Нелинейные граничные задачи, вып. 13, 2003, с.118-132.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С ТОНКИМИ ПОЛОСТЯМИ

© М.А. Наумова

Донецк, Украина

Резюме. Построено асимптотическое разложение последовательности решений задач Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в областях с тонкими полостями. Изучено поведение членов этого разложения и доказана сходимость остаточного члена.

1. Постановка задачи.

В работе рассматривается асимптотическое поведение решений краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с граничным условием Дирихле в последовательности областей с полостями, которые содержатся в тонких окрестностях гладких многообразий разной размерности. Такое асимптотическое разложение решений вместе с поточечными оценками решений модельных задач, изученных в [3], является основой построения усредненной задачи для указанной последовательности задач. Усреднение линейных эллиптических краевых задач в областях с мелкозернистой границей изучено В.А. Марченко и Е.Я. Хрусловым в [1], нелинейных задач в областях с мелкозернистой границей и областях с каналами - И.В. Скрыпником в [2]. Метод построения асимптотических разложений, разработанный И.В. Скрыпником в [2], в данной работе переносится на случай областей с тонкими полостями.

Будем предполагать, что функции $a_j(x,u,p)$, j=0,...,n, определены при x, принадлежащем ограниченной области Ω класса C^1 в $R^n, u \in R^1, p \in R^n$ и удовлетворяют условиям:

a_1) $a_j(x,u,p)$ непрерывны по u, p при почти всех $x \in \Omega$, измеримы по x при любых u, p; $a_j(x,u,0) = 0$ при $x \in \Omega, u \in R^1, j = 1,...,n$;

a_2) существуют положительные постоянные $\nu_1, \nu_2, \varepsilon$ такие, что при некоторых $m \in [2,\sigma)$, $2 < \sigma \le n-1, r_1 \in \left(0, \frac{n}{n-m}\right)$ и всех значениях $x \in \Omega$, $u, v \in R^1$, $p, q \in R^n$ выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \left[a_j(x,u,p) - a_j(x,u,q)\right](p_j - q_j) \ge \nu_1 \left(1 + |p| + |q|\right)^{m-2} |p-q|^2,$$

$$a_0(x,u,p)\,u \ge -(\nu_1 - \varepsilon)|p|^m - \varphi(x)(1+|u|),$$

$$|a_j(x,u,p) - a_j(x,v,q)| \le \nu_2 \left(1 + |u|^{r_1} + |v|^{r_1} + |p| + |q|\right)^{m-2} (|p-q| + |u-v|),$$

$$|a_0(x,u,p)| \le \nu_2 \left(|u|^{r_1} + |p|\right)^{m-\frac{1}{r_1}} + \varphi(x),$$

где $\varphi(x) \in L_{r_2}(\Omega)$, $r_2 > \frac{n}{m}, j = 1,...,n$.

При изучении усреднения в случаях $1 < m < 2, m = \sigma$ требуются изменения в предположениях и результатах. Отметим, что функции $a_j(x,u,p)$ можем считать заданным и удовлетворяющими условиям a_1) и a_2) при $(x,u,p) \in R^n \times R^1 \times R^n$.

Перейдем к формулировке предположений на последовательность областей. Предположим, что для каждого натурального числа s при $i = 1, 2, ..., I(s)$ определены поверхности $\Pi_i^{(s)}$ в $\bar{\Omega}$ размерности $n - \sigma, 2 < \sigma \le n - 1$ и положительные числа $r_i^{(s)}, d_i^{(s)}$, удовлетворяющие с не зависящими от i, s положительными постоянными $c_1, c_2, \lambda\,, p_0$ следующим условиям:

$b_1)$ $(2 + c_1)\, d_i^{(s)} \le r_i^{(s)}, \lim\limits_{s\to\infty} r^{(s)} = 0$, где $r^{(s)} = \max\limits_{1\le i\le I(s)} r_i^{(s)}$,

$$\sum_{i=1}^{I(s)} \left\{ \frac{\left[d_i^{(s)}\right]^{m(\sigma-m)}}{\left[r_i^{(s)}\right]^{\sigma}} \right\}^{\frac{1}{m-1}} \le c_2; \tag{1}$$

$b_2)$ существуют гладкие многообразия$\Gamma_{i,l}^{(s)},$ $s = 1, 2, ..., i = 1, ..., I(s), l = 1, ..., L(i, s)$ размерности $n - \sigma - 1$ такие, что при произвольных $t_i^{(s)} \in \left[d_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right]$ выполнено включение

$$U\left(T_i^{(s)}\left(\left\{t_i^{(s)}\right\}\right), t_i^{(s)}\right) \subset \bigcup_{l=1}^{L(i,s)} U\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}, \lambda\,, t_i^{(s)}\right),$$

где $T_i^{(s)}\left(\left\{t_i^{(s)}\right\}\right) = U\left(\Pi_i^{(s)}, t_i^{(s)}\right) \cap \left\{\bigcup\limits_{j\ne i} U\left(\Pi_j^{(s)}, t_j^{(s)}\right) \cup \partial\,\Omega\right\}$.

