О РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ПЛОСКОМ УГЛЕ

© Наталья Васильева

Донецк, Украина

Резюме. В работе изучается нестационарная краевая задача в плоском угле для уравнения теплопроводности со старшей производной по времени в граничном условии. Такая задача является модельной для задачи Стефана. С помощью оценок соответствующих потенциалов доказана разрешимость такой задачи в весовых классах Гельдера.

Задача Стефана состоит в определении поля температуры и границы фазового прехода в чистом веществе. При этом предполагается [1], что агрегатное состояние среды изменяется только вследствие теплопроводности среды под воздействием внешних и внутренних источников тепла. Уравнение теплопроводности описывает передачу энергии в каждой фазе рассматриваемого вещества, поведение же на границы фазового перехода (так называемой свободной границы) задается условием Стефана. Это условие выражает баланс энергии при переходе из одного агрегатного состояния в другое. Кроме условия Стефана на свободной границе задается еще одно дополнительное условие. Предположим, что рассматриваемая среда может находиться в двух агрегатных состояниях: жидком и твердом, тогда вторым условием на свободной границе является равенство температуры среды температуре плавления данного вещества, которое считается известной постоянной величиной. Современное состояние проблемы Стефана можно найти, например, в обзоре [2].

Метод доказательства разрешимости в малом по времени такого рода задач в пространствах гладких функций состоит в их редукции к задачам с фиксированной областью определения неизвестных функций, а затем в отыскании неподвижных точек некоторых нелинейных операторов (см., например, [3]). Последнее сопряжено с исследованием соответствующих линейных краевых задач. Центральной частью доказательства разрешимости таких задач является построение обратного оператора для модельных задач, связанных с наличием свободной границы в исходной задаче. Для регулярных начальных данных эти модельные задачи имеют постоянные коэффициенты и формулируются для полупространства. Ситуация существенно меняется, если, например, свободная граница в начальный момент времени имеет угловые точки. В этом случае соответствующие модельные задачи имеют переменные коэффициенты и ставятся в плоском угле, что значительно усложняет исследование.

В работе [4] рассмотрен случай, когда начальная свободная граница является или плоским углом или конусом. Для этих случаев построены автомодельные решения. Отметим, что исследования в этой работе проводились в весовых классах Соболева.

Целью же данной работы было описание весовых классов Гельдера и получение в них коэрцитивных оценок решения модельной задачи, соответствующей угловой точке на исходной свободной границе. Эти результаты в дальнейшем послужат основой для доказательства классической разрешимости задачи Стефана с нерегулярной начальной свободной границей. Аналогичная краевая задача ранее рассматривалась в работах [5,6], где было доказано существование решения в весовых пространствах Соболева.

Постановка задачи и основной результат. Пусть $\omega-$ некоторый заданный угол, $G=\{(y_1,y_2): -y_1\tan\frac{\omega}{2}<y_2<0\}$, $g=\{(y_1,y_2): y_2=-y_1\tan\frac{\omega}{2},\ \ y_1>0\}$, $G_T=G\times(0,T)$, $g_T=g\times(0,T), n-$ внешняя к области G, нормаль $r=(y_1^2+y_2^2)^{1/2}$, $(r,\varphi)-$ полярная система координат на плоскости (y_1,y_2). Модельная задача Стефана состоит в отыскании функции $u(y,t)$ по следующим условиям:

$$u_t-\Delta_y u=f_0(y,t),\qquad (y,t)\in G_T;\qquad u_n|_{y_2=0}=0;$$

$$u_t+u_n+hu_r=f(y,t),\ (y,t)\in g_T;\quad u(y,0)=0,\ u_t(y,0)=0,\quad y\in\overline{G},\qquad (1)$$

где Δ_y- оператор Лапласа по переменным (y_1,y_2), $h=-tg(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2})$, $f_0(y,t)$, $f(y,t)$ - заданные функции $(f_0(y,0)=0,\ f(y,0)=0)$. Для определенности рассмотрим случай $\omega<\frac{\pi}{2}$, $h<0$.

