

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

© В. С. Белоносов, Т. И. Зеленьяк

Новосибирск, Россия

В настоящем докладе рассматриваются математические вопросы, возникшие при описании гидродинамических процессов в лабораторном вихревом биореакторе, изображенном на рисунке 1. Такие реакторы используются при разработке новых биотехнологий, обеспечивающих мягкие условия перемешивания суспензии клеток при высокой скорости межфазного массообмена.

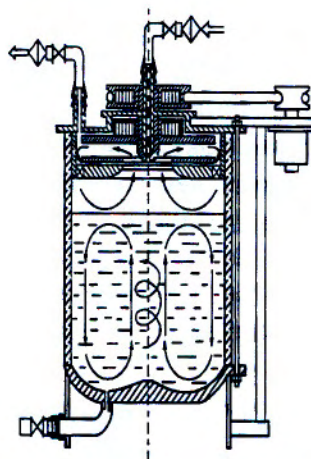


Рис. 1. Схема вихревого биореактора.

В камеру, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, поступает закрученный поток газа, выходящий затем через торцевое отверстие. За счет трения на границе раздела фаз и разницы давлений в центре и на периферии газового потока в камере устанавливается течение жидкости, вращающееся относительно оси емкости с одновременным нисходящим движением на периферии и восходящим — в приосевой зоне. Математическое моделирование такого течения представляет значительный практический интерес в связи с разработкой большеобъемных промышленных реакторов для медицинских биотехнологий. Мы остановимся на описании восходящего потока в приосевой зоне (рисунок 2), ограниченной поверхностями  $r = R$ ,  $z = 0$  и  $z = h$  в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ .

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (номер проекта 00-01-00912).

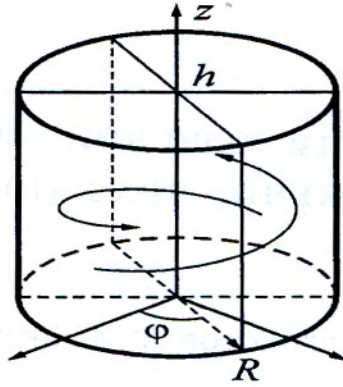


Рис. 2. Течение в приосевой зоне.

Задача о протекании жидкости через заданную область, на границе которой имеются участки втекания и вытекания, исследуется уже давно. Первые результаты в этом направлении получены Н.Е. Кочиним еще в 1956 году [1]. Однако до сих пор корректные постановки задач протекания удалось найти лишь для идеальной жидкости, причем даже в этом модельном случае соответствующие теоремы существования имеют локальный характер (см. [2]). Для вязкой жидкости удовлетворительной теории пока нет. Принципиальная трудность состоит здесь в правильной постановке граничных условий на участке вытекания. Мы попытаемся преодолеть эту трудность за счет дополнительных физически оправданных предположений о характере изучаемого вихревого течения.

Экспериментальные исследования показывают (см. [3]), что вблизи оси реактора радиальная  $V^r$  и угловая  $V^\varphi$  компоненты вектора скорости зависят только от времени  $t$  и расстояния  $r$  до оси цилиндра, осевая же компонента  $V^z$  линейна относительно  $z$ :

$$V^r = V^r(r, t), \quad V^\varphi = V^\varphi(r, t), \quad V^z = V_1^z(r, t) + z V_2^z(r, t). \quad (1)$$

Далее всюду будем придерживаться этой гипотезы.

