ПОВЕДЕНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ТРОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ВБЛИЗИ РЕБРА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

© М. Борсук

Ольштын, Польша

Резюме. Мы исследуем поведение слабых решений краевых задач для уравнений, для которых модельным служит уравнение

$$-\frac{d}{dx_i}(r^\tau |u|^q |\nabla u|^{m-2} u_{x_i}) + a_0 r^{\tau-m} u|u|^{q+m-2} - \mu r^\tau |u|^{q-1} |\nabla u|^m \operatorname{sgn} u = f(x), \qquad (\text{МУ})$$
$$r^2 = x_{n-1}^2 + x_n^2; \quad n \geq 3, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad q \geq 0, \quad m > 1, \quad a_0 \geq 0, \quad \tau \geq m-2,$$

в окрестности ребра на границе области. Мы устанавливаем почти точный показатель скорости убывания решения.

Мы изучаем поведение слабых решений $u \in V$ краевых задач для эллиптических квазилинейных **вырождающихся** уравнений второго порядка в окрестности ребра границы области

$$\int_G \{a_i(x, u, u_x)\phi_{x_i} + a_0 a(x, u, u_x)\phi + b(x, u, u_x)\phi\} \, dx = \qquad (BVP)$$
$$= \int_G f(x)\phi dx + \int_{\Gamma_2} \{g(x) - \sigma(x, u)\} \phi ds \quad \forall \phi \in V.$$

Краевые задачи для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в гладких областях недавно начали интенсивно исследоваться. Менее изучены такие краевые задачи в негладких областях. Мы укажем лишь на работы [1 -3, 5], относящиеся к изучению поведения слабых решений в окрестности конической граничной точки для специальных классов уравнений. В работе [4] исследовалась задача Дирихле для модельного уравнения (МУ) в области с ребром на границе. Данная работа является развитием работы [4].

Пусть $G-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ограниченная $(n-1)-$ мерным многообразием ∂G и пусть Γ_1, Γ_2- открытые непустые подмногообразия многообразия ∂G, обладающие следующими свойствами: $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\partial G = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$, причём $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ является $(n-2)-$ мерным подмногообразием, содержащим ребро $\Gamma_0 \subseteq \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$. Зафиксируем разбиение множества $\{0, 1, 2\}$ на два подмножества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{D}$. Объединение подмногообразий Γ_j с $j \in \mathcal{D}$ составляет ту часть границы, на которой мы задаём краевые условия Дирихле, а с $j \in \mathcal{N}$ - условие Неймана или третье краевое условие. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $\{0,1\} \in \mathcal{D}$. Если $2 \in \mathcal{D}$, то наша задача является задачей Дирихле; если $2 \in \mathcal{N}$, то задача является смешанной. Для точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ определим цилиндрические координаты $(\overline{x}, r, \omega)$: $\overline{x} = (x_1, \dots, x_{n-2}), r = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}, \quad \omega = \operatorname{arctg}\frac{x_{n-1}}{x_n}$. Для достаточно малого $d > 0$ определим также множества:

$$G_0^d = G \cap \{(\overline{x}, r, \omega) |\, \overline{x} \in \mathbb{R}^{n-2},\, 0 < r < d,\, \omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)\}; \quad 0 < \omega_0 < 2\pi;$$
$$\Gamma_j^d = \Gamma_j \cap \overline{G_0^d} \subset \partial G_0^d, \quad j = 0, 1, 2;$$
$$\Omega_d = G \cap \{(\overline{x}, r, \omega) |\, \overline{x} \in \mathbb{R}^{n-2},\, r = d,\, \omega \in [-\omega_0/2, \omega_0/2]\} \subset \partial G_0^d.$$

Предполагается, что:

1) $\partial G \setminus \Gamma_0$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$;

2) существует число $d > 0$ такое, что

$$\Gamma_0^d = \{(\overline{x}, 0, 0) |\, |\overline{x}| < d\} \subset \Gamma_0$$

является прямым ребром с серединой в начале координат;

3) G_0^d локально диффеоморфно двугранному углу

$$\mathbb{D}_d = \{(r, \omega) \big| 0 < r < d,\, \omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)\} \times \mathbb{R}^{n-2};\ 0 < \omega_0 < 2\pi;$$

таким образом, предполагается, что $G_0^d \subset G$ и, следовательно, область G является *"клином"* в некоторой окрестности ребра.

4) $\qquad \omega\,|_{\Gamma_1} = -\omega_0/2; \qquad \omega\,|_{\Gamma_2} = \omega_0/2.$

Пусть $L_m(G)$ и $W^{k,m}(G), m > 1$ - обычные пространства Лебега и Соболева соответственно. Через $\mathfrak{N}_{m,q}^1(\nu, \nu_0, G)$ обозначим множество функций $u(x) \in L_\infty(G)$, обладающих слабыми производными первого порядка с конечным интегралом

$$\int\limits_G \left(\nu(x)|u|^q|\nabla u|^m + \nu_0(x)|u|^{q+m}\right) dx < \infty,\ q \geq 0,$$