Здесь и далее для множества $G \subset R^n$

$$U\,(G, R) = \{x \in R^n\, : \rho\,(x, G) < R\}\,,$$

$\rho\,(x, G)$ - расстояние от точки x до множества G;

$b_3)$ при каждом $s = 1, 2, ...$ порядок семейств множеств

$$\left\{U\left(\Pi_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right), i = 1, ..., I\,(s)\right\}$$

$$\left\{U\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}, \lambda\, r_i^{(s)}\right), i = 1, ..., I\,(s)\,, l = 1, ..., L\,(i, s)\right\}$$

не превосходит числа p_0 ; имеют место включения $U\left(\Pi_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right) \subset \Omega\,, U\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}, \lambda\, r_i^{(s)}\right) \subset \Omega$ при $i = 1, ..., I(s), l = 1, ..., L(i, s)$. При этом порядком конечного семейства множеств называется наиболее целое число p, для которого имеется $p + 1$ множеств данного семейства с общей точкой.

Будем еще предполагать следующие условия относительно поверхностей $\Pi_i^{(s)}, \Gamma_{i,l}^{(s)}$:

$l_1)$ при произвольных $s = 1, 2, ..., i = 1, ..., I(s), l = 1, ..., L(i, s)$ существуют диффеоморфизмы $g_i^{(s)}, f_{i,l}^{(s)}$ класса C^1, $g_i^{(s)}\,:\, U\left(\Pi_i^{(s)}, 1\right) \to g_i^{(s)} U\left(\Pi_i^{(s)}, 1\right) \subset R^n$, $f_{i,l}^{(s)}$: $U\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}, 1\right) \to f_{i,l}^{(s)} U\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}, 1\right) \subset R^n$ такие, что

$$g_i^{(s)}\left(\Pi_i^{(s)}\right) \subset \{y \in R^n : |y| \le 1\,, y_1 = ... = y_\sigma = 0\}\,,$$

$$f_{i,l}^{(s)}\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}\right) \subset \{y \in R^n : |y| \le 1\,, y_1 = ... = y_{\sigma+1} = 0\}$$

соответственно;

l_2) существует не зависящая от i, s, l положительная постоянная $\kappa > 0$ такая, что выполнены неравенства

$$\left|\frac{\partial g_i^{(s)}(x)}{\partial x}\right| \le \kappa, \det \frac{Dg_i^{(s)}(x)}{Dx} \ge \kappa^{-1} \qquad \text{при } x \in U\left(\Pi_i^{(s)}, 1\right),$$

$$\left|\frac{\partial f_{i,l}^{(s)}(x)}{\partial x}\right| \le \kappa, \det \frac{Df_{i,l}^{(s)}(x)}{Dx} \ge \kappa^{-1} \qquad \text{при } x \in U\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}, 1\right),$$

где $\frac{Du(x)}{Dx}$ - якобиева матрица отображения $u(x)$ в точке x. Отсюда, в частности, следует, что с некоторой постоянной c_3 , зависящей лишь от n, κ , выполнены неравенства

$$c_3^{-1}|x_1 - x_2| \le \left|g_i^{(s)}(x_1) - g_i^{(s)}(x_2)\right| \le c_3|x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in U\left(\Pi_i^{(s)}, 1\right),$$

$$c_3^{-1}|x_1 - x_2| \le \left|f_{i,l}^{(s)}(x_1) - f_{i,l}^{(s)}(x_2)\right| \le c_3|x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in U\left(\Gamma_{i,l}^{(s)}, 1\right). \tag{2}$$

Будем предполагать, что при каждом s

$$F_i^{(s)} \subset U\left(\Pi_i^{(s)}, d_i^{(s)}\right), i = 1, ..., I(s), \tag{3}$$

и рассмотрим последовательность граничных задач

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad x \in \Omega^{(s)} = \Omega \backslash F^{(s)}, \tag{4}$$

$$u(x) - f(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1\left(\Omega^{(s)}\right) \tag{5}$$

при некоторой функции $f(x) \in W_m^1(\Omega), F^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$.

Используя методы общей теории монотонных операторов можно доказать существование решения $u_s(x)$ задачи (4), (5) и априорную оценку

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega^{(s)})} \le R$$

с не зависящей от s постоянной R. Продолжим функцию $u_s(x)$ на множество Ω, полагая ее равной $f(x)$ вне $\Omega^{(s)}$. Так определенная функция, обозначаемая далее также через $u_s(x)$, принадлежит $W_m^1(\Omega)$ и удовлетворяет оценке

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le R + \|f(x)\|_{W_m^1(\Omega)}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что из последовательности $\{u_s(x)\}$ можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $u_0(x) \in W_m^1(\Omega)$. Не ограничивая общности, можем считать, что вся последовательность $u_s(x)$ слабо сходится к $u_0(x)$ в $W_m^1(\Omega)$.