Допустим, что плотность  $\rho$  и кинематическая вязкость  $\nu$  жидкости постоянны. С учетом (1) запишем для скорости  $(V^r, V^\varphi, V^z)$  и давления  $P$  систему уравнений Навье — Стокса в цилиндрических координатах. Переходя к новой независимой переменной  $x = r^2$  и новым неизвестным функциям

$$U(x, t) = -rV^r/\nu, \quad V(x, t) = rV^\varphi/\nu, \quad W(x, t) = V^z = W_1(x, t) + z W_2(x, t),$$

получим

$$U_t = 4\nu x U_{xx} + 2\nu U U_x - \frac{\nu}{x} (U^2 + V^2) + \frac{2x}{\nu\rho} P_x,$$

$$V_t = 4\nu x V_{xx} + 2\nu U V_x + \frac{1}{\nu\rho} P_\varphi,$$

$$W_t = 4\nu x W_{xx} + 2\nu U W_x + 4\nu W_x - W W_z + \frac{1}{\rho} P_z,$$

$$W_z = 2\nu U_x.$$



На основании третьего уравнения давление  $P$  должно быть многочленом второго порядка относительно  $z$ , а из первых двух уравнений следует, что этот многочлен записывается в виде

$$P = P_0(x, t) + z P_1(t) + \frac{z^2}{2} P_2(t).$$

Разлагая теперь третье уравнение по степеням переменной  $z$ , находим

$$\begin{aligned} U_t &= 4\nu x U_{xx} + 2\nu U U_x - \frac{\nu}{x} (U^2 + V^2) + \frac{2x}{\nu\rho} P_{0x}, \\ V_t &= 4\nu x V_{xx} + 2\nu U V_x, \\ W_{1t} &= 4\nu x W_{1xx} + 2\nu U W_{1x} + 4\nu W_{1x} - W_1 W_2 + \frac{1}{\rho} P_1, \\ W_{2t} &= 4\nu x W_{2xx} + 2\nu U W_{2x} + 4\nu W_{2x} - W_2^2 + \frac{1}{\rho} P_2, \\ W_2 &= 2\nu U_x. \end{aligned}$$

С помощью последнего уравнения исключим из рассмотрения функцию  $W_2$  и окончательно придем к системе

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\nu} U_t &= x U_{xx} + \frac{1}{2} U U_x - \int_0^x U_\xi^2(\xi, t) d\xi - \frac{x}{8\rho\nu^2} P_2(t), \\ \frac{1}{4\nu} V_t &= x V_{xx} + \frac{1}{2} U V_x, \\ \frac{1}{4\nu} W_{1t} &= x W_{1xx} + (U/2 + 1) W_{1x} - \frac{1}{2} U_x W_1 - \frac{1}{4\rho\nu} P_1(t), \\ \frac{x}{2\rho\nu^2} P_{0x} &= \frac{1}{4x} (U^2 + V^2) - \int_0^x U_\xi^2(\xi, t) d\xi - \frac{x}{8\rho\nu^2} P_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что функции  $U$  и  $V$  должны по определению обращаться в нуль при  $x = 0$ :

$$U(0, t) = V(0, t) = 0. \quad (3)$$

Математическая постановка задачи завершается указанием начально-краевых условий. В данном случае естественно задать все компоненты вектора скорости  $U$ ,  $V$ ,  $W_1$  и  $W_2$  в начальный момент  $t = 0$ , постоянную скорость на периферии вихря, то есть при  $r = R$ , а также нормальную компоненту  $P_z$  градиента давления на участке втекания жидкости, то есть при  $z = 0$ . Последнее условие означает, что функция  $P_1(t)$  считается известной. Кроме того, в силу равенства  $W_2 = 2\nu U_x$  все требования к уже исключенной из рассмотрения функции  $W_2$  следует отнести к производной  $U_x$ . Таким образом, мы получаем следующую начально-краевую задачу: найти функции  $U(x, t)$ ,  $V(x, t)$ ,  $W_1(x, t)$ ,  $P_0(x, t)$  и  $P_2(t)$ , удовлетворяющие системе (2) в прямоугольнике  $0 < x < R^2$ ,  $0 < t < T$ , условиям регулярности (3) при  $x = 0$ , а также начальным и краевым условиям:

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad W_1(x, 0) = W_{10}(x); \quad (4)$$

$$U(a, t) = U_1, \quad U_x(a, t) = U_2, \quad V(a, t) = V_1, \quad W_1(a, t) = W_{11} \quad (a = R^2). \quad (5)$$

Заметим, что в системе (2) ключевым является первое уравнение. Если из этого уравнения и условий (3)–(5) удастся найти функции  $U$  и  $P_2$ , то определение всех оставшихся неизвестных сведется к решению простых линейных задач. Поэтому далее основное внимание будет уделено первому уравнению системы (2). Нами исследовались как классические, так и обобщенные решения этого уравнения (см. [4]). Для краткости мы рассмотрим здесь только классические решения.