где $\nu_0(x)$ и $\nu(x)$ - две неотрицательные измеримые в G функции, такие что

$$\begin{gathered} \nu_0^{-1}(x) \in L_t(G),\ \nu^{-1}(x) \in L_t(G);\ \nu_0(x) \in L_s(G), \qquad \frac{1}{s} + \frac{1}{t} < \frac{m}{n};\ n > m > 1; \\ 1 + \frac{1}{t} < m < n\left(1 + \frac{1}{t}\right), \quad t > \max(n, \frac{n}{m-1}). \end{gathered} \tag{1}$$

Если $X(G)$ - одно из пространств, то через $X(G, \Gamma)\, \forall \Gamma \subseteq \partial G$ обозначаем подмножество функций $u(x) \in X(G)$, обращающихся в нуль на Γ в смысле следов. Наконец, определим **пространство** V :

$$V := \begin{cases} \mathfrak{N}_{m,q}^1(\nu, \nu_0, G, \partial G), & \text{если (BVP) - задача Дирихле;} \\ \mathfrak{N}_{m,q}^1(\nu, \nu_0, G, \partial G \setminus \Gamma_2), & \text{если (BVP) - смешанная задача.} \end{cases}$$

Положим также: $V_0 = V$ для $q = 0$.

Мы получаем **почти точную** оценку в окрестности ребра Γ_0 для модуля слабого решения $u(x)$ задачи (BVP). Относительно нашей задачи будем **предполагать следующее:**

Пусть заданы числа $1 < m < n$, $l > n$, $q \geq 0$, $0 \leq \mu < 1$ *и неотрицательные функции* $\alpha(x), \alpha_0(x), b_0(x)$.

1) $f(x), \alpha(x), \alpha_0(x), b_0(x), g(x)$ - *измеримые функции такие, что:*

$$\nu_0^{-1}(x)\big(\alpha_0(x) + b_0(x) + f(x)\big) \in L_p(G); \quad \alpha(x) \in L_{m'}(G); \quad g(x) \in L_\alpha(\Gamma_2);$$
$$\frac{1}{p} < \frac{m}{n} - \frac{1}{t} - \frac{1}{s}, \quad \alpha > \frac{n-1}{m-1-\frac{n}{t}}, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1.$$

$a_i(x,u,\xi)$, $i = 1,\dots,n$; $a(x,u,\xi), b(x,u,\xi), \sigma(x,u)$ - *функции Каратеодори:* $G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *обладающие свойствами:*

2) $a_i(x,u,\xi)\xi_i \geq \nu(x)|u|^q|\xi|^m - \alpha_0(x)$; $a(x,u,\xi)u \geq \nu_0(x)|u|^{q+m}$; $\sigma(x,u)\cdot sgn\ u \geq 0$;

3) $|b(x,u,\xi)| \leq \mu\nu(x)|u|^{q-1}|\xi|^m + b_0(x)$;

4) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2(x,u,\xi)} \leq \nu(x)|u|^q|\xi|^{m-1} + \nu^{\frac{1}{m}}(x)\nu_0^{1/m'}(x)|u|^{q+m-1} + \alpha(x)\nu^{\frac{1}{m}}(x)$;

5) $|a(x,u,\xi)| \leq \nu^{\frac{1}{m'}}(x)\nu_0^{1/m}(x)|u|^q|\xi|^{m-1} + \nu_0(x)|u|^{q+m-1} + \alpha(x)\nu_0^{1/m}(x)|u|^q$;

6) $\int\limits_{\Gamma_2} |\sigma(x,u)|ds < \infty \quad \forall u \in L_\infty(G \cup \Gamma_2)$.

В начале с помощью техники $u-$ уровневых множеств Стампаккьи мы получаем $L_\infty(G)-$ априорную оценку слабых решений:

Теорема 1. *Пусть $u(x)-$ слабое решение задачи (BVP) и пусть выполнены предположения (1),* **1) - 6)**. *Тогда существует такая постоянная $M_0 > 0$, зависящая лишь от* $||g||_{L_\alpha(\Gamma_2)}, ||\nu^{-1}(x), \nu_0^{-1}(x)||_{L_t(G)}, \left\|\nu_0^{-1}(x)\big(\alpha_0(x)+b_0(x)+|f(x)|\big)\right\|_{L_p(G)}$, $mes\ G, \omega_0, n, m, \mu, q, p, t, s, a_0$ *и независящая от $u(x)$, что*

$$||u||_{L_\infty(G)} \leq M_0.$$

Дополнительно предполагаем: *функции* $a_i(x,u,\xi)$, $a(x,u,\xi)$, $b(x,u,\xi)$, $\sigma(x,u)-$ *непрерывно дифференцируемы по переменным* x, u, ξ *на множестве* $\mathfrak{M}_{d,M_0} = \overline{G_0^d} \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют в* $\mathfrak{M}_{d,M_0}$ *следующим соотношениям:*

7) $(m-1)u\frac{\partial a_i(x,u,\xi)}{\partial u} = q\frac{\partial a_i(x,u,\xi)}{\partial \xi_j}\xi_j$; $i = 1,\dots,n$;

8) $\frac{\partial a_i(x,u,\xi)}{\partial \xi_j}p_ip_j \geq \gamma_{m,q}\nu(x)|u|^q|\xi|^{m-2}p^2$, $\forall p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

9) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \left|\frac{\partial b(x,u,\xi)}{\partial \xi_i}\right|^2} \leq \nu(x)|u|^{q-1}|\xi|^{m-1}$;

