0}{2\theta^2 K_g^{*^2}}. \tag{3.3}$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (1.1)–(1.4), и оно единственно.

Доказательство.

I. Покажем, что решение задачи (1.1)–(1.4) единственно. Пусть $\{u(t,x), f(x)\}$ – решение задачи (1.1)–(1.4) при $h(t,x) = \varphi(x) = u_0(x) \equiv 0$. Тогда функция $w(t,x) \equiv u_t(t,x)$ является решением задачи (2.24)–(2.26).

Умножим уравнение (2.24) на $w(t,x)$ и проинтегрируем по Q. Учитывая условие (3.1), после несложных преобразований с использованием неравенства (1.7) приходим к оценке

$$\int\limits_\Omega \rho(T,x) w^2(T,x)\,dx - \int\limits_\Omega \rho(0,x) w^2(0,x)\,dx + \gamma \int\limits_Q w^2\,dxdt \leq$$

$$\leq \frac{2\theta^2 K_g^{*^2}}{2 - K_{\rho,1}\theta^2} T\|f\|^2, \tag{3.4}$$

Из уравнения (1.1) при $t = T$ имеем с учетом (1.4) и условия $\varphi(x) \equiv 0$, что

$$f(x) = \frac{\rho(T,x)}{g(T,x)} u_t(T,x) \equiv \frac{\rho(T,x)}{g(T,x)} w(T,x). \tag{3.5}$$

Подставляя соотношения (3.5) и (2.25) в (3.4), приходим к оценке

$$\int\limits_\Omega \left[\frac{g^2(T,x)}{\rho(T,x)} - \frac{g^2(0,x)}{\rho(0,x)}\right] f^2(x)\,dx + \gamma\|w\|^2_{L_2(Q)} \leq \frac{2\theta^2 K_g^{*^2}}{2 - K_{\rho,1}\theta^2} T\|f\|^2.$$

В силу (3.2) имеем отсюда

$$\mu_0\|f\|^2 + \gamma\|w\|^2_{L_2(Q)} \leq \frac{2\theta^2 K_g^{*^2}}{2 - K_{\rho,1}\theta^2} T\|f\|^2,$$

что в силу (3.3) влечет $f(x) \equiv 0$ в Ω, $w \equiv u_t \equiv 0$ и Q. но тогда, очевидно, и $u(t,x) \equiv 0$ в Q.

Таким образом, единственность решения задачи (1.1)–(1.4) доказана.

II. Существование решения обратной задачи (1.1)–(1.4) есть следствие его единственности и утверждения теоремы 2.1.

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1.

1) Условие (3.1) теоремы 3.1 заведомо выполнено, если $\rho_t(t,x) \geq 0$ в Q.

2) Условие (3.2) теоремы 3.1 заведомо выполнено, если $g(0,x) \equiv 0, x \in \Omega$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия $(A)-(E)$. Предположим дополнительно, что*

$$\nu \equiv \frac{1}{\Lambda_2 \theta^2} - \frac{K_{\rho,1}}{\Lambda_1} > 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1 g_0^2}\left[\left(\frac{K_g^2}{\Lambda_1} - \frac{\theta^2 K_g^{*^2}}{\nu}\right) e^{-\nu T} + \frac{\theta^2 K_g^{*^2}}{\nu}\right] < 1. \tag{3.7}$$

Тогда обратная задача (1.1)-(1.4) имеет решение и оно единственно.

Доказательство.

I. Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (1.1)-(1.4). Докажем прежде всего, что при выполнении условий (3.6),(3.7) оператор B в (2.19) является сжимающим оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Умножим уравнение (2.24) на $w(t,x)$ и проинтегрируем по Ω. После несложных преобразований с применением неравенства (1.7) приходим к оценке

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \rho w^2\,dx + \left(\frac{1}{\Lambda_2\theta^2} - \frac{K_{\rho,1}}{\Lambda_1}\right)\int\limits_{\Omega} \rho w^2\,dx \le \theta^2 K_g^{*^2}\|f\|^2. \tag{3.8}$$

Заметим, что в силу (3.6) множитель $1/\Lambda_2\theta^2 - K_{\rho,1}/\Lambda_1 \equiv \nu > 0$, поэтому, применяя к (3.8) известную лемму Гроноулла (см., например [6, с.112]), и учитывая условие (2.25), приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega} \rho(T,x) w^2(T,x)\,dx \le \int\limits_{\Omega} \frac{g^2(0,x)}{\rho(0,x)} f^2(x)\,dx \cdot e^{-\nu T} + \frac{\theta^2 K_g^{*^2}}{\nu}\left(1 - e^{-\nu T}\right)\|f\|^2.$$