Определим функциональные пространства, используемые в работе. Пусть D - заданная область в R^N, $D_T=D\times(0,T)$. Обозначим через $\rho(x)$ расстояние от начала координат до точки $x\in\overline{D}$, для точек $x,y\in\overline{D}$ положим $\rho=\min\{\rho(x),\rho(y)\}$. Пусть $\alpha,\ \beta,\ \delta\in(0,1)$, s_1 и s_2 - некоторые заданные числа: $s_1>s_2$, $s_1>0$ и $l-$ целое неотрицательное число. Определим следующие весовые полунормы:

$$\left\langle D_y^l v\right\rangle_{y,\overline{D}_T}^{*(\alpha)}=\sup_{\overline{D}_T}\rho^{l+\alpha-s_1}(1+\rho^{s_2})\frac{|D_y^l v(y,t)-D_x^l v(x,t)|}{|x-y|^{\alpha}};$$

$$\left\langle D_y^l v\right\rangle_{t,\overline{D}_T}^{*(\beta)}=\sup_{\overline{D}_T}\rho^{l-s_1}(y)(1+\rho^{s_2}(y))\frac{|D_y^l v(y,t)-D_y^l v(y,\tau)|}{|t-\tau|^{\beta}};\qquad (2)$$

$$\left[D_y^l v\right]_{\overline{D}_T}^{*(\delta,\beta)}=\sup_{\overline{D}_T}\rho^{l+\delta-s_1}(1+\rho^{s_2})\frac{|D_y^l v(y,t)-D_x^l v(x,t)+D_y^l v(x,\tau)-D_y^l v(y,\tau)|}{|x-y|^{\delta}|t-\tau|^{\beta}}.$$

Будем говорить, что функция $v(y,t)\in P_{s_1,s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$, если конечна следующая норма

$$\|v\|_{P_{s_1,s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)}=\sum_{l=0}^{k}(\sup_{\overline{D}_T}\rho^{l-s_1}(y)(1+\rho^{s_2}(y))|D_y^l v|+\left\langle D_y^l v\right\rangle_{y,\overline{D}_T}^{*(\alpha)}+$$

$$+\left\langle D_y^l v\right\rangle_{t,\overline{D}_T}^{*(\beta)}+\left[D_y^l v\right]_{\overline{D}_T}^{*(\delta,\beta)}),\qquad (3)$$

здесь $k\geq 0$ - целое число. В случае, когда $s_2=0$, пространства $P_{s_1,s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ совпадают с пространствами $E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$, введенными в работе [7]. Отметим, что в случае, когда область D является бесконечным углом, например, $D=G$, $(\rho(x)=r(x),\rho=r)$, можно дать эквивалентное определение пространств $E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$, используя обычные классы Гельдера $C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ со следующей нормой:

$$\|u\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)}=\sum_{l=0}^{k}(\sup_{\overline{D}_T}|D_y^l u|+\left\langle D_y^l u\right\rangle_{y,\overline{D}_T}^{(\alpha)}+\left\langle D_y^l u\right\rangle_{t,\overline{D}_T}^{(\beta)}+\left[D_y^l u\right]_{\overline{D}_T}^{(\delta,\beta)}),$$

где $\langle u\rangle_{y,\overline{D}_T}^{(\alpha)}$, $\langle u\rangle_{t,\overline{D}_T}^{(\beta)}$ — постоянные Гельдера относительно переменных y и t , соответственно, а $[u]_{\overline{D}_T}^{(\delta,\beta)}$ -полунорма, введенная в работе [8]. Эта полунорма отличается от весовой полунормы $[u]_{\overline{D}_T}^{*(\delta,\beta)}$ из (2) отсутствием множителя $r^{\delta-s_1}(1+r^{s_2})$.