10) $\frac{\partial b(x,u,\xi)}{\partial u} \geq \nu(x)|u|^{q-2}|\xi|^m$; $\quad \frac{\partial a(x,u,\xi)}{\partial u} \geq \gamma_{m,q}\nu_0(x)|u|^{q+m-2}$; $\quad \frac{\partial \sigma(x,u)}{\partial u} \geq 0$;

11) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \left|a_i(x,u,\xi) - r^\tau|u|^q|\xi|^{m-2}\xi_i\right|^2} \leq c_1(r)r^\tau|u|^q|\xi|^{m-1} + \psi_1(r)$;

12) $\left|\frac{\partial a_i(x,u,\xi)}{\partial \xi_j} - r^\tau |u|^q |\xi|^{m-4}\left(\delta_i^j |\xi|^2 + (m-2)\xi_i\xi_j\right)\right| \le c_2(r) r^\tau |u|^q |\xi|^{m-2} +$
$+ c_2(r)\psi_2(r)|u|^{\frac{q}{m-1}}$;

13) $\left|\frac{\partial a_i(x,u,\xi)}{\partial x_i} - \tau r^{\tau-2}|u|^q|\xi|^{m-2}x_i\xi_i\right| \le c_3(r) r^{\tau-1}|u|^q|\xi|^{m-1} + \psi_3(r)$;

14) $\left|a(x,u,\xi) - r^{\tau-m}u|u|^{q+m-2}\right| + \left|b(x,u,\xi) + \mu r^\tau u|u|^{q-2}|\xi|^m\right| \le$
$\le c_4(r) r^{\varkappa}|u|^q|\xi|^{m-1} + |u|^q\psi_4(r)$,

где $\gamma_{m,q} > 0$, $c_i(r)-$ *неотрицательные непрерывные в нуле функции с* $c_i(0) = 0$; *кроме того пусть существуют числа* $k_i \ge 0$ *такие, что* $\psi_i(r) \le k_i r^{\beta_i}$, $i = 1, ..., 4$;

$$\beta_1 = \frac{l(n-1) - n(m-1)}{l(n-m)}\tau - \frac{2}{l}(m-1) + \lambda(q+m-1);$$

$$\beta_2 = \tau - m + 2 + \lambda(q+m-1)\frac{m-2}{m-1}; \quad \beta_3 = \tau - m + \lambda(q+m-1);$$

$$\beta_4 = \frac{(l-m)n}{l(n-m)}\tau - \frac{2}{l}m + \lambda(m-1), \quad \varkappa = \frac{l(n-m+1)-n}{l(n-m)}\tau - \frac{2}{l} + \varepsilon, \ \forall\varepsilon > 0.$$

Замечание. Наши предположения **11) - 14)** по существу означают, что коэффициенты задачи (BVP) вблизи ребра Γ_0 аппроксимируются по непрерывности коэффициентами модельного уравнения $(MУ)$.

Определим теперь число

$$\theta_0 := \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_0, & \text{для задачи Дирихле;} \\ \omega_0, & \text{для смешанной задачи,} \end{cases}$$

и пусть λ является *наименьшим положительным* решением уравнения

$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\left[(m-1)y^2 + \lambda^2\right](y^2+\lambda^2)^{\frac{m-4}{2}} dy}{(m-1+q+\mu)(y^2+\lambda^2)^{\frac{m}{2}} + \lambda(2-m+\tau)(y^2+\lambda^2)^{\frac{m-2}{2}} - a_0} = \theta_0, \\ \lambda^m(q+m-1+\mu) + \lambda^{m-1}(2-m+\tau) > a_0. \end{cases} \qquad (2)$$

Наше основное утверждение заключается в следующей теореме:

Основная теорема. *Пусть* $u(x)-$ *слабое решение задачи* (BVP). *Пусть выполнены вышеуказанные предположения при* $m \ge 2$. *Пусть существуют неотрицательные постоянные* f_1, g_1 *такие, что*

$$|f(x) \le f_1 r^{\tau-m+\lambda(q+m-1)}, \ x \in G_0^d;$$
$$|g(x)| \le g_1 r^{\tau-m+1+\lambda(q+m-1)}, \ x \in \Gamma_2 \cap \overline{G_0^d}. \qquad (3)$$

Тогда для $\forall\varepsilon > 0$ существует постоянная $c_\varepsilon > 0$, зависящая лишь от параметров и норм функций, фигурирующих в сделанных предположениях, и независящая от решения $u(x)$, такая что

$$|u(x)| \le c_\varepsilon r^{\lambda-\varepsilon}. \tag{4}$$

Основная теорема доказывается путём применения барьерной техники и слабого принципа сравнения, специально доказываемого для задачи (BVP). Последний обобщает известные результаты для задачи Дирихле (см., напр., [5]).
Рассмотрим квазилинейный вырождающийся оператор второго порядка Q вида:

$$Q(v,\phi) \equiv \int\limits_G \Big\langle \mathcal{A}_i(x,v_x)\phi_{x_i} + \mathcal{A}(x,v)\phi + \mathcal{B}(x,v,v_x)\phi -$$

$$- f(x)\phi\Big\rangle dx + \int\limits_{\Gamma_2} \Big\langle \Sigma(x,v) - g(x)\Big\rangle \phi ds$$

