ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

© С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник

Чернівці, Львів; Україна

У теорії задачі Коші для параболічних систем важлививим поняттям є поняття фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК). ФМРЗК істотно використовується для вивчення внутрішніх властивостей та інтегрального зображення розв'язків, дослідження коректної розв'язності задачі Коші для лінійних і квазілінійних систем та ін. Повнота результатів таких досліджень залежить від того, наскільки глибоко вивчені властивості ФМРЗК. Найкращі результати в цьому напрямку на даний час одержані для рівномірно параболічних за Петровським [1, 2] і $\overrightarrow{2b}$-параболічних [3 – 5] систем з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами. Відомі також певні результати про ФМРЗК та її застосування для параболічних за Петровським систем з коефіцієнтами, які прямують до нескінченності при $|x| \to \infty$ (зі зростаючими коефіцієнтами) [1, 6 – 8].

У працях [1, 7] введено важливе поняття дисипативності параболічної за Петровським системи. Дисипативні системи узагальнюють рівняння вигляду $\partial_t u = \Delta u - (D(x))^2 u$, де Δ – оператор Лапласа, а функція $D : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ необмежено зростає при $|x| \to \infty$. Для дисипативних систем і деяких систем зі зростаючими коефіцієнтами, що зводяться до дисипативних, в [1, 7, 8] побудовано й досліджено ФМРЗК. При цьому використовуються два набори умов на коефіцієнти системи і так звану характеристику дисипації. У першому наборі накладаються досить жорсткі обмеження на гладкість коефіцієнтів. Другий набір містить мінімальні вимоги щодо гладкості коефіцієнтів, але ставляться додаткові обмеження на характеристику дисипації.

Для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем поняття дисипативності і теореми про існування та оцінки ФМРЗК наведені в [9—13], причому в [10—12] використовується перший набір умов на коефіцієнти і характеристику дисипації, а в [9, 13] – другий. Зазначимо, що в [9, 12, 13] розглядаються $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи при наявності певних вироджень на початковій гіперплощині.

У цій статті наводяться результати дослідження ФМРЗК і розв'язності задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з другим набором умов на коефіцієнти та характеристику дисипації. При цьому припускається, що система може містити виродження на початковій гіперплощині.

1. Позначення і припущення. Нехай $n, b_1, \dots, b_n, N$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \dots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$; $||k|| \equiv \sum_{j=1}^{n}(sk_j/b_j)$, якщо $k = (k_1, ..., k_n)$ – мультиіндекс; $M \equiv \sum_{j=1}^{n}(s/b_j)$; T – задане додатне число; $\Pi_H \equiv \{(t,x)|t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}^n$; I – одинична матриця порядку N; i – уявна одиниця; $\mathbb{C}_N$ – сукупність усіх стовпчиків висоти N з комплексними елементами. Використовуватимемо такі спеціальні відстані між точками x і y з $\mathbb{R}^n$:

$$p(x,y) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{2b_j/s}\right)^{1/2}, \quad q(x,y) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{q_j}\right)^{1/q'},$$

де $q_i \equiv 2b_j/(2b_j-1)$, $1 \le j \le n$, $q' \equiv \max\limits_{1\le j\le n} q_j$.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$\left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{||k||\le 2s} a_k(t,x)\partial_x^k - b(t,x)\right)u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де a_k, $||k|| \le 2s$, і b – квадратні матриці порядку N, u і f – стовпчики висоти N; α, β – невід'ємні неперервні на $[0,T]$ функції, причому при $t \in (0,T]$ $\alpha(t) > 0$ і $\beta(t) > 0$.

Відзначимо, що при $t = 0$ можливий випадок $\alpha(0)\beta(0) = 0$, тобто система (1) може вироджуватись при $t = 0$.

Сформулюємо припущення щодо коефіцієнтів системи (1). Спочатку розглянемо відповідну системі (1) систему без функцій α, β і без коефіцієнта b

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||\le 2s} a_k(t,x)\partial_x^k\right)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{2}$$

Припускатимемо, що виконуються наступні умови.