Аналогично доказательству теоремы 2.1 из главы 9 [2], можно показать, что для некоторой, не зависящей от s, постоянной M выполнена оценка

$$\mathit{vrai}\max|u_s(x)| \le M.$$

Определим числовые последовательности $\{\lambda_s\}, \{\mu_s\}$ равенствами

$$\lambda_s^{m+1} = \max\left\{\left[\ln\frac{1}{r^{(s)}}\right]^{-1}, \int\limits_{U^{(s)}}\left[\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m + |u_0(x)|^m + \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^m + |f(x)|^m\right]dx\right\} \tag{7}$$

$$\mu_s = \lambda_s^{-\frac{1}{2(\sigma - m)}}, \tag{8}$$

где $U^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{I(s)} U\left(\Pi_i^{(s)}, \bar{\rho}_i^{(s)}\right)$, $\bar{\rho}_i^{(s)} = \frac{1}{2}d_i^{(s)} + \left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$. Заметим, что в силу условия $b_3)$ выполнена оценка

$$\sum_{i=1}^{I(s)} \left[r_i^{(s)}\right]^{\sigma} \leq c_4 \tag{9}$$

с некоторой постоянной c_4 , не зависящей от s. Из (7)-(9) можно получить равенства

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_s = 0\,, \lim_{s\to\infty} \mu_s = \infty\,, \lim_{s\to\infty} \lambda_s^{(n-\sigma)\frac{m-1}{m}} \mu_s^{\frac{\sigma-m}{m}} = 0\,. \tag{10}$$

Определим далее при $s = 1, 2, ..., i = 1, ..., I(s)$ числовую последовательность $\rho_i^{(s)}$ условиями:

$$\rho_i^{(s)} = d_i^{(s)}, \qquad \text{если } \; i \in I'(s) = \left\{ i = 1, ..., I(s) \, : d_i^{(s)} \geq \left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-m}} \mu_s \right\}, \tag{11}$$

$$\rho_i^{(s)} = 2c_3^2 \left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-m}} \mu_s,$$
$$\text{если } i \in I''(s) = \left\{ i = 1, ..., I(s) \, : d_i^{(s)} < \left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-m}} \mu_s \right\}, \tag{12}$$

где c_3 - постоянная из неравенства (2). Не ограничивая общности, можем считать, что $2c_3^2\rho_i^{(s)} \leq r_i^{(s)}$ при $i \in I''(s)$.

Рассмотрим при $s = 1, 2, ..., \; i \in I''(s)$ множества

$$L_i^{(s)} = \left\{ x \in \Pi_i^{(s)} : \rho\left(x, T_i^{(s)}\left(\left\{2\rho_i^{(s)}\right\}\right)\right) \geq 2\rho_i^{(s)} \right\}. \tag{13}$$

Представим $L_i^{(s)}$ в виде $L_i^{(s)} = L_{i,1}^{(s)} \cup L_{i,2}^{(s)}$, где $L_{i,1}^{(s)}$ - объединение всех тех связных компонент множества $L_i^{(s)}$, которым принадлежат точки $x \in L_i^{(s)}$, удовлетворяющие условию $\rho\left(x, T_i^{(s)}\left(\left\{2\rho_i^{(s)}\right\}\right)\right) \geq 2\rho_i^{(s)} + \frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}$, $L_{i,2}^{(s)}$ - те компоненты множества $L_i^{(s)}$, которые не имеют таких точек. Сделаем замену переменных $y = g_i^{(s)}(x)$, где $g_i^{(s)}(x)$ - диффеоморфизм, определенный в условии $l_1)$. Тогда каждая компонента множества $L_{i,1}^{(s)}$ перейдет в множество точек, входящее в $\{y \in R^n : y_1 = ... = y_\sigma = 0, \; a_j^{(s)} \leq y_j^{(s)} \leq b_j^{(s)}, \; j = \sigma + 1, ..., n\}$, $a_j^{(s)}, b_j^{(s)}$ - постоянные. Каждый из отрезков $a_j^{(s)} \leq y_j^{(s)} \leq b_j^{(s)}$, $j = \sigma + 1, ..., n$ разобьем на конечное число с таким условием, чтобы длина отрезков возникающего подразбиения принадлежала сегменту $\left[\frac{\rho_i^{(s)}}{2\lambda_s}, \frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right]$. Через точки деления $c_{j,m}^{(s)} \in \left[a_j^{(s)}, b_j^{(s)}\right]$, $m = 1, ..., M_j^{(s)}, j = \sigma + 1, ..., n$ проведем плоскости $\Lambda_{j,m}^{(s)} = \left\{y \in R^n : y_j = c_{j,m}^{(s)}, y_1 = ... = y_\sigma = 0\right\}$, $j = \sigma + 1, ..., n\,, m = 1\,, ..., M_j^{(s)}$, которые, пересекаясь, разобьют наше множество $g_i^{(s)}\left(L_{i,1}^{(s)}\right)$ на конечное число подмножеств $\tilde{L}_i^{(s)}(k)$, $k = 1, ..., K(i, s)$.