для $v \in V_0$ и всех неотрицательных $\phi \in V_0$ при следующих предроложениях: *функции $f(x), g(x)-$ суммируемы на G и Γ_2 соответственно; функции $\mathcal{A}(x,v)$, $\mathcal{B}(x,v,\eta), \mathcal{A}_i(x,\eta), \Sigma(x,v)-$ непрерывно дифференцируемы по переменным v,η на множестве $\mathfrak{M} = \overline{G}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют на $\mathfrak{M}$ неравенствам:*

(i) $\frac{\partial\mathcal{A}_i(x,\eta)}{\partial\eta_j}p_ip_j \ge \gamma_m\nu(x)|\eta|^{m-2}p^2,\ \forall p\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$;

(ii) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n\left|\frac{\partial\mathcal{B}(x,v,\eta)}{\partial\eta_i}\right|^2} \le \nu(x)|v|^{-1}|\eta|^{m-1}$;

(iii) $\frac{\partial\mathcal{B}(x,v,\eta)}{\partial v} \ge \nu(x)|v|^{-2}|\eta|^m$; $\quad \frac{\partial\mathcal{A}(x,v)}{\partial v} \ge \gamma_m\nu_0(x)|v|^{m-2}$; $\quad \frac{\partial\Sigma(x,v)}{\partial v} \ge 0$;

здесь: $m > 1$; $\gamma_m > 0$; $\nu_0(x), \nu(x)-$ функции, определнные посредством (1).

Принцип сравнения.
Пусть оператор Q удовлетворяет предположениям (i) - (iii). Пусть функции $v, w \in V_0$ удовлетворяют неравенству

$$Q(v,\phi) \le Q(w,\phi)$$

для всех неотрицательных $\phi \in V_0$. Пусть, кроме того, выполнено в слабом смысле неравенство

$$v(x) \le w(x) \text{ на } \partial G\setminus\Gamma_2.$$

Тогда

$$v(x) \le w(x) \text{ почти всюду в } G. \tag{5}$$

Доказательство. Определим функции $z = v - w$; $v^t = tv + (1-t)w$, $t \in [0,1]$. Тогда получим:

$$0 \geq Q(v,\phi) - Q(w,\phi) = \int\limits_{\Omega} \Big\langle \phi_{x_i} z_{x_j} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, v_x^t)}{\partial v_{x_j}^t} dt + z\phi \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{A}(x, v^t)}{\partial v^t} dt + \tag{6}$$
$$+ \phi z_{x_i} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{B}(x, v^t, v_x^t)}{\partial v_{x_i}^t} dt + \phi z \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{B}(x, v^t, v_x^t)}{\partial v^t} dt \Big\rangle dx + \int\limits_{\partial_2 \Omega} \phi z \int_0^1 \frac{\partial \Sigma(x, v^t)}{\partial v^t} dt ds$$

для всех неотрицательных $\phi \in V_0$.

Пусть $k \geq 1-$ пока произвольное нечётное число. Введём множество $\Omega_+ := \{x \in \overline{\Omega} \mid v(x) > w(x)\}$. Выберем в качестве пробной функции в неравенстве (6) функцию $\phi = \max\{(v-w)^k, 0\}$. В силу предположений *(i) - (iii)* получаем

$$k\gamma_m \int\limits_{\Omega_+} \nu(x) z^{k-1} \Big(\int_0^1 |\nabla v^t|^{m-2} dt\Big) |\nabla z|^2 dx + \gamma_m \int\limits_{\Omega_+} \nu_0(x) z^{k+1} \Big(\int_0^1 |v^t|^{m-2} dt\Big) dx + \tag{7}$$
$$+ \int\limits_{\Omega_+} \nu(x) z^{k+1} \Big(\int_0^1 |v^t|^{-2} |\nabla v^t|^m dt\Big) dx \leq \int\limits_{\Omega_+} \nu(x) z^k \Big(\int_0^1 |v^t|^{-1} |\nabla v^t|^{m-1} dt\Big) |\nabla z| dx.$$

Применим теперь неравенство Коши

$$z^k |\nabla z| |v^t|^{-1} |\nabla v^t|^{m-1} = \left(|v^t|^{-1} z^{\frac{k+1}{2}} |\nabla v^t|^{m/2}\right) \cdot \left(z^{\frac{k-1}{2}} |\nabla z| |\nabla v^t|^{m/2-1}\right) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} |v^t|^{-2} z^{k+1} |\nabla v^t|^m + \frac{1}{2\varepsilon} z^{k-1} |\nabla z|^2 |\nabla v^t|^{m-2} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Отсюда, полагая $\varepsilon = 2$, из (7) получим

$$\big(k\gamma_m - \frac{1}{4}\big) \int\limits_{\Omega_+} \nu(x) z^{k-1} |\nabla z|^2 \Big(\int_0^1 |\nabla v^t|^{m-2} dt\Big) dx \leq 0. \tag{8}$$

Выбирая теперь нечётное число $k \geq \max\left(1; \frac{1}{2\gamma_m}\right)$, в силу того, что $z(x) \equiv 0$ почти
всюду на $\partial\Omega_+$, получим из (8), что $z(x) \equiv 0$ почти всюду в Ω_+. Мы пришли к противоречию с нашим определением множества Ω_+. Поэтому (5) доказано.