Следовательно,

$$\|Bf\|^2 \equiv \left\|\frac{\rho(T,\cdot)}{g(T,\cdot)} w(T,\cdot)\right\|^2 \le \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1 g_0^2}\left[\left(\frac{K_g^2}{\Lambda_1} - \frac{\theta^2 K_g^{*^2}}{\nu}\right) e^{-\nu T} + \frac{\theta^2 K_g^{*^2}}{\nu}\right]\|f\|^2. \tag{3.9}$$

Из (3.9) в силу (3.7) вытекает сжимаемость оператора B. Следовательно, уравнение (2.20) однозначно разрешимо.

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$ является его решением. Подставляя данную $f(x)$ в правую часть уравнения (2.5), найдем функцию $z(t,x)$ как решение прямой задачи (2.5)-(2.7). Тогда в силу леммы 2.1 пара $\{z, f\}$ будет являться обобщенным решением обратной задачи (2.5)-(2.8), что с учетом замечания 2.1 влечет за собой разрешимость обратной задачи (1.1)-(1.4).

II. Единственность решения. Предположим, что существует два различных решения $\{u_1, f_1\}$ и $\{u_2, f_2\}$ обратной задачи (1.1)-(1.4). Тогда в силу леммы 2.1 существует два различных решения $\{z_1, f_1\}$ и $\{z_2, f_2\}$ обратной задачи (2.5)-(2.8). При этом обязательно

$$f_1(x) \not\equiv f_2(x), \tag{3.10}$$

поскольку иначе в силу единственности решения прямой задачи мы бы имели $z_1(t,x) \equiv z_2(t,x)$. Однако условие (3.10) противоречит сжимаемости оператора B, поскольку обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются решениями одного и того же операторного уравнения (2.20).

Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.2. Если $g(t,x) \equiv const$, $\rho(t,x) \equiv const$ в Q, то условия (3.6),(3.7) всегда выполнены, и обратная задача (1.1)-(1.4) имеет единственное решение, что соответствует известным ранее результатам.

Замечание 3.3. Условие (3.6) заведомо выполнено, если $\rho_t(t,x) \geq 0$ в Q.

Замечание 3.4. Если $g(t,x) \equiv const$ в Q, $\rho(t,x) \not\equiv const$, но $\rho_t(t,x) \geq 0$ в Q, то условие (3.6) выполнено всегда, а условие (3.7) будет выполнено, например, при $T \geq T_0 > 0$ где T_0 явно вычисляется из условия (3.7). Таким образом, задача (1.1)-(1.4) будет иметь единственное решение, если высота цилиндра $Q \equiv Q_T$ достаточно велика.

§4. Некоторые вспомогательные утверждения.

Выше в работе мы неоднократно использовали возможность формального дифференцирования рассматриваемой задачи по переменной t. Для полноты изложения приведем подробное обоснование этого факта.

Итак, рассмотрим в Q две первых краевых задачи

$$\rho(t,x)u_t - \Delta u = h(t,x), \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{4.2}$$

$$u(t,x) = 0,\ t \in [0,T], x \in \partial\Omega \tag{4.3}$$

и

$$(\rho(t,x)w)_t - \Delta w = h_t(t,x), \tag{4.4}$$

$$w(0,x) = \frac{\Delta u_0 + h(0,x)}{\rho(0,x)},\ x \in \Omega, \tag{4.5}$$

$$w(t,x) = 0,\ t \in [0,T], x \in \partial\Omega. \tag{4.6}$$

Заметим, что задача (4.4)–(4.6) получена формальным дифференцированием задачи (4.1)–(4.3) по t.

Предположим, что для функций $\rho(t,x), h(t,x), u_0(x)$ выполнены условия (A), (C), (D). В этом случае существует единственное энергетическое решение $u(t,x)$ (см. выше определение 2.2) задачи (4.1)–(4.3), которое в силу [7] принадлежит классу $W_2^{1,2}(Q)$.

Ниже нам понадобятся более слабые, нежели энергетические, решения задачи (4.4)–(4.6). Дадим соответствующее определение.