Обозначим

$$\tilde{Q}_{i,k}^{(s)}(c) = U\left(\partial\, \tilde{L}_i^{(s)}(k), c\rho_i^{(s)}\right), Q_{i,k}^{(s)}(c) = \left[g_i^{(s)}\right]^{-1}\left(\tilde{Q}_{i,k}^{(s)}(c)\right).$$

Возвращаясь к переменным $x_1, ..., x_n$, в итоге приходим к представлению

$$L_{i,1}^{(s)} = \bigcup_{k=1}^{K(i,s)} L_i^{(s)}(k), \qquad \text{где } L_i^{(s)}(k) = \left[g_i^{(s)}\right]^{-1}\left(\tilde{L}_i^{(s)}(k)\right). \tag{14}$$

Можно показать, что при достаточно большом, не зависящем от s, i числе c' справедливы утверждения:

$a)$ при фиксированных s, i множества $G_{i,k}^{(s)}(c')$ попарно не пересекаются, где

$$G_{i,k}^{(s)}(c) = U\left(L_i^{(s)}(k),\, 2\rho_i^{(s)}\right) \setminus \overline{Q_{i,k}^{(s)}(c)}; \tag{15}$$

$b)$ имеет место включение

$$U\left(\Pi_i^{(s)},\, 2\rho_i^{(s)}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{K(i,s)} \left\{G_{i,k}^{(s)}\left(c' + \frac{1}{3}\right) \cup Q_{i,k}^{(s)}\left(c' + \frac{2}{3}\right)\right\} \cup \bigcup_{l=1}^{L(i,s)} \bigcup_{q=1}^{Q(i,l,s)} B\left(z_{i,l}^{(s)}(q), 2\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right).$$

Проводя аналогичные построения, получим следующее включение

$$U\left(\Pi_i^{(s)},\, 2\rho_i^{(s)}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{K(i,s)} \left\{G_{i,k}^{(s)}\left(c' + \frac{1}{3}\right) \cup \bigcup_{p=1}^{P(i,k,s)} B\left(x_{i,k}^{(s)}(p), (\bar{c}' + 1)\,\rho_i^{(s)}\right)\right\} \cup$$
$$\cup \bigcup_{l=1}^{L(i,s)} \bigcup_{q=1}^{Q(i,l,s)} B\left(z_{i,l}^{(s)}(q), 2\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right). \tag{16}$$

Если $i \in I'(s)$, поверхность $\Pi_i^{(s)}$ разбиваем аналогично разбиению множества $L_{i,1}^{(s)}, i \in I''(s)$ с той лишь разницей, что длина отрезков возникающего подразбиения принадлежит сегменту $\left[\frac{d_i^{(s)}}{2}, d_i^{(s)}\right]$. В итоге приходим к представлению

$$U\left(\Pi_i^{(s)}, 2d_i^{(s)}\right) \subset \bigcup_{r=1}^{R(i,s)} B\left(\xi_{i,r}^{(s)}, 2d_i^{(s)}\right) \tag{17}$$

при соответствующем выборе точек $\xi_{i,r}^{(s)}$. Используя условие $b_3)$, включения (16), (17), можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *При каждом $s = 1, 2, \dots$ порядок семейств множеств*

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{K(i,s)} \left\{G_{i,k}^{(s)}\left(c' + \frac{1}{3}\right) \cup \bigcup_{p=1}^{P(i,k,s)} B\left(x_{i,k}^{(s)}(p), (\bar{c}' + 1)\,\rho_i^{(s)}\right)\right\} \cup \right.$$
$$\left. \cup \bigcup_{l=1}^{L(i,s)} \bigcup_{q=1}^{Q(i,l,s)} B\left(z_{i,l}^{(s)}(q), 2\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right), i \in I''(s)\right\},$$
$$\left\{\bigcup_{r=1}^{R(i,s)} B\left(\xi_{i,r}^{(s)}, 2d_i^{(s)}\right), i \in I'(s)\right\}$$

не превосходит числа p_1.

Для формулировки основного результата статьи определим при $s = 1, 2, \dots,\ i \in I''(s)\ k = 1, \dots, K(i,s)$ функции $v_{i,k}^{(s)}(x, \mu)$ как решение вспомогательной граничной задачи. Для произвольного открытого множества $G \subset R^n$ и содержащегося в $\bar{G}$ замкнутого множества F обозначим при $\mu \in R^1$ через $v(x, \mu; G, F)$ решение задачи

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,\ x \in U\left(G, \tfrac{1}{2}\right) \setminus F, \\ v(x) - \mu\tilde{\psi}(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1\left[U\left(G, \tfrac{1}{2}\right) \setminus F\right], \end{gathered} \tag{18}$$

где $\tilde{\psi}(x)$ - фиксированная функция класса $C_0^\infty\left(U\left(G, \frac{1}{2}\right)\right)$, равная единице в $U\left(G, \frac{1}{4}\right)$. Однозначная разрешимость задачи (18) следует из главы 1 [2].

Определим при $s=1,2,...,\ i\in I''(s)\,,\ k=1,...,K(i,s)$

$$v_{i,k}^{(s)}(x,\mu)\equiv v\left(x,\mu;G_{i,k}^{(s)}(c')\,,F_i^{(s)}\cap\overline{G_{i,k}^{(s)}(c')}\right). \qquad (19)$$

2. Построение асимптотического разложения и сходимость $\mathbf{w_s}(\mathbf{x})$