Введем в G систему координат (x_1,x_2) :

$$r=e^{-x_1},\qquad \varphi=x_2. \tag{4}$$

Заметим, что такое преобразование координат является стандартным при исследовании краевых задач для эллиптических уравнений в областях с углами (см., например,[9]). При замене (4) угол G перейдет в полосу $B=\{(x_1,x_2):x_2\in(-\frac{\omega}{2},0),x_1\in R^1\}$, а образом границы g будет $b=\{(x_1,x_2):x_2<-\frac{\omega}{2},x_1\in R^1\}$.

Функция $v(y,t)\in E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)$, если $u(x,t)=e^{s_1x_1}v(y(x),t)\in C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{B}_T)$. Задача (1) изучается в пространствах $P_{s_1,s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}$, классы $E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}$ и $C^{k+\alpha,\beta,\delta}$ используются для получения промежуточных оценок. Отметим, что такой выбор пространтсв связан с методом исследования задачи (1), который предполагает как изучение граничной задачи для уравнения Лапласа, данные которой зависят от времени, так и рассмотрение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности со смешанными граничными условиями. Обе задачи рассматриваются в плоском угле G , что и индуцирует введение весовых пространств. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, устанавливающие связь между пространствами $P_{s_1,s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}$, $E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}$.

Предложение 1. *Пусть $\alpha,\beta,\delta\in(0,1)$, $k\geq 0-$ целое и заданы некоторые действительные числа s_1, s_2, a, b, удовлетворяющие неравенству: $0\leq s_2\leq a-b\ \leq a\leq s_1$, тогда существуют положительные постоянные c_i, $i=\overline{1,4}$, такие, что выполняются следующие соотношения:*

$$\|v\|_{E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}+\|v\|_{E_{s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}\geq c_1\,\|v|_{P_{a,b}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)};$$

$$c_2\,\|v\|_{P_{s_1,s_1-s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}\leq\|v\|_{E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}+\|v\|_{E_{s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}\leq c_3\,\|v\|_{P_{s_1,s_1-s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}; \tag{5}$$

$$\|v\|_{P_{s_1,s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}\leq c_4\,\|v\|_{P_{s_1+1,s_2+1}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)}. \tag{6}$$

Доказательство предложения 1 следует непосредственно из определения (3) норм в пространствах $E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}$ и $P_{s_1,s_2}^{k+\alpha,\beta,\delta}$.

Обозначим $\varkappa=\frac{\pi}{\omega}-2-\varepsilon$, $\varepsilon\in(0,1)$ и положим $s_1=\varkappa-1$, $s_2=\frac{\varkappa-1}{2}$, тогда справедлив следующий результат для задачи (1).

Теорема 1. *Пусть угол $\omega\in(0,\pi/3),\alpha\in(0,1)$, $f_0(y,t)\in P_{s_1,s_2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)$, $f(y,t)\in P_{s_1+1,s_2}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{g}_T)$, тогда найдется такое T, что существует единственное решение задачи (1) в $\overline{G}_T$, для которого имеет место следующая оценка:*

$$\|u\|_{P_{s_1+2,s_2}^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)}+\|u_t\|_{P_{s_1,s_2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)}+\|u_t\|_{P_{s_1+1,s_2}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{g}_T)}\leq$$
$$c(T)(\|f_0\|_{P_{s_1,s_2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)}+\|f\|_{P_{s_1+1,s_2}^{1+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{g}_T)}). \tag{7}$$

Представление для решения задачи (1) и вспомогательные оценки. Решение задачи (1) будем искать в виде

$$u(y,t)=v(y,t)+w(y,t), \tag{8}$$

где $w(y,t)$ и $v(y,t)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{gathered}
\Delta_y v=0, \qquad (y,t)\in G_T; \qquad v_n|_{y_2=0}=0;\\
v_t+v_n+hv_r=f(y,t)-w_n\equiv F(y,t),\ (y,t)\in g_T;\\
v(y,0)=0,\ v_t(y,0)=0, \quad y\in\overline{G};
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
w_t-\Delta_y w=f_0(y,t)-v_t\equiv F_0(y,t), \qquad (y,t)\in G_T;\\
w_n|_{y_2=0}=0; \quad w(y,t)=0,\ (y,t)\in g_T;\\
w(y,0)=0,\ w_t(y,0)=0, \quad y\in\overline{G}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Задача типа (9) в весовых пространствах $E_{s_1}^{k+\alpha,\beta,\delta}$ изучалась ранее в работах [7,10]. Применение здесь тех же методов позволяет получить следующий результат