Б$_1$. Відповідна системі (1) система (2) є дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D [9], тобто існує неперервна функція D : $\mathbb{R}^n \to [1,\infty)$, яка задовольняє такі умови:

1) $D(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$;

2) функції $b_k(t,x) \equiv a_k(t,x)D(x)^{||k||-2s}$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, $||k|| \le 2s$, обмежені;

3) система рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\right)v = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} рівномірно на $\Pi_{[0,T]} \times \mathbb{R}$ $\overrightarrow{2B}$-параболічна, де $\overrightarrow{2B} \equiv (2b_1,\ldots,2b_n,2s)$; це означає, що p-корені рівняння

$$\det\left(Ip - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)(i\sigma)^k\mu^{k_{n+1}}\right) = 0$$

задовольняють умову

$$\exists\delta > 0 \quad \forall (t,x) \in \Pi_{[0,T]} \quad \forall\sigma \in \mathbb{R}^n \quad \forall\mu \in \mathbb{R}:$$

$$\mathrm{Re}\quad p(t,x,\sigma,\mu) \le -\delta\biggl(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j} + \mu^{2s}\biggr).$$

Б $_2$. $\exists\, C > 0 \quad \exists\,\lambda \in (0,1] \quad \forall\,\{(t,x),(t,y)\} \subset \Pi_{[0,T]} \quad \forall\, k,\ ||k|| \le 2s:\ |a_k(t,x) - a_k(t,y)| \le C(p(x,y))^{\lambda}((D(x))^{2s-||k||} + (D(y))^{2s-||k||})$; функції b_k, $||k|| \le 2s$, неперервні за t рівномірно щодо $x \in \mathbb{R}^n$.

Б $_3$. Функція b визначена в $\Pi_{[0,T]}$, обмежена, неперервна за t і задовольняє умову

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\,\{(t,x),(t,y)\} \subset \Pi_{[0,T]}:\ |b(t,x) - b(t,y)| \le C(p(x,y))^{\lambda},$$

де число λ з умови **Б** $_2$.

Б $_4$. Характеристика дисипації D задовольняє такі умови:

1) $\exists\, C > 0 \quad \forall\,\{x,y\} \subset \mathbb{R}^n,\ q(x,y) \le 1:\ D(x) \le CD(y)$;

2) $\exists\, C > 0 \quad \forall\,\{x,y\} \subset \mathbb{R}^n,\ q(x,y) > 1:$

$$D(x) \le C\exp\{\epsilon \textstyle\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|\,(D(y))^{s/b_j}\},$$

де ϵ – досить мале додатне число.

Нехай $g: \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ – функція, яка зв'язана з характеристикою дисипації D умовою

Б $_5$. Функція g має похідні $\partial_x^k g$, $0 < ||k|| \le 2s$, для яких справджуються нерівності

$$|\partial_x^k g(x)| \le C\eta(D(x))^{||k||},$$

$$|\partial_x^k g(x) - \partial_y^k g(y)| \le C\eta(p(x,y))^{\lambda}((D(x))^{||k||} + (D(y))^{||k||}),$$

$$\{x,y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < ||k|| \le 2s,$$

де $C > 0$, λ з умови **Б** $_2$, η – досить мале додатне число.

Б $_6$. Для системи (2) існує спряжена за Лагранжем система, для якої виконуються умови **Б** $_1$ і **Б** $_2$.

Користуватимемось ще такими позначеннями:

$$A(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \quad B(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta,$$

$$E_c^d(t,\tau,x) \equiv \exp\{-c\sum_{j=1}^{n}(B(t,\tau))^{1-q_j}|x_j|^{q_j} + dA(t,\tau)\},$$

$0 \le \tau < t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$, c і d – сталі.

2. Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші. Оскільки система (1) при $t = 0$ може вироджуватись, то не завжди для неї можна розглядати задачу

Коші з початковими даними при $t=0$ у звичайному розумінні. Але можна говорити про ФМРЗК як про таку квадратну матрицю $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, що формулою

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ \ (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]},$$

визначається розв'язок однорідної системи (1), який задовольняє умову

$$u(t,x)|_{t=\tau}=\varphi(x),\ \ x\in\mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau\in(0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Наведемо результати про ФМРЗК для системи (1) при вищезроблених припущеннях, частина яких одержана в [9, 13].

ТЕОРЕМА 1. *Нехай для системи (1) виконуються умови* $\mathbf{Б}_1$ – $\mathbf{Б}_4$. *Тоді для неї існує ФМРЗК* $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *для якої справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\Big((B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2s)}\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$

$$+(D(\xi))^{-l}\Big)E_c^d(t,\tau,x-\xi),\quad ||k||<2s,\tag{3}$$

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\Big((B(t,\tau))^{-(M+||k||)/(2s)}\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2s}\}+$$

$$+(D(\xi))^{-l}\Big)E_c^d(t,\tau,x-\xi)\Big(1+(D(x))^{2s}+\exp\{\epsilon MB(t,\tau)(D(x))^{2s}\}\Big),$$

$$||k||=2s,\tag{4}$$

а також оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C\sum_{j=0}^{||k||}(B(t,\tau))^{-(M+||k||-j)/(2s)}(D(x))^j\times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi)\exp\{g(x)-g(\xi)\},\quad ||k||<2s,\tag{5}$$

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\sum_{j=0}^{||k||}\Big((B(t,\tau))^{-(M+||k||-j)/(2s)}+(D(\xi))^{-l}\Big)(D(x))^j\times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,x-\xi)\Big(1+(D(x))^{2s}+\exp\{\epsilon MB(t,\tau)(D(x))^{2s}\}\Big)\exp\{g(x)-g(\xi)\},$$

$$||k||=2s,\tag{6}$$

В оцінках (3)-(6) $0 < \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, C_l, C *і* c *– додатні сталі,* d *— стала з* $\mathbb{R}$, l *- довільно фіксоване додатне число,* g *– будь-яка функція, яка задовольняє умову* $\mathbf{Б}_5$.

Якщо, крім умов $\mathbf{Б}_1$ *–* $\mathbf{Б}_4$, *виконується умова* $\mathbf{Б}_6$, *то для спряженої системи існує ФМРЗК* $Z^*(\tau,\xi;t,x)$, $0<\tau<t\leq T$, $\{\xi,x\}\subset\mathbb{R}^n$, *і правильні рівності*

$$Z^*(\tau,\xi;t,x) = (\overline{Z(t,x;\tau,\xi)})', \tag{7}$$

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\gamma,y)Z(\gamma,y;\tau,\xi)dy, \tag{8}$$

$$0<\tau<\gamma<t\leq T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де штрих означає транспонування, а риска – комплексне спряження.

Коли при $t=0$ *система (1) не має виродження або має слабке виродження, тобто* $A(T,0)<\infty$, *то в оцінках (3)–(6) та рівностях (7) і (8) можна брати* $\tau=0$ *і* $d=0$.

3. Розв'язність задачі Коші та задачі без початкових умов. Властивості ФМРЗК дозволяють досліджувати для системи (1) розв'язність задачі Коші у випадку відсутності або слабкого виродження і задачі без початкових умов, коли виродження сильне, тобто $A(T,0)=\infty$. Наведемо деякі результати такого дослідження.

Для формулювання основного результату означимо необхідні норми і простори. Нехай c_0, $\nu_1,...,\nu_n$ – задані числа такі, що $0<c_0<c$, $0\leq\nu_j<c_0T^{1-q_j}$, $j\in\{1,...,n\}$, де c – стала з оцінок (3)–(6). Розглянемо функції

$$k_j(t) \equiv c_0\nu_j(c_0^{2b_j-1}-(T-B(T,t))\nu_j^{2b_j-1})^{1-q_j}, \quad j\in\{1,...,n\};$$

$$k(t)\equiv(k_1(t),...,k_n(t));$$

$$\Phi_\chi(t,x)\equiv\exp\left\{-\chi\sum_{j=1}^n k_j(t)|x_j|^{q_j}\right\}; \quad \Psi_\chi(x)\equiv\exp\{-\chi g(x)\},$$

де $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\chi\in\{-1,1\}$, g – функція з оцінок (5) і (6).