Определение 4.1. *Функция $w(t,x) \in L_2(Q)$ называется обобщенным L_2-решением задачи (4.4)–(4.6), если для любой $\chi(t,x) \in L_2(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q)$, $\chi(T,x) = 0$, выполнено интегральное тождество*

$$-\int_\Omega \rho(0,x)w_0(x)\chi(0,x)\,dx - \int_Q \rho(t,x)w\chi_t(t,x)\,dxdt -$$

$$- \int_Q w\Delta\chi(t,x)\,dxdt = \int_Q h_t(t,x)\chi(t,x)\,dxdt.$$

где $w_0(x) = (\Delta u_0 + h(0,x))/\rho(0,x)$.

Справедлива

Теорема 4.1. *При выполнении условий $(A),(C),(D)$ функция $u_t(t,x)$ (где $u(t,x)$ - решение задачи (4.1)–(4.3)) является энергетическим решением задачи (4.4)–(4.6).*

Доказательство. Покажем прежде всего, что обобщенное L_2-решение задачи (4.4)–(4.6) единственно.

Действительно, пусть существуют два обобщенных L_2-решения $w_1(t,x)$ и $w_2(t,x)$. Положим $y(t,x) = w_1(t,x) - w_2(t,x)$. Тогда $y(t,x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q y(t,x)(\rho\chi_t + \Delta\chi)\, dxdt = 0. \tag{4.7}$$

Рассмотрим в Q задачу

$$\begin{aligned}&\rho(t,x)\chi_t - \Delta\chi = y(t,x),\\ &\chi(T,x) = 0,\ x \in \Omega,\\ &\chi(t,x) = 0,\ t \in [0,T], x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

В силу [7] данная задача имеет единственное решение $\chi^*(t,x) \in C(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q)$. Положив в (4.7) $\chi(t,x) = \chi^*(t,x)$, мы, очевидно, получим, что $y(t,x) \equiv 0$ в Q.

Итак, обобщенное L_2-решение задачи (4.4)–(4.6) единственно. Покажем, что функция $u_t(t,x)$ (где $u(t,x)$ – решение задачи (4.1)–(4.3)) является обобщенным L_2-решением задачи (4.4)–(4.6).

Действительно, пусть $\chi(t,x) \in L_2(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q)$, $\chi(T,x) = 0$,. Умножим уравнение (4.1) на $-\chi_t(t,x)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных преобразований придем к соотношению

$$-\int\limits_Q (\rho u_t)\chi_t dxdt - \int\limits_Q u_t\Delta\chi\, dxdt - \int\limits_\Omega (\Delta u_0 + h(0,x))\chi(0,x)\, dx = \int\limits_Q h_t\chi\, dxdt,$$

откуда вытекает, что $u_t(t,x)$ является обобщенным L_2-решением задачи (4.4)–(4.6).

С другой стороны, в силу предположений $(A),(C),(D)$ задача (4.4)–(4.6) имеет энергетическое решение $w(t,x) \in C(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, которое одновременно, очевидно, является и обобщенным L_2-решением этой задачи. В силу доказанной выше единственности такого решения для задачи (4.4)–(4.6) имеем $u_t(t,x) \equiv w(t,x)$, то есть $u_t(t,x)$ является энергетическим решением задачи (4.4)–(4.6).

Теорема 4.1 доказана.

Список литературы

[1] Прилепко А.И., Соловьев В.В. *Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа,* Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, N 11. С. 1971 –1980.

[2] Соловьев В.В. *О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения,* Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, N 9. С. 1577 –1583.

[3] Костин А.Б., Прилепко А.И. *О разрешимости обратной задачи для уравнения теплопроводности,* В кн.: Обратные заадчи для математических моделей физических процессов. (Сб. научных трудов). М.: МИФИ, 1991. С. 52–58.

[4] Прилепко А.И., Костин А.Б. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением,* Матем. сборник. 1992. Т. 183, N 4. С. 49–68.

[5] Ткаченко Д.С. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения с интегральным переопределением,* В кн.: Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докл. Всерос. научн. конф. Екатеринбург: изд-во Уральского ун-та, 2001. С. 120.

[6] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа,* М.: Наука, 1967.

[7] Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т. *Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами,* Матем. сборник. 1986. Т. 173, N 12. С. 477–500.

[8] Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970.

[9] Кружков С.Н. *Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независсимыми переменными.* Труды сем. им. И.Г.Петровского. 1979. Вып. 5. С. 217–272.

[10] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* М.: Физматгиз, 1959.

E-mail address: image@consultant.ru