Замечание. Нетрудно проверить, что опероатор Q, порождённый модельным уравнением (МУ) при $q = 0$, удовлетворяет предположениям *(i) - (iii)*.

Далее мы доказываем сильный принцип максимума Хопфа. В дополнение к
(i) -(iii) будем предполагать ещё выполненным неравенство

$$(v) \quad |\eta| \cdot \left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_i(x,\eta)}{\partial \eta_i}\right| + \left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_i(x,\eta)}{\partial x_i}\right| + \left|\mathcal{B}(x,v,\eta) + \mu\nu(x) v^{-1} |\eta|^m\right| \leq \tilde{\gamma}_m \nu(x) |\eta|^{m-1}$$

с некоторыми неотрицательными постоянными $\tilde{\gamma}_m, \mu$.

Лемма 1. *Пусть* $B_d(y)$ – *открытый шар радиуса* $d > 0$ *с центром в* y, *содержащийся в* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *и* $v(x) \in \mathfrak{N}^1_{m,0}(\nu, \nu_0, B_d(y)) \cap C^1(\overline{B_d(y)})$ – *решение уравнения*

$$Q_0(v, \phi) \equiv \int\limits_{B_d(y)} \Big\langle \mathcal{A}_i(x, v_x)\phi_{x_i} + \mathcal{B}(x, v, v_x)\phi \Big\rangle dx = 0 \tag{9}$$

для всех неотрицательных $\phi \in L_\infty(B_d(y)) \cap W^{1,m}(B_d(y), \partial B_d(y))$. *Пусть выполнены предположения* $(i) - (v)$. *Предположим также, что*

$$v(x) > 0,\ x \in B_d(y), \quad v(x_0) = 0 \text{ в некоторой точке } x_0 \in \partial B_d(y)$$

Тогда

$$|\nabla v(x_0)| \neq 0. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим шаровой слой $\mathcal{R} = B_d(y) \setminus B_{d/2}(y) = \{x | \ \frac{d}{2} < |x - y| < d\}$ и функцию $w(x) = e^{-\sigma|x-y|^2} - e^{-\sigma d^2}$, $x \in \mathcal{R}$, $\sigma > 0$. Прямые вычисления дают:

$$0 \le w(x) \le e^{-\sigma|x-y|^2}; \tag{11}$$

$$w_{x_i} = -2\sigma(x_i - y_i)e^{-\sigma|x-y|^2}; \quad |\nabla w| = 2\sigma|x - y|e^{-\sigma|x-y|^2}; \tag{12}$$

$$w_{x_i x_j} = \langle 4\sigma^2(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\sigma\delta_i^j \rangle e^{-\sigma|x-y|^2}; \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\varepsilon w) &\equiv -\frac{d\mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{dx_i} + \mathcal{B}(x, \varepsilon w, \varepsilon w_x) = \\
&= -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial(\varepsilon w_{x_j})} w_{x_i x_j} - \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial x_i} + \mathcal{B}(x, \varepsilon w, \varepsilon w_x) = \\
&= -4\varepsilon\sigma^2 e^{-\sigma|x-y|^2} \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial(\varepsilon w_{x_j})}(x_i - y_i)(x_j - y_j) + \\
&+ 2\varepsilon\sigma e^{-\sigma|x-y|^2} \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial(\varepsilon w_{x_i})} - \frac{\partial \mathcal{A}_i(x, \varepsilon w_x)}{\partial x_i} + \mathcal{B}(x, \varepsilon w, \varepsilon w_x).
\end{aligned}$$

В силу предположений *(i)*, *(v)* отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\varepsilon w) \le -\varepsilon^{m-1}\nu(x)|\nabla w|^{m-2} e^{-\sigma|x-y|^2} \cdot \langle 4\gamma_m |x - y|^2\sigma^2 - 2\tilde{\gamma}_m\sigma - 4|x - y|\tilde{\gamma}_m\sigma \rangle - \\
- \mu\varepsilon^{m-1}\nu(x) w^{-1}|\nabla w|^m,\ \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

На основании (11),(12) заметим, что $\frac{|\nabla w|}{w} > 2\sigma|x - y|$ и поэтому из (14) следует, что в слое $\mathcal{R}$ выполнено:

$$\mathcal{L}(\varepsilon w) \le -\varepsilon^{m-1}\nu(x)|\nabla w|^{m-2} e^{-\sigma|x-y|^2} \cdot \langle (\gamma_m + \mu)d^2\sigma^2 - 2(1 + 2d)\tilde{\gamma}_m\sigma \rangle.$$

Если выбрать теперь $\sigma \geq \frac{2(1+2d)\bar{\gamma}_m}{(\gamma_m+\mu)d^2}$, то получим

$$\mathcal{L}(\varepsilon w) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{R},\ \forall \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Так как $v > 0$ на $\partial B_{d/2}(y)$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $v - \varepsilon w \geq 0$ на $\partial B_{d/2}(y)$. Это неравенство выполнено и на $\partial B_d(y)$, где $w = 0$. В силу (15) получаем

$$Q_0(\varepsilon w, \phi) = \int\limits_{B_d(y)} \phi \mathcal{L}(\varepsilon w) dx \leq 0 = Q_0(v, \phi).$$