Для вимірної за x при кожному фіксованому $t\in[0,T]$ функції $u:\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}_N$ означимо норму

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(\cdot)}\equiv\|u(t,\cdot)\Phi_1(t,\cdot)\Psi_1(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1\leq p\leq\infty, \quad t\in[0,T].$$

Позначимо через $L_p^{k(0),g(\cdot)}$ простір усіх вимірних функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма $\|\varphi\|_p^{k(0),g(\cdot)}$, через $M^{k(0),g(\cdot)}$ – простір усіх $\mathbb{C}_N$-значних узагальнених борельових мір μ, для яких збігається інтеграл

$$\|\mu\|^{k(0),g(\cdot)}\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi_1(0,x)\Psi_1(x)d|\mu|(x),$$

через $L_1^{-k(T),-g(\cdot)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма

$$\|\Phi_{-1}(T,\cdot)\Psi_{-1}(\cdot)\psi(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

а через $C_0^{-k(T),-g(\cdot)}$ – простір таких неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, що

$$\Phi_{-1}(T,x)\Psi_{-1}(x)|\psi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ використовуватимемо такі умови.

$\mathbf{\Gamma}_1$. Функція f неперервна і задовольняє локальну умову Гельдера за x .

$\mathbf{\Gamma}_{2p}$. Для довільного $t \in (0,T]$ скінченні величини $\|f(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(\cdot)}$ і

$$F_p(t) \equiv \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau),g(\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

$\mathbf{\Gamma}_3$. Функція f неперервна і задовольняє таку умову Гельдера:

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \exists \lambda \in (0,1] \quad \forall t \in (0,T] \quad \forall \{x,\xi\} \subset Q_R :$$

$$|f(t,x) - f(t,\xi)| \le C\delta(t)\exp\{-dA(T,t)\}(p(x,\xi))^\lambda,$$

де $Q_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n | q(x,0) \le R\}$, $\delta : (0,T] \to [0,\infty)$ – функція, яка задовольняє умову $\int_0^T (\delta(t)/\alpha(t))dt < \infty$, а d – стала з оцінок (3)–(6).

$\mathbf{\Gamma}_4$. Для довільного $t \in (0,T]$ скінченні величини $\|f(t,\cdot)\|_\infty^{k(t),g(\cdot)}$ і $F(t) \equiv \int_0^t \exp\{dA(T,\tau)\}\|f(\tau,\cdot)\|_\infty^{k(\tau),g(\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}$, де стала d така ж, як в умові $\mathbf{\Gamma}_3$.

ТЕОРЕМА 2. *Нехай система (1) не має виродження або має слабке виродження і виконуються умови* $\mathbf{Б}_1$ – $\mathbf{Б}_4$. *Тоді правильні такі твердження:*

1) якщо $\varphi \in L_p^{k(0),g(\cdot)}$ *і функція* f *задовольняє умови* $\mathbf{\Gamma}_1$ *та* $\mathbf{\Gamma}_{2p}$, $1 \le p \le \infty$, *то функція*

$$u(t,x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{9}$$

є розв'язком системи (1) таким, що

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(\cdot)} \le C\left(\|\varphi\|_p^{k(0),g(\cdot)} + F_p(t)\right),$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{k(t),g(\cdot)} = 0$$

і при $p=\infty$

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi\in L_1^{-k(T),-g(\cdot)}$;

2) якщо $\mu\in M^{k(0),g(\cdot)}$ *і для функції* f *виконуються умови* $\mathbf{\Gamma}_1$ *та* $\mathbf{\Gamma}_{21}$, *то функція*

$$u(t,x)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi)+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\tag{10}$$

є розв'язком системи (1), який задовольняє такі умови:

$$\exists\, C>0\quad\forall\, t\in(0,T]:\|u(t,\cdot)\|_1^{k(t),g(\cdot)}\le C\left(\|\mu\|^{k(0),g(\cdot)}+F_1(t)\right)$$

і

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi\in C_0^{-k(T),-g(\cdot)}$.