Обозначим при $i\in I''(s)\,,\ k=1,...,K(i,s), p=1,...,P(i,k,s), l=1,...,L(i,s),$ $q=1,...,Q(i,l,s),\ j\in I'(s)\,,\ r=1,...,R(j,s)$

$$G_{i,k}^{(s)}=G_{i,k}^{(s)}(c')\ ,B_{i,k}^{(s)}=B\left(\bar{x}_{i,k}^{(s)},c_3\rho_i^{(s)}\left(2+\frac{1}{\lambda_s}\right)\right)\supset G_{i,k}^{(s)}(c')\,,$$

$$B_{i,k,p}^{(s)}=B\left(x_{i,k}^{(s)}(p)\,,(\bar{c}'+1)\,\rho_i^{(s)}\right),\tilde{B}_{i,l,q}^{(s)}=B\left(z_{i,l}^{(s)}(q)\,,2\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right), \qquad (20)$$

$$\bar{B}_{j,r}^{(s)}=B\left(\xi_{j,r}^{(s)},2d_j^{(s)}\right),$$

где $\lambda_s,\rho_i^{(s)}$ определены согласно (7), (12), c_3 - постоянная из неравенства (2), $c',\bar{c}'$ имеют то же значение, что и в (16), $\bar{x}_{i,k}^{(s)}$ - центр шара минимального радиуса, содержащего $G_{i,k}^{(s)}(c')$.

Используя (16), (17), можно определить бесконечно дифференцируемые в R^n функции $\varphi_{i,k}^{(s)}(x)\,,\psi_{i,k,p}^{(s)}(x)\,,\chi_{i,l,q}^{(s)}(x)$ при $i\in I''(s)\,,\ k=1,...,K(i,s), l=1,...,L(i,s),\ \ p=1,...,P(i,k,s), q=1,...,Q(i,l,s)$ и $\omega_{j,r}^{(s)}(x)$ при $j\in I'(s)\,,\ r=1,...,R(j,s)$так, чтобы выполнялись условия:

1) носители функций $\varphi_{i,k}^{(s)}(x)\,,\psi_{i,k,p}^{(s)}(x)\,,\chi_{i,l,q}^{(s)}(x)\,,\omega_{j,r}^{(s)}(x)$ содержатся соответственно во множествах $G_{i,k}^{(s)},B_{i,k,p}^{(s)},\tilde{B}_{i,l,q}^{(s)},\bar{B}_{j,r}^{(s)}$, значения всех указанных функций принадлежат отрезку [0,1];

2) выполняется равенство

$$\sum_{j\in I'(s)}\omega_j^{(s)}(x)+\sum_{i\in I''(s)}\sigma_i^{(s)}(x)=1 \quad \text{при} \quad x\in\bigcup_{i=1}^{I(s)}U\left(\Pi_i^{(s)},\rho_i^{(s)}\right), \qquad (21)$$

где $\omega_j^{(s)}(x)=\sum\limits_{r=1}^{R(j,s)}\omega_{j,r}^{(s)}(x)$,

$$\sigma_i^{(s)}(x)=\sum_{k=1}^{K(i,s)}\left[\varphi_{i,k}^{(s)}(x)+\sum_{p=1}^{P(i,k,s)}\psi_{i,k,p}^{(s)}(x)\right]+\sum_{l=1}^{L(i,s)}\sum_{q=1}^{Q(i,l,s)}\chi_{i,l,q}^{(s)}(x);$$

3)

$$\varphi_{i,k}^{(s)}(x)=1 \qquad \text{при} \qquad x\in U\left(\Pi_i^{(s)},\rho_i^{(s)}\right)\cap G_{i,k}^{(s)}(c'+1)\,; \qquad (22)$$

4) с некоторой постоянной c_0, не зависящей от s,i при $k=1,...,K(i,s), l=1,...,L(i,s),$ $p=1,...,P(i,k,s),\ q=1,...,Q(i,l,s),\ r=1,...,R(i,s)$ выполнены оценки

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\omega_{i,r}^{(s)}(x)\right|\le\frac{c_0}{d_i^{(s)}} \qquad \text{при } i\in I'(s)\,,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{i,k}^{(s)}(x)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x}\psi_{i,k,p}^{(s)}(x)\right|\le\frac{c_0}{\rho_i^{(s)}}, \qquad (23)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\chi^{(s)}_{i,l,q}(x)\right| \le \frac{c_0\lambda_s}{\rho^{(s)}_i} \qquad \text{при} \quad i \in I''(s)\,;$$

5) порядок семейства множеств $supp\ \varphi^{(s)}_{i,k}(x)$, $supp\ \psi^{(s)}_{i,k,p}(x)$, $supp\ \chi^{(s)}_{i,l,q}(x)$, $supp\ \omega^{(s)}_{j,r}(x)$, $(i \in I''(s),\ k = 1,...,K(i,s),\ p = 1,...,P(i,k,s),\ l = 1,...,L(i,s),\ q = 1,...,Q(i,l,s),\ j \in I'(s),\ r = 1,...,R(j,s))$ ограничен сверху постоянной, не зависящей от s; здесь $supp\,\varphi(x)$ - носитель функции $\varphi(x)$.