Таким образом имеем:

$$\begin{cases} Q_0(v,\phi) \geq Q_0(\varepsilon w, \phi) \text{ в } \mathcal{R}; \\ v \geq \varepsilon w \text{ на } \partial\mathcal{R}. \end{cases} \tag{16}$$

На основании слабого принципа максимума из (16) следует, что $v \geq \varepsilon w$ всюду в $\mathcal{R}$. Так как $x_0 \in \partial B_d(y)$ и $w(x_0) = 0$ получаем: $\frac{v(x)-v(x_0)}{|x-x_0|} \geq \varepsilon \frac{w(x)-w(x_0)}{|x-x_0|}$ и поэтому $|\nabla v(x_0)| \geq \varepsilon |\nabla w(x_0)| = 2\varepsilon\sigma d e^{-\sigma d^2} > 0$, что означает (10).

Сильный принцип максимума Хопфа. *Пусть $\Omega -$ связное множество и $v(x) \in \mathfrak{N}^1_{m,0}(\nu, \nu_0, \Omega) \cap C^1(\Omega) -$ неотрицательное слабое решение уравнения*

$$\int\limits_{\Omega} \Big\langle \mathcal{A}_i(x, v_x)\phi_{x_i} + \mathcal{B}(x, v, v_x)\phi \Big\rangle dx = 0$$

для всех неотрицательных $\phi \in V_0$. Предроложим, что $v(x) \not\equiv 0$. Пусть выполнены предположения $(i) - (v)$. Тогда $v(x) > 0$, $x \in \Omega$.

Доказательство. Применяя метод от противного, предположим, что $v(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in \Omega$. Тогда можно найти шар $B_d(y) \subset \Omega$, удовлетворяющий предположениям леммы 1, то-есть такой, что $x_0 \in \partial B_d(y).$ По этой лемме имеем, что $|\nabla v(x_0)| \neq 0$. Но $0 = v(x_0) = \inf\limits_{x\in\Omega} v(x)$ и поэтому $|\nabla v(x_0)| = 0$. Получили противоречие. Поэтому заключение теоремы верно.

Докажем ещё одно свойство слабых решений задачи (BVP).

Лемма 2. *Пусть $u(x) -$ слабое решение задачи (BVP) и пусть выполнены предположения* **2), 3)** *с $\alpha_0(x) \equiv 0$, $b_0(x) \equiv 0$. Если, кроме того, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ почти всюду в G, то $u(x) \geq 0$ почти всюду в G.*

Доказательство. В качестве пробной функции в задаче (BVP) возьмём функцию $\phi = u^- = \max\{-u(x), 0\}$. Тогда получим:

$$\int\limits_G \Big\langle a_i(x, -u^-, -u^-_x)(-u^-_{x_i}) + a_0 \cdot a(x, -u^-, -u^-_x)(-u^-) + b(x, -u^-, -u^-_x)(-u^-) +$$

$$+ f(x)u^- \Big\rangle dx = -\int\limits_{\Gamma_2} \langle (-u^-)\sigma(x, -u^-) + g(x)u^- \rangle ds.$$

В силу предположений **2)**, **3)**

$$(1-\mu)\int\limits_G \nu(x)|u^-|^q|\nabla u^-|^m dx + a_0\int\limits_G \nu_0(x)|u^-|^{q+m}dx \le$$

$$\le -\int\limits_G fu^- dx - \int\limits_{\Gamma_2}\big\langle(-u^-)\sigma(x,-u^-) + g(x)u^-\big\rangle ds \le 0,$$

так как $u^- \ge 0$. Но так как $\mu < 1, a_0 \ge 0$ и $u\big|_{\partial G\setminus\Gamma_2} = 0$ получаем $u^-(x) = 0$ почти всюду в G, то-есть $u(x) \ge 0$ почти всюду в G.

Далее строим барьерную функцию вида

$$w = r^\lambda\Phi(\omega), \quad \omega \in \big[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\big], \quad 0 < \omega_0 < 2\pi, \quad \lambda > 0 \tag{17}$$

как решение однородной задачи

$$(BVP)_0\quad \begin{cases} \mathfrak{L}w \equiv -\dfrac{d}{dx_i}\Big(r^\tau|w|^q|\nabla w|^{m-2}w_{x_i}\Big) + a_0 r^{\tau-m}w|w|^{q+m-2} - \mu r^\tau w|w|^{q-2}|\nabla w|^m = 0, \\ \qquad\qquad x \in G_0, \\ w(x) = 0,\ x \in \Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2; \qquad \text{для задачи Дирихле}; \\ w(x) = 0,\ x \in \Gamma_0\cup\Gamma_1; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0,\ x\in\Gamma_2 \quad \text{для смешанной задачи}; \\ \quad a_0 \ge 0, \quad 0\le\mu<1, \quad q\ge 0, \quad m\ge 2, \quad \tau \ge m-2 \end{cases}$$

в $n-$ мерном *бесконечном* двугранном угле

$$G_0 = \Big\{x = (\overline{x}, r, \omega)\big|\ \overline{x}\in\mathbb{R}^{n-2},\ 0<r<\infty,\ -\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2},\ \omega_0\in(0,2\pi)\Big\}$$