Теорема 2. *Пусть* $\omega\in(0,\frac{\pi}{2})$, *числа* $\alpha,\beta\in(0,1)$, $s\in(0,\varkappa-1]$, $F(y,0)=0$, $F\in E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)$, *тогда существует единственное решение задачи (9), для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)}+\|v_t\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)}\le c_1\|F\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)}; \tag{11}$$

если же $s_1=\varkappa-1$, $s_2=\frac{\varkappa-1}{2}$ *и* $F(y,t)\in P_{s_1+1,s_2}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)$, *то решение задачи (9) удовлетворяет неравенству*

$$\|v\|_{P_{s_1+2,s_2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)}+\|v_t\|_{P_{s_1+1,s_2}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)}\le c_2\|F\|_{P_{s_1+1,s_2}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)}. \tag{12}$$

Схема доказательства теоремы 2 состоит в следующем. С помощью преобразования координат (4) задачу (9) сведем к задаче в полосе B. Далее, совершая преобразование Фурье-Лапласа по переменным x_1 и t, соответсвенно, изучение задачи (9) сводится к исследованию функционального уравнения:

$$\sigma\widehat{v}(\lambda-i,-\frac{\omega}{2},\sigma)+\lambda\widehat{v}(\lambda,-\frac{\omega}{2},\sigma)[\tanh\frac{\lambda\omega}{2}+ih]=\widehat{F}(\lambda-i,\sigma),$$

здесь λ, σ - парметры преобразования Фурье и Лапласа по переменным x_1 и t, соответственно; $\widehat{v}$ $(\lambda,\ x_2,\sigma)$ и $\widehat{F}(\lambda,\sigma)$ - образы функций $v(x_1,x_2,t)$ и $F(x_1,t)$ при указанном выше преобразовании.

Пусть $\lambda=-ip$, $\theta=\frac{\pi-\omega}{2}$, $L(p)=\Gamma(p)A(p)\sin p\pi$;

$$A(p)=(\frac{\omega\tan\theta}{2\theta})^{p-1/2}\Gamma(p+\frac{2\beta}{\omega})\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma_n+p)\Gamma(1+\alpha_n-p)}{\Gamma(\alpha_n+p)\Gamma(1+\rho_n-p)}(\frac{\alpha_n^2}{\rho_n\gamma_n})^{p-1/2}\times$$

$$\exp\{\rho_n(\ln\rho_n-1)+\gamma_n(1-\ln\gamma_n)\};$$

$$\gamma_n=\frac{n\pi+\theta}{\omega/2}, \quad \rho_n=\frac{n\pi-\theta}{\omega/2},\alpha_n=\frac{\pi(2n-1)}{\omega},$$

тогда $v(x_1, -\frac{\omega}{2}, t)$ можно представить в виде:

$$v(x_1, -\frac{\omega}{2}, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\delta}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x_1 - \xi, \tau) e^{-(\delta+1)(x_1-\xi)} B(x_1, \xi, t-\tau) d\xi,$$

где

$$B(x, \xi, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-iyq(t,x)}}{\Gamma(\delta - iy) \sin \pi(\delta - iy)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{L(i\lambda) e^{i\xi(\lambda+y)}}{L(1-\delta+i(\lambda+y)) \sin \pi(\delta - iy)};$$

$q(t,x) = \ln t + x, \;\; \delta \in [0,1), \;\; Im(\lambda) \in (-\delta, \frac{\pi}{\omega} - 1 - \delta).$