Введем при произвольной функции $g(x) \in L_1(\Omega)$ следующие средние

$$M^{(s)}_{i,k}[g] = \frac{1}{mes\,B^{(s)}_{i,k}} \int\limits_{B^{(s)}_{i,k}} g(x)\,dx, \quad M^{(s)}_{i,k,p}[g] = \frac{1}{mes\,B^{(s)}_{i,k,p}} \int\limits_{B^{(s)}_{i,k,p}} g(x)\,dx\,,$$

$$\tilde{M}^{(s)}_{i,l,q}[g] = \frac{1}{mes\,\tilde{B}^{(s)}_{i,l,q}} \int\limits_{\tilde{B}^{(s)}_{i,l,q}} g(x)\,dx, \quad \bar{M}^{(s)}_{j,r}[g] = \frac{1}{mes\,\bar{B}^{(s)}_{j,r}} \int\limits_{\bar{B}^{(s)}_{j,r}} g(x)\,dx\,,$$

$i \in I''(s), k = 1,...,K(i,s), p = 1,...,P(i,k,s), l = 1,...,L(i,s),\ q = 1,...,Q(i,l,s)$, $j \in I'(s), r = 1,...,R(j,s)$.

Пусть

$u^{(s)}_{i,k}$, $u^{(s)}_{i,k,p}$, $\tilde{u}^{(s)}_{i,l,q}$, $\bar{u}^{(s)}_{j,r}$ - соответственно средние $M^{(s)}_{i,k}[u_0]$, $M^{(s)}_{i,k,p}[u_0]$, $\tilde{M}^{(s)}_{i,l,q}[u_0]$, $\bar{M}^{(s)}_{j,r}[u_0]$, $f^{(s)}_{i,k}$, $f^{(s)}_{i,k,p}$, $\tilde{f}^{(s)}_{i,l,q}$, $\bar{f}^{(s)}_{j,r}$ соответственно равны $M^{(s)}_{i,k}[f]$, $M^{(s)}_{i,k,p}[f]$, $\tilde{M}^{(s)}_{i,l,q}[f]$, $\bar{M}^{(s)}_{j,r}[f]$; $\bar{v}^{(s)}_{i,r} = v\left(x,\mu;\bar{B}^{(s)}_{i,r},\bar{B}^{(s)}_{i,r}\cap F^{(s)}\right)$, $v^{(s)}_{i,k,p} = v\left(x,\mu;B^{(s)}_{i,k,p},B^{(s)}_{i,k,p}\cap F^{(s)}\right)$, $\tilde{v}^{(s)}_{i,l,q} = v\left(x,\mu;\tilde{B}^{(s)}_{i,l,q},\tilde{B}^{(s)}_{i,l,q}\cap F^{(s)}\right)$, где $v^{(s)}_{i,k}(x,\mu)$ - функция, определенная в (19).

Определим асимптотическое разложение:

$$u_s(x) = u_0(x) + r_s(x) + \sum_{j=1}^{4} r^{(j)}_s(x) + w_s(x)\,, \tag{24}$$

где

$$r_s(x) = \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} v^{(s)}_{i,k}\left(x, f^{(s)}_{i,k} - u^{(s)}_{i,k}\right)\varphi^{(s)}_{i,k}(x)\,,$$

$$r^{(1)}_s(x) = \sum_{i\in I'(s)} \sum_{r=1}^{R(i,s)} \left\{\left[\bar{u}^{(s)}_{i,r} - u_0(x)\right] + \left[f(x) - \bar{f}^{(s)}_{i,r}\right]\right\}\omega^{(s)}_{i,r}(x) +$$

$$+ \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \left\langle\left\{\left[u^{(s)}_{i,k} - u_0(x)\right] + \left[f(x) - f^{(s)}_{i,k}\right]\right\}\varphi^{(s)}_{i,k}(x) +\right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{P(i,k,s)} \left\{\left[u^{(s)}_{i,k,p} - u_0(x)\right] + \left[f(x) - f^{(s)}_{i,k,p}\right]\right\}\psi^{(s)}_{i,k,p}(x)\right\rangle +$$

$$+ \sum_{i\in I''(s)} \sum_{l=1}^{L(i,s)} \sum_{q=1}^{Q(i,l,s)} \left\{\left[\tilde{u}^{(s)}_{i,l,q} - u_0(x)\right] + \left[f(x) - \tilde{f}^{(s)}_{i,l,q}\right]\right\}\chi^{(s)}_{i,l,q}(x)\,,$$

$$r^{(2)}_s(x) = \sum_{i\in I'(s)} \sum_{r=1}^{R(i,s)} \bar{v}^{(s)}_{i,r}\left(x, \bar{f}^{(s)}_{i,r} - \bar{u}^{(s)}_{i,r}\right)\omega^{(s)}_{i,r}(x)\,,$$

$$r^{(3)}_s(x) = \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \sum_{p=1}^{P(i,k,s)} v^{(s)}_{i,k,p}\left(x, f^{(s)}_{i,k,p} - u^{(s)}_{i,k,p}\right)\psi^{(s)}_{i,k,p}(x)\,,$$

$$r_s^{(4)}(x) = \sum_{i\in I''(s)} \sum_{l=1}^{L(i,s)} \sum_{q=1}^{Q(i,l,s)} \tilde{v}_{i,l,q}^{(s)}\left(x, \tilde{f}_{i,l,q}^{(s)} - \tilde{u}_{i,l,q}^{(s)}\right) \chi_{i,l,q}^{(s)}(x).$$

В (24) $w_s(x)$ - остаточный член разложения, выяснение поведения которого при $s \to \infty$ и составляет основную цель статьи.