с ребром $\Gamma_0 = \big\{(\overline{x},0,0)\big|\ \overline{x}\in\mathbb{R}^{n-2}\big\}$, содержащим начало координат, и боковыми гранями

$$\Gamma_1 = \Big\{(\overline{x}, r, -\frac{\omega_0}{2})\big|\ \overline{x}\in\mathbb{R}^{n-2},\ 0<r<\infty\Big\};$$
$$\Gamma_2 = \Big\{(\overline{x}, r, +\frac{\omega_0}{2})\big|\ \overline{x}\in\mathbb{R}^{n-2},\ 0<r<\infty\Big\}.$$

Для функции $\Phi(\omega)$ получаем следующую краевую задачу на собственные значения:

$$(\mathrm{EVP})\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\omega}\Big[\Big(\lambda^2\Phi^2+\Phi'^2\Big)^{\frac{m-2}{2}}|\Phi|^q\Phi'\Big] + \lambda[\lambda(q+m-1)-m+2+\tau]\Phi|\Phi|^q\times \\ \quad\times\Big(\lambda^2\Phi^2+\Phi'^2\Big)^{\frac{m-2}{2}} = a_0\Phi|\Phi|^{q+m-2} - \mu\Phi|\Phi|^{q-2}\Big(\lambda^2\Phi^2+\Phi'^2\Big)^{\frac{m}{2}}, \\ \qquad\qquad \omega\in(-\omega_0/2, \omega_0/2), \\ \Phi(-\omega_0/2) = \Phi(\omega_0/2) = 0 \qquad \text{для задачи Дирихле}; \\ \Phi(-\omega_0/2) = \Phi'(\omega_0/2) = 0 \qquad \text{для смешанной задачи}. \end{cases}$$

Для решения задачи *(EVP)* положим $\Phi'/\Phi = y$, в результате приходим к задаче Коши для $y(\omega)$:

$$\begin{cases} \left[(m-1)y^2+\lambda^2\right](y^2+\lambda^2)^{\frac{m-4}{2}}y' + (m-1+q+\mu)(y^2+\lambda^2)^{\frac{m}{2}} + \\ \qquad\qquad +\lambda(2-m+\tau)(y^2+\lambda^2)^{\frac{m-2}{2}} = a_0, \quad \omega\in(-\omega_0/2,\omega_0/2), \\ y(0)=0 \qquad\qquad \text{для задачи Дирихле;} \\ y(\omega_0/2)=0 \qquad\qquad \text{для смешанной задачи.} \end{cases} \qquad \text{(CPDE)}$$

На основании неравенства в (2) проверяется, что $y'(\omega) < 0$, $\omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)$; поэтому $y(\omega)$ **убывает** на интервале $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$. Заметим также, что решения задачи *(EVP)* определяются однозначно с точностью до постоянного множителя. Будем рассматривать решения, нормированные условием

$$1 = \begin{cases} \Phi(0) & \text{для задачи Дирихле;} \\ \Phi(\frac{\omega_0}{2}) & \text{для смешанной задачи.} \end{cases}$$

Далее устанавливаются такие свойства функции $\Phi(\omega)$: $\Phi(\omega) \ge 0$, $\Phi''(\omega) < 0$ $\forall\omega \in (-\omega_0/2, \omega_0/2)$. Перейдём к вопросу о разрешимости задачи *(CPDE)*. Переписывая уравнение задачи *(CPDE)* в виде, разрешённом относительно производной $y' = g(y,)$ заметим, что $g(y) \neq 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$. Кроме того, $g(y)$ и $g'(y)$, будучи рациональными функциями с ненулевым знаменателем, являются функциями **непрерывными**. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует однозначная разрешимость задачи *(CPDE)* в интервале $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$. Интегрируя, получаем

$$\Phi(\omega) = \exp\begin{cases} \int\limits_0^\omega y(\xi)d\xi & \text{для задачи Дирихле;} \\ \int\limits_{\omega_0/2}^\omega y(\xi)d\xi & \text{для смешанной задачи.} \end{cases}$$

$$\int\limits_0^y \frac{[(m-1)z^2+\lambda^2](z^2+\lambda^2)^{\frac{m-4}{2}}dz}{(m-1+q+\mu)(z^2+\lambda^2)^{\frac{m}{2}} + \lambda(2-m+\tau)(z^2+\lambda^2)^{\frac{m-2}{2}} - a_0} =$$

$$= \begin{cases} -\omega & \text{для задачи Дирихле;} \\ \frac{\omega_0}{2} - \omega & \text{для смешанной задачи.} \end{cases}$$

В силу (2) отсюда в частности получим, что $\lim_{\omega\to -\frac{\omega_0}{2}+0} y(\omega) = +\infty$. Последнее позволяет доказать разрешимость задачи *(EVP)*. Выражение (2) даёт уравнение для точного нахождения показателя λ в (17). Этот показатель можно явно вычислить в случае $a_0 = 0$; полученную величину обозначим через λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{4\theta_0(m-1+q+\mu)}\left\{\frac{m(m-2)-2(m-2)t_0-t_0^2}{t_0+2(m-2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{[t_0^2+2(m-2)t_0+m^2][t_0^2+2(m-2)t_0+(m-2)^2]}}{t_0+2(m-2)}\right\},$$