Лемма 1. *Функция $B(x,\xi,t)$ удовлетворяет неравенствам:*
1)

$$\left| \frac{\partial^k B(x,\xi,t)}{\partial x^k} \right| \le m_1 e^{-a|\xi|} [1 + 1/|\xi|^\delta], \; k = 0,1, \delta > 0;$$

$$\frac{\partial^2 B(x,\xi,t)}{\partial x^2} = e^{-a|\xi|}[1 + 1/\xi] \frac{m(x,\xi,t)}{(iq(t,x)+b)^2}, \; \delta = 0,$$

для $\forall\, (x,\xi) \in R^2, \; t \in [0,T]$; $a, b-$ положительные постоянные: $a \in (-\delta, \frac{\pi}{\omega} - 1 - \delta)$, $b \in (0, -\arctan \frac{1}{h})$; функции $m(x,\xi,t), m_x(x,\xi,t)$, $m_\xi(x,\xi,t)$ являются непрерывными равномерно ограниченными по совокупности переменных, $|m_t(x,\xi,t)| \le m_2/t, m_2$ - положительная постоянная.
2)

$$\frac{\partial^2 B(x_1,\xi,t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 B(x_2,\xi,t)}{\partial x_2^2} = e^{-a|\xi|}[1+1/\xi] \frac{(x_1 - x_2) m_3(\overline{x},\xi,t)}{(iq(t,\overline{x})+b)^2},$$

$$\overline{x} \in (x_1, x_2), \forall\, \xi \in R^1, \; t \in [0,T];$$

$$\frac{\partial^2 B(x,\xi_1,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B(x,\xi_2,t)}{\partial x^2} = (\xi_1 - \xi_2)[m_4(x,\overline{\xi},t) + 1/\overline{\xi}] B(x,\overline{\xi},t),$$

$$\overline{\xi} \in (\xi_1,\xi_2), \forall\, x \in R^1, t \in [0,T];$$

$$\frac{\partial^2 B(x,\xi,t_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B(x,\xi,t_2)}{\partial x^2} = \frac{(t_1 - t_2) m_5(x,\xi,\overline{t})}{\overline{t}} B(x,\xi,\overline{t}),$$

$$\forall\, (x,\xi) \in R^2, \overline{t} \in (t_1,t_2),$$

здесь функции $m_i(x,\xi,t), i = \overline{3,5}$ - ограниченные и непрерывные по совокупности переменных вместе со своими производными первого порядка по x и ξ.

Справедливость неравенства (11) доказывается с помощью леммы 1, используя метод получения оценок тепловых потенциалов из работы [11, глава 4]. Далее, полагая в неравенстве (11) $s = \varkappa - 1$, а затем $s = \frac{\varkappa - 1}{2}$, и применяя неравенство (5),получим оценку (12), это и завершает доказательство теоремы 2.

Рассмотрим теперь задачу (10). Справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\omega \in (0,2\pi)$ *и* $s \in [-2-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}-1]$, $F_0(y,t) \in E_s^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)$, $F_0(y,0)=0$, *тогда существует единственное решение задачи (10), для которого справедлива оценка*

$$\|w\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)} + \|w_t\|_{E_s^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)} \le c_1 \|F_0\|_{E_s^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)}; \tag{13}$$

если же $s_1 = \varkappa - 1$, $s_2 = \frac{\varkappa-1}{2}$ *и* $F_0(y,t) \in P_{s_1,s_2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)$, *тогда для решения задачи (10) выполняется неравенство*

$$\|w\|_{P_{s_1+2,s_2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)} + \|w_t\|_{P_{s_1,s_2}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)} \le c_2 \|F_0\|_{P_{s_1,s_2}^{\alpha,\alpha,\alpha}(\overline{G}_T)}. \tag{14}$$

Заметим, что оценка (14) будет следовать из неравенств (13) и (5). Основные моменты доказательства оценки (13) состоят в построении явного вида решения, а затем в получении соответствующих оценок весовых полунорм. Решение задачи (10) можно представить в виде:

$$w(r,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(r,t)\cos\sqrt{\lambda_k}\varphi,$$