Прежде всего преобразуем данное уравнение, выразив  $P_2$  через  $U$ . Это не трудно сделать, интегрируя уравнение по переменной  $x$  в пределах от 0 до  $a$ . Учитывая (3)–(5), получим задачу

$$\frac{1}{4\nu} \left[ U_t - \frac{2x}{a^2} \int_0^a U_t(\xi, t) d\xi \right] = xU_{xx} + \frac{1}{2}UU_x - \int_0^x U_\xi^2(\xi, t) d\xi + \\ + \frac{2x}{a^2} \int_0^a (a - \xi)U_\xi^2(\xi, t) d\xi + \frac{2x}{a^2} (U_1 - aU_2 - U_1^2/4), \quad (6)$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(a, t) = U_1, \quad U(x, 0) = U_0(x).$$

Условие  $U_x(a, t) = U_2$  можно опустить, так как оно автоматически выполняется для всякого регулярного решения задачи (6).

Пусть  $G(x)$  - стационарное решение (6), принадлежащее пространству  $C^1([0, a])$  и дважды непрерывно дифференцируемое в открытом промежутке  $0 < x < a$ . Существование таких решений подробно изучено Н.Э. Кейльманом [5]. Показано, в частности, что совокупность пар  $(U_1, U_2)$ , для которых стационарная задача имеет решения, образует непустое замкнутое множество на плоскости. Нас будут интересовать нестационарные решения, близкие к  $G(x)$ . В связи с этим целесообразно перейти к новой неизвестной функции  $u = U - G$ :

$$Lu \equiv \frac{1}{4\nu} \left[ u_t - \frac{2x}{a^2} \int_0^a u_t d\xi \right] - xu_{xx} - \frac{1}{2} (Gu)_x + 2 \int_0^x G_\xi u_\xi d\xi - \\ - \frac{4x}{a^2} \int_0^a (a - \xi)G_\xi u_\xi d\xi = \frac{1}{2} uu_x - \int_0^x u_\xi^2 d\xi + \frac{2x}{a^2} \int_0^a (a - \xi)u_\xi^2 d\xi \equiv N(u), \quad (7)$$

$$u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = U_0(x) - G(x) \equiv u_0(x). \quad (9)$$

Наряду с нелинейным уравнением (7) рассмотрим также соответствующее линеаризованное уравнение, полученное из (7) заменой  $N(u)$  на  $f(x, t)$ :

$$Lu = f(x, t). \quad (10)$$

Так как оператор  $N$  превращает любую гладкую функцию, удовлетворяющую условиям (8), в функцию, ортогональную единице, то относительно  $f$  естественно предположить, что

$$\int_0^a f(x, t) dx = 0. \quad (11)$$



Мы ограничимся изучением классических решений  $u(x, t)$ , имеющих при  $t > 0$ ,  $0 \leq x \leq a$  непрерывные производные  $u_t$  и  $u_{xx}$ , а также непрерывную вплоть до  $t = 0$  производную  $u_x$ . Любое такое решение задачи (7)–(9), а при выполнении (11) — и задачи (8)–(10), удовлетворяет условию  $u_x(a, t) = 0$ . Поэтому от начальных данных  $u_0$  необходимо потребовать выполнения условий согласования  $u_0(0) = u_0(a) = u_0'(a) = 0$ .