где $t_0 = \frac{2\theta_0}{\pi}(2 - m + \tau)$. Легко видеть, что $\lambda_0 > 0$. Кроме того, применяя теорему о неявной функции, получаем, что в некоторой окрестности точки $(\lambda_0, 0)$ уравнение (2) определяет $\lambda = \lambda(a_0, \omega_0)$ как однозначную **непрерывную** функцию переменной a_0, непрерывно зависящую от параметра ω_0 и имеющую непрерывные частные производные $\frac{\partial\lambda}{\partial a_0}, \frac{\partial\lambda}{\partial\omega_0}$. Затем исследуются свойства λ как функции $\lambda(a_0, \omega_0)$: *функция* $\lambda(a_0, \omega_0)$ **возрастает** *по переменной* a_0 *и* **убывает** *по переменной* ω_0 . Применяя метод аналитического продолжения, получим разрешимость уравнения (2) для $\forall a_0$.

Пример. Пусть $m = 2$ и рассмотрим задачу $(BVP)_0$ для уравнения

$$\frac{d}{dx_i}\left(r^\tau |w|^q u_{x_i}\right) = a_0 r^{\tau-2} w|w|^q - \mu r^\tau w|w|^{q-2}|\nabla w|^2, \quad x \in G_0,$$
$$a_0 \geq 0,\ 0 \leq \mu < 1,\ q \geq 0,\ \tau \geq 0.$$

Решением этой задачи является функция

$$w(r,\omega) = r^\lambda \times \begin{cases} \cos^{\frac{1}{1+q+\mu}}\left(\frac{\pi\omega}{\omega_0}\right) & \text{для задачи Дирихле;} \\ \cos^{\frac{1}{1+q+\mu}}\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0} - \frac{\pi}{4}\right) & \text{для смешанной задачи,} \end{cases}$$

причём

$$\lambda = \frac{\sqrt{\tau^2 + (\pi/\theta_0)^2 + 4a_0(1+q+\mu)} - \tau}{2(1+q+\mu)}.$$

Неравенство для λ в (2) принимает вид $(1+q+\mu)\lambda^2 + \lambda\tau > a_0$ и мы видим, что оно выполняется. Прямым вычислением ппроверяем, что
$w(x) \in \mathfrak{N}^1_{2,0}(r^\tau, r^{\tau-m}, G_0^d)$, если $q+\mu < 1$, и $w(x) \notin \mathfrak{N}^1_{2,0}(r^\tau, r^{\tau-m}, G_0^d)$, если $q+\mu \geq 1$; в последнем случае имеем $w(x) \in \mathfrak{N}^1_{2,q}(r^\tau, r^{\tau-m}, G_0^d)$.

Наконец, можно перейти к доказательству Основной теоремы. Для этого вначале производим замену функции

$$u = v|v|^{t-1}; \qquad t = \frac{m-1}{q+m-1}.$$

Благодаря предположению **7)** задача (BVP) принимает вид:

$$Q(v,\phi) \equiv \int\limits_G \Big\langle \mathcal{A}_i(x, v_x)\phi_{x_i} + a_0\mathcal{A}(x,v)\phi + \mathcal{B}(x,v,v_x)\phi -$$
$$- f(x)\phi\Big\rangle dx + \int\limits_{\Gamma_2} \Big\langle \Sigma(x,v) - g(x)\Big\rangle \phi ds = 0$$

для $v(x) \in V_0$ и любой $\phi(x) \in V_0$.

Далее, используя построенную выше барьерную функцию, применяем принцип сравнения. Для этого на основании предположений **8) - 10)** проверяется, что выполнены все условия *(i) - (iii)* принципа сравнения.

Замечание. В силу предположения 7) коэффициенты $a_i(x, u, u_x), i = 1, ..., n$ после вышеуказанной замены функции не зависят явно от v. Например, для модельного уравнения (МУ) это предположение выполняется; действительно, после указанной замены уравнение (МУ) принимает вид:

$$\mathfrak{L}_0 v(x) \equiv -t^{m-1} \frac{d}{dx_i} \left(r^\tau |\nabla v|^{m-2} v_{x_i}\right) + a_0 r^{\tau - m} v|v|^{m-2} - \mu t^m r^\tau v^{-1} |\nabla v|^m = f(x), \ x \in G.$$

Список литературы

1. Борсук М.В., *Оценки решений задачи Дирихле для эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической граничной точки*, Дифференциальные уравнения **30** (1994), no. 1, 104-108.
2. Борсук М.В., *Оценки обобщнных решений задачи Дирхле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в ообласти с конической граничной точкой*, Дифференциальные уравнения **31** (1995), 1001-1007.
3. Borsuk M.V., Dobrowolski M., *On the behavior of solutions of the Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic equations in the neighborhood of conical boundary points*, Nonlinear boundary value problems **9** (1999), 29-34.
4. Borsuk M., Portnyagin D., *On the Dirichlet problem for a quasilinear elliptic second order equation with triple degeneracy and singularity in a domain with edge on the boundar*, GAKUTO Intern. Ser. Math. Sci. and Applications **14** (2000), 47-60.
5. Tolksdorf P., *On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations in domains with conical boundary points*, Comm. Part. Different. Equat. **8** (1983), 773-817.

Chair of Analysis and Differential Equations
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
10-957 Olsztyn-Kortowo, Poland
E-mail address: borsuk@uwm.edu.pl