где $\lambda_k = \frac{\pi^2(1+2k)^2}{\omega^2}$, $k=0,1,2...$, а функция $V_k(r,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_k}{\partial r} + \frac{\lambda_k}{r}V_k = F_{0k}(r,t),\ (r,t)\in(0,\infty)\times(0,T);$$
$$V_k(r,0)=0, \quad r\in(0,\infty), \quad k=0,1,2... \tag{15}$$

Обозначим через $\widetilde{V}_k(\nu,t)$ и $\widetilde{F}_{0k}(\nu,t)$ преобразование Ганкеля (см.,например,[12, глава 8]) по переменной r функций $V_k(r,t)$ и $F_{0k}(r,t)$, соответственно, здесь ν - параметр указанного преобразования. Из соотношений (15) получим

$$\widetilde{V}_k(\nu,t) = \int_0^t e^{-\nu^2(t-\tau)}\widetilde{F}_{0k}(\nu,t)d\tau.$$

Из этого выражения следует, что решение задачи (10) можно представить в виде

$$w(r,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{0} d\phi \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} dz F_0(z,t-\tau)\frac{z}{2\tau}e^{-\frac{r^2+z^2}{4\tau}} \times$$
$$I_{\sqrt{\lambda_k}}\left(\frac{rz}{2\tau}\right)\cos\sqrt{\lambda_k}\phi\cos\sqrt{\lambda_k}\varphi, \tag{16}$$

где $I_\mu(x)-$ функция Бесселя первого рода [13].

Предложение 2. *Пусть заданы некоторые действительные числа* b,c,d,m, *и выполняются следующие соотношения* $(2d-2b+c)>0$, $(c+1)>0$. *Тогда для величины* $J(d,b,c,m) = \int_0^t d\tau\tau^{-d}\int_0^{+\infty} dx r^m(\frac{2\tau}{r^2})^b x^c \exp(\frac{-r^2}{4\tau} - \frac{x^2\tau}{r^2} + x)$ *имеет место неравенство:*

$$|J(d,b,c,m)| \le \frac{\sqrt{\pi}2^{-(c+2d-b+\frac{1}{2})}\Gamma(c+1)\Gamma(c+2d-2b)}{\Gamma(c+d-b+\frac{1}{2})}r^{m-2d+2}$$

Оценка (13) получается с помощью результатов предложения 2 и асимптотических представлений функций Бесселя (см.[13, глава 7]).

Доказательство теоремы 1. Из результатов теорем 2 и 3 будет следовать справедливость утверждений, сформулированных в теореме 1. А именно, подставим в правые части неравенств (11)-(14) явный вид выражений для $F(y,t)$ и $F_0(y,t)$. Затем, используя интерполяционные неравенства и граничное условие на $\overline{g}_T$ из (10), для каждого $t \in [0,T]$ получим следующее соотношение:

$$\|v_t\|_{P^{\alpha}_{s_1,s_2}(\overline{G})} \leq (\varepsilon + c(\varepsilon)T)\{\|v_t\|_{P^{1+\alpha}_{s_1+1,s_2}(\overline{G})} + \|v\|_{P^{2+\alpha}_{s_1+2,s_2}(\overline{G})} + \|w\|_{P^{2+\alpha}_{s_1+2,s_2}(\overline{G})} +$$

$$+ \|w_t\|_{P^{\alpha}_{s_1,s_2}(\overline{G})}\} + c\{\|f\|_{P^{1+\alpha}_{s_1+1,s_2}(\overline{g})} + \|f_0\|_{P^{\alpha}_{s_1,s_2}(\overline{G})}\}.$$

Далее из этой оценки и неравенств (12),(14) и (5),(6) следует, что

$$\|v_t\|_{P^{1+\alpha}_{s_1+1,s_2}(\overline{G})} + \|v\|_{P^{2+\alpha}_{s_1+2,s_2}(\overline{G})} + \|w\|_{P^{2+\alpha}_{s_1+2,s_2}(\overline{G})} + \|w_t\|_{P^{\alpha}_{s_1,s_2}(\overline{G})}$$

$$\leq c(T)(\|f\|_{P^{1+\alpha}_{s_1+1,s_2}(\overline{g})} + \|f_0\|_{P^{\alpha}_{s_1,s_2}(\overline{G})}). \tag{17}$$