Якщо ж додатково припускати виконання умови $\mathbf{Б}_6$, *то розв'язки, що визначаються формулами (9) і (10), є єдиними в класі функцій, які задовольняють умову*

$$\exists\, C>0\quad\forall\, t\in(0,T]:$$

$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t),D(\cdot),g(\cdot)}\equiv||\Phi_1(t,\cdot)(D(\cdot))^{2s}\Psi_1(\cdot)u(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le C,$$

де g *– функція з оцінок (5) і (6), а* D *– характеристика дисипації системи.*

Наведемо умови, за яких існує єдиний розв'язок сильно виродженої системи (1) без початкових умов.

Теорема 3. *Нехай для системи (1) виконуються умови* $\mathbf{Б}_1$ – $\mathbf{Б}_4$ і $A(T,0)=\infty$. *Якщо* f *задовольняє умови* $\mathbf{\Gamma}_3$ *і* $\mathbf{\Gamma}_4$, *то функція*

$$u(t,x)\equiv\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\quad(t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

є розв'язком системи (1), для якого справджується оцінка

$$||u(t,\cdot)||_\infty^{k(t),g(\cdot)}\le C\exp\{-dA(T,t)\}F(t),\quad t\in(0,T].$$

Цей розв'язок єдиний, якщо єдиним є відповідний розв'язок задачі Коші для системи (1) в $\Pi_{[t_0,T]}$ *при довільному* $t_0\in(0,T)$.

Список літератури

1. Эйдельман С.Д., *Параболические системы*, Москва: Наука, 1964, 443с.
2. Эйдельман С.Д., *Параболические уравнения*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, Москва: ВИНИТИ **63** (1990), 201–313.
3. Эйдельман С.Д., *Об одном классе параболических систем*, Докл. АН СССР **133** (1960), no. 1, 40–43.
4. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д., $\overrightarrow{2b}$ *-параболические системы*, Тр. семинара по функ. анализу (1968), no. 1, Киев: Ин-т математики АН УССР, 3–175, 271–273.
5. Ивасишен С.Д., *Интегральное представление и начальные значения решений* $\overrightarrow{2b}$ *-параболических систем*, Укр. мат. журн. **42** (1990), no. 4, 500–506.
6. Житомирский Я.И., *Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффицтентами*, Изв. вузов. Математика (1959), no. 1, 55–74.
7. Эйдельман С.Д., *О задаче Коши для систем с растущими коэффициентами*, Докл. АН СССР **127** (1959), no. 4, 760–763.
8. Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О., *Исследование поведения* L_2 *-норм решений сильно параболических систем с диссипацией*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **37** (1973), no. 3, 676–690.
9. Івасишен С.Д., Пасічник Г.С., *Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині*, Доп. НАН України. (1999), no. 6, 18–22.
10. Пасічник Г.С., *Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічних систем*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. (1999), no. 54, 140–151.
11. Пасічник Г.С., *Про розв'язність задачі Коші для* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами*, Мат. методи та фіз.- мех. поля. **42** (1999), no. 3, 61–65.
12. Івасишен С.Д., Пасічник Г.С., *Про задачу Коші для* $\overrightarrow{2b}$ *-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами*, Укр. мат. журн. **52** (2000), no. 11, 1484–1496.
13. Пасічник Г.С., Івасишен С.Д., *Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині*, Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика, Чернівці: Рута (2000), 82–91.

С.Д. Івасишен
Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2,
м.Чернівці, 58012, Україна
E-mail address: mathmod@chdu.cv.ua

Г.С. Пасічник
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-Б,
м. Львів, 79053, Україна