Линеаризованную задачу (8)–(10) удобно привести к виду, разрешенному относительно производной по  $t$ . Для этого рассмотрим отображение

$$\Phi : u(x) \longrightarrow v(x) = u(x) - \frac{2x}{a^2} \int_0^a u(\xi) d\xi,$$

определенное на множестве

$$\mathcal{D} = \{ u \in C^1([0, a]) : u(0) = u(a) = u'(a) = 0 \}.$$

Нетрудно проверить, что отображение  $\Phi$  взаимно однозначно, область его значений равняется

$$\mathcal{R} = \left\{ v \in C^1([0, a]) : \int_0^a v(\xi) d\xi = 0, v(0) = 0, av'(a) = v(a) \right\},$$

причем обратное преобразование имеет вид

$$\Phi^{-1} : v(x) \longrightarrow u(x) = v(x) - \frac{x}{a} v(a).$$

Переходя к новой неизвестной функции  $v = \Phi(u)$ , получим эквивалентную (8)–(10) краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\nu} v_t - f(x, t) = xv_{xx} + \frac{1}{2} (Gv)_x - 2 \int_0^x G' v_\xi d\xi + \frac{4x}{a^2} \int_0^a (a - \xi) G' v_\xi d\xi - \\ - \frac{v(a, t)}{a} \left[ \frac{1}{2} xG'(x) - \frac{3}{2} G(x) + \frac{4x}{a^2} \int_0^a G(\xi) d\xi \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_0^a v(\xi, t) d\xi = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad av_x(a, t) = v(a, t); \quad (13)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \equiv \Phi(u_0). \quad (14)$$

Для формулировки результатов о разрешимости этой задачи нам понадобятся соответствующие пространства функций. Пусть  $\| \cdot \|_k$  — обычная норма в пространстве  $C^k([0, a])$ . Символом  $C^{k,0}(Q)$ , где  $Q = [0, a] \times [0, T]$ , обозначим

пространство функций, имеющих в  $Q$  непрерывные производные по  $x$  порядка  $k$ . Норма в  $C^{k,0}(Q)$  определена формулой

$$\|v\|_{k,0}^Q = \sup_{t \leq T} \|v(x,t)\|_k.$$

Множество функций из  $C^{k,0}(Q)$ , для которых конечна норма

$$\|v\|_{k,\alpha}^Q = \|v\|_{k,0}^Q + \sup_{\tau \leq t \leq T} \frac{\|v(x,t) - v(x,\tau)\|_k}{(t-\tau)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1),$$

обозначим через  $C^{k,\alpha}(Q)$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть выполнено условие (11) и  $f(x,t) = xg(x,t)$ , где  $g$  непрерывна в  $Q$  и принадлежит  $C^{0,\alpha}$  в каждом прямоугольнике  $Q_\tau = [0, a] \times [\tau, T]$ ,  $0 < \tau < T$ ; начальные данные  $v_0$  принадлежат  $C^1$  и удовлетворяют условиям (13). Тогда задача (12)–(14) имеет единственное классическое решение. Это решение обладает свойствами:  $v \in C^{1,0}(Q)$ ;  $v_t$  и  $v_{xx}$  непрерывны при  $t > 0$ ;  $v_x$  принадлежит  $C^{0,\alpha}(Q_\tau)$  при всех  $0 < \tau < T$ . Кроме того,

$$\|v\|_{1,0}^Q \leq c(T) \cdot [\|v_0\|_1 + \|g\|_{0,0}^Q]; \quad (15)$$

$$\|v_\tau(x,\tau)\|_0 + \|v(x,\tau)\|_2 \leq K_\alpha(\tau, \varepsilon) \cdot [\|v_0\|_1 + \|g\|_{0,0}^Q + \|g\|_{0,\alpha}^{Q_\varepsilon}],$$

где  $0 < \varepsilon < \tau$ . Если дополнительно  $v_0 = 0$ , то  $v \in C^{1,\beta}(Q)$  с любым  $\beta < 1/2$ , причем

$$\|v\|_{1,\beta}^Q \leq c_\beta(T) \cdot \|g\|_{0,0}^Q. \quad (16)$$

Понятно, что эта теорема справедлива и для задачи (8)–(10) с той разницей, что начальные данные  $u_0$  уже не обязательно ортогональны единице и удовлетворяют другим условиям согласования.