Для получения соответсвующей гладкости функций $v(y,t)$ и $w(y,t)$ по t заметим, что функции $W(y,t,\Delta t) = w(y,t+\Delta t) - w(y,t)$ и $V(y,t,\Delta t) = v(y,t+\Delta t) - v(y,t)$ удовлетворяют соотношениям (9) и (10) с правыми частями вида: $F_0^*(y,t,\Delta t) = F_0(y,t+\Delta t) - F_0(y,t)$ и $F^*(y,t,\Delta t) = F(y,t+\Delta t) - F(y,t)$, соответсвенно. Так же как это было сделано раньше можно показать, что функции $W(y,t,\Delta t)$ и $V(y,t,\Delta t)$ удовлетворяют неравенству (17), в правых чатсях которого будут стоять нормы функций $\{f_0(y,t+\Delta t) - f_0(y,t)\}$ и $\{f(y,t+\Delta t) - f(y,t)\}$. Далее, используя свойства гладкости функций $f_0(y,t)$ и $f(y,t)$, получим оценку

$$\|v_t\|_{P^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s_1+1,s_2}(\overline{G}_T)} + \|v\|_{P^{2+\alpha,\alpha,\alpha}_{s_1+2,s_2}(\overline{G}_T)} + \|w\|_{P^{2+\alpha,\alpha,\alpha}_{s_1+2,s_2}(\overline{G}_T)} + \|w_t\|_{P^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s_1,s_2}(\overline{G}_T)}$$

$$\leq c(T)\{\|f\|_{P^{1+\alpha,\alpha,\alpha}_{s_1+1,s_2}(\overline{g}_T)} + \|f_0\|_{P^{\alpha,\alpha,\alpha}_{s_1,s_2}(\overline{G}_T)}\}.$$

Из этого неравенства и представления (8) для решения задачи (1) следует оценка (7), что и завершает доказательство теоремы 1.

Работа частично поддержана проектом НАН Украины "Разработка и исследование математических моделей процессов тепломассопереноса и их использование для усовершенствования управления теплоэнергетическим оборудованием"

Список литературы

1. Мейрманов А.М., *Задача Стефана*, Новосибирск:Наука, 1986.
2. Данилюк И.И., *О задаче Стефана*, Успехи мат.наук **40,** (1985), №5, 133-185.
3. Базалий Б.В., *Задача Стефана*, Докл. АНУССР **Серия А,** (1998), №11, 3-7.
4. Шмарев С.И., *Автомодельная многомерная задача Стефана*, Динамика сплошной среды (1986), №74, 126-147.
5. Фролова Е.В., *Об одной нестационарной задаче в двугранном угле 1*, Записки научных семинаров ЛОМИ **188,** (1991), №22, 158-177.
6. Солонников В.А., Фролова Е.В., *Об одной нестационарной задаче в двугранном угле 2*, Записки научных семинаров ЛОМИ **188,** (1991), №22, 178-185.
7. Базалий Б.В., Васильева Н.В., *О разрешимости модельной задачи Hele-Shaw в весовых пространствах Гельдера в плоском угле*, УМЖ **52,** (2000), №11, 1446-1457.

8. Солонников В.А., *О разрешимости второй начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса*, Записки научных семинаров ЛОМИ **69** (1977), 200-218.
9. Grisvard P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, 1985.
10. Bazaliy B.V., Vasylyeva N.V., *Estimates of solutions of Hele-Shaw model problems in nonsmooth domains*, Preprint, Donetsk IAMM NASU 99.05 (1999).
11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М: Наука, 1967.
12. Корн Г., Корн Т., *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, М: Наука, 1973.
13. Ватсон Г.Н., *Теория Бесселевых функций*, М.:ИЛ, 1949.

Институт прикладной математики и механики,
ул. Р.Люксембург 74,
83114, Донецк, Украина