Отметим неравенство, следующее из построений п. 1 и условия b_3):

$$K(i,s)\left[\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right]^{n-\sigma} \le c^{(0)}, \tag{25}$$

с постоянной $c^{(0)}$, не зависящей от s.

Лемма 2. *При выполнении условий $b_1) - b_3)$ имеют место равенства*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I''(s)} K(i,s)\frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^n}{\lambda_s^{n-\sigma}} = \lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I(s)} \left[\rho_i^{(s)}\right]^\sigma = 0, \tag{26}$$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I'(s)} R(i,s)\left[d_i^{(s)}\right]^{n-m} = 0, \tag{27}$$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I''(s)} L(i,s)\left[\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right]^{\sigma+1-m} = 0, \tag{28}$$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I''(s)} L(i,s)\left[\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right]^{\sigma+1} = 0. \tag{29}$$

Следующие утверждения доказываются как в гл.10 [2].

Лемма 3. *Пусть выполнены условия $a_1), a_2), b_1) - b_3)$. Тогда последовательности $r_s^{(1)}(x)$, $r_s^{(2)}(x)$, $r_s^{(3)}(x)$, $r_s^{(4)}(x)$ сильно сходятся к нулю в $W_m^1(\Omega)$.*

Доказательство. Рассмотрим одно типичное слагаемое в $r_s^{(1)}(x)$. Имеем

$$\left\|\sum_{i\in I(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \left[u_{i,k}^{(s)} - u_0(x)\right]\varphi_{i,k}^{(s)}(x)\right\|_{L_m(\Omega)}^m \le K_1 \sum_{i\in I(s)} K(i,s)\frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^n}{\lambda_s^{n-\sigma}}.$$

Здесь и далее через $K_j, j = 1, 2, ...$ обозначены постоянные, не зависящие от s. Правая часть стремится к нулю в силу (26).

Используя неравенство Пуанкаре и определение λ_s, имеем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i\in I(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \left[u_{i,k}^{(s)} - u_0(x)\right]\varphi_{i,k}^{(s)}(x)\right\|_{L_m(\Omega)}^m \le K_2\left(1 + \lambda_s^{-m}\right) \sum_{i\in I(s)} \int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)}, \left(2+\frac{1}{\lambda_s}\right)\rho_i^{(s)}\right)} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m dx$$

и правая часть стремится к нулю в силу (7), (8). Аналогичным образом можно оценить остальные слагаемые в $r_s^{(1)}(x)$.

Докажем теперь сходимость последовательности $r_s^{(2)}(x)$ при $s \to \infty$. Для $r_s^{(3)}(x)$, $r_s^{(4)}(x)$ – доказательство аналогично.

Используя неравенства (1.9) из главы 8 [2], (2.3) из главы 9 [2], имеем

$$\left\|r_s^{(2)}(x)\right\|_{L_m(\Omega)}^m \le K_3 \sum_{i\in I'(s)} \sum_{r=1}^{R(i,s)} \left\|\bar{v}_{i,r}^{(s)}\left(x, \bar{f}_{i,r}^{(s)} - \bar{u}_{i,r}^{(s)}\right)\right\|_{L_m\left(\bar{B}_{i,r}^{(s)}\right)}^m \le$$

$$\leq K_4 \sum_{i\in I'(s)} \left[d_i^{(s)}\right]^m \sum_{r=1}^{R(i,s)} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_{i,r}^{(s)} \left(x, \bar{f}_{i,r}^{(s)} - \bar{u}_{i,r}^{(s)}\right) \right\|^m_{L_m\left(U\left(\bar{B}_{i,r}^{(s)},1\right)\right)} \leq$$

$$\leq K_5 \sum_{i\in I'(s)} R(i,s) \left[d_i^{(s)}\right]^n.$$

Из (27) и условия b_1) следует, что правая часть неравенства стремится к нулю при $s \to \infty$.

Аналогично получаем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s^{(2)}(x) \right\|^m_{L_m(\Omega)} \leq K_6 \sum_{i\in I'(s)} R(i,s) \left[d_i^{(s)}\right]^{n-m}$$

и правая часть стремится к нулю в силу (27).

Лемма 4. *При выполнении условий $a_1), a_2), b_1) - b_3)$ последовательность $r_s(x)$ стремится к нулю сильно в $W_p^1(\Omega)$ при любом $p < m$ и слабо в $W_m^1(\Omega)$.*

Доказательство. Из равномерной ограниченности последовательности $v_{i,k}^{(s)}\left(x, f_{i,k}^{(s)} - u_{i,k}^{(s)}\right)$ следует

$$\|r_s(x)\|^m_{L_m(\Omega)} \leq K_7 \sum_{i\in I(s)} K(i,s) \frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]}{\lambda_s^{n-\sigma}},$$

и правая часть стремится к нулю в силу (26). Используя оценку (1.9) из главы 8 [2] и неравенство (25), получаем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s(x) \right\|^m_{L_m(\Omega)} \leq K_8 \sum_{i\in I(s)} K(i,s) \left\{ \left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right]^{\frac{\sigma-m}{m-1}m} \frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^{n-m}}{\lambda_s^{n-\sigma}} + \left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m} \left[\rho_i^{(s)}\right]^{n-\sigma} \right\} \leq$$

$$\leq K_9 \sum_{i\in I(s)} \left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m},$$