Вернемся к исходной нелинейной задаче (6) или, что то же самое, к задаче (7)–(9). Результат теоремы 1 позволяет стандартными методами установить для этих задач теорему об однозначной классической разрешимости "в малом" по  $t$ , если начальные данные непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют соответствующим условиям согласования. Можно также установить существование решений на любом фиксированном промежутке времени  $[0, T]$ , если начальные данные близки в метрике  $C^1$  к  $G(x)$  в случае задачи (6) или к нулю — в случае задачи (7)–(9).

Еще одно приложение теоремы 1 связано с изучением устойчивости стационарного решения  $G(x)$  задачи (6). Напомним, что стационарное решение  $G(x)$  называется устойчивым по Ляпунову в пространстве  $C^1([0, a])$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что при любых начальных данных  $U_0 \in C^1$ , удовлетворяющих условиям согласования и неравенству  $\|U_0 - G\|_1 \leq \delta$ , задача (6) имеет единственное классическое решение, определенное при всех  $t > 0$ , причем

$$\|U(x,t) - G(x)\|_1 \leq \varepsilon, \quad 0 < t < \infty.$$



Нас интересует так называемый принцип линеаризации, то есть возможность судить об устойчивости или неустойчивости решений нелинейной задачи на основании исследования подходящего линейного приближения. В данном случае удобным линейным приближением является система (12)–(14), разрешенная относительно производной по  $t$ .

Обозначим через  $A$  линейный оператор, порожденный правой частью уравнения (12) в пространстве

$$B = \left\{ v(x) : v(x)/x \in C([0, a]), \int_0^a v(x) dx = 0 \right\}$$

с нормой  $\|v\| = \|v(x)/x\|_0$ . Область определения этого оператора — множество всех дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих стационарным условиям (13). Спектр оператора  $A$  состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, локализованных в некотором секторе  $|\arg(\lambda - \zeta)| \leq \pi - \gamma$  комплексной  $\lambda$ -плоскости с вещественной вершиной  $\zeta$  и полууглом  $\gamma < \pi$ .

Асимптотическое поведение решений линеаризованной задачи (12)–(14) существенным образом зависит от расположения спектра оператора  $A$  по отношению к мнимой оси. Можно показать, что если весь спектр лежит в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , то константы  $c(T)$  и  $C_\beta(T)$  в неравенствах (15)–(16) равномерно ограничены при  $0 < T < \infty$ . Это утверждение позволяет обосновать следующий принцип линеаризации.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть спектр оператора  $A$  лежит в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , тогда стационарное решение  $G(x)$  нелинейной задачи (6) асимптотически устойчиво в пространстве  $C^1$ . Если же хотя бы одно собственное число оператора  $A$  имеет положительную вещественную часть, то  $G(x)$  неустойчиво.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Е. Кочин, *Об одной теореме существования гидродинамики*, Прикл. математика и механика 20 (1956), no. 2, 153–172.
2. С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Наука, Новосибирск, 1983.
3. Э.П. Волчков, В.И. Кислых, И.И. Смульский, *Экспериментальное исследование аэродинамики вихревой камеры с торцевым вдувом*, Структура пристенного пограничного слоя, Новосибирск, 1978.
4. В.С. Белоносов, Т.И. Зеленьяк, *Об одной нестационарной модели вихря*, Нестационарные проблемы гидродинамики, выпуск 20, Институт гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1982, pp. 14–26.
5. Н.Э. Кейльман, *О разрешимости краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях*, Канд. диссертация, НГУ, Новосибирск, 1984.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
ПР.КОПТЮГА, 4, НОВОСИБИРСК, 630090, РОССИЯ