и ограниченность правой части следует из (1), (9). Так как носитель функции $\varphi_{i,k}^{(s)}(x)$ содержится в $G_{i,k}^{(s)}$, то применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s(x) \right\|^m_{L_p(\Omega)} \leq K_{10} \left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s(x) \right\|^m_{L_m(\Omega)} \left\{ \sum_{i\in I(s)} K(i,s) \frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^n}{\lambda_s^{n-\sigma}} \right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{m}}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю в силу (26). Лемма доказана.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Функция $w_s(x)$ - остаточный член асимптотического разложения (24), принадлежит при больших s пространству $\overset{0}{W}{}_m^1\left(\Omega^{(s)}\right)$. При выполнении условий a_1), a_2), $b_1) - b_3$), l_1), l_2) последовательность $w_s(x)$ сильно сходится к нулю в $W_m^1(\Omega)$.*

Доказательство. Принадлежность $w_s(x)$ пространству $\overset{0}{W}{}_m^1\left(\Omega^{(s)}\right)$ непосредственно следует из представления (24), определения функций $v_{i,k}^{(s)}, v_{i,k,p}^{(s)}, \tilde{v}_{i,l,q}^{(s)}, \bar{v}_{i,r}^{(s)}$ и равенства (21). Из лемм 3,4 следует слабая сходимость $w_s(x)$ к нулю в $W_m^1(\Omega)$.

Так как последовательности $r_s(x)$, $r_s^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, 3, 4$ являются ограниченными, то из установленной в леммах 3,4 сильной их сходимости к нулю в $L_m(\Omega)$ следует сильная их сходимость к нулю в $L_r(\Omega)$ при любом $r < \infty$, что является справедливым и относительно сходимости $u_s(x)$ к $u_0(x)$. Таким образом, имеем сильную сходимость $w_s(x)$ в $L_r(\Omega)$ при любом $r < \infty$.

Для доказательства сильной сходимости в $W_m^1(\Omega)$ последовательности $w_s(x)$ подставим в соответствующее граничной задаче (4), (5) интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega^{(s)}} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}dx + \int\limits_{\Omega^{(s)}} a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad (30)$$

при $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1\left(\Omega^{(s)}\right)$ вместо $\varphi(x)$ функцию $w_s(x)$.

Получим

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}dx + \int\limits_{\Omega} a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)w_s(x)\,dx = 0. \qquad (31)$$

Изучим поведение левой части (31) при $s \to \infty$. В силу отмеченной сильной сходимости к нулю в $L_r(\Omega)$ функции $w_s(x)$ при $r < \infty$, условия a_2) и оценки (6) получим, что

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_{\Omega} a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)w_s(x)\,dx = 0. \qquad (32)$$

Представим первое слагаемое левой части (31) в виде

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}dx = I_1^{(s)} + I_2^{(s)} + I_3^{(s)} + I_4^{(s)}, \qquad (33)$$

где

$$I_1^{(s)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}dx,$$

$$I_2^{(s)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}dx,$$

$$I_3^{(s)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial r_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}dx,$$

$$I_4^{(s)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}dx.$$

Используя условие a_2), имеем для $I_1^{(s)}$ оценку

$$\nu_1\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx \le I_1^{(s)}. \qquad (34)$$

Покажем сейчас, что

$$\lim_{s\to\infty} I_2^{(s)} = 0\,, \ \lim_{s\to\infty} I_3^{(s)} = 0\,. \qquad (35)$$

Оценивая по условию a_2) и неравенству Гельдера, получим

$$\left|I_2^{(s)}\right| \le K_{11} \left\{ \int\limits_\Omega \left[1 + \left|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|\right]^m dx \right\}^{\frac{m-2}{m}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_\Omega \left[\left|\frac{\partial r_s^{(1)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s^{(2)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s^{4}}{\partial x}\right|\right]^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} \left\{ \int\limits_\Omega \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю в силу леммы 3 и ограниченности первого и третьего интегралов постоянной, не зависящей от s. Отсюда следует первое равенство в (35).

Для проверки второго равенства в (35) введем функцию $\chi_s(x)$ - характеристическую функцию множества $\bigcup\limits_{i\in I''(s)} \bigcup\limits_{k=1}^{K(i,s)} G_{i,k}^{(s)}$, равную единице на этом множестве и нулю вне его. Имеем

$$I_3^{(s)} = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n h_{s,j}(x) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx + I_5^{(s)}, \tag{36}$$

где $h_{s,j}(x) = [1 - \chi_s(x)]\, a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$,

$$I_5^{(s)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int\limits_{G_{i,k}^{(s)}} \left[a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx.$$

Используя (26), можно доказать, что при $s \to \infty$ последовательность $h_{s,j}(x)$ сильно сходится в $L_{\frac{m}{m-1}}(\Omega)$ к $a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$. Отсюда следует стремление к нулю первого слагаемого в правой части (36). Оценим $I_5^{(s)}$, применяя условие a_2) и неравенство Гельдера:

$$\left|I_5^{(s)}\right| \le K_{12} \left\{ \int\limits_\Omega \left[1 + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|\right]^m dx \right\}^{\frac{m-2}{m}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_\Omega \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} \left\{ \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int\limits_{G_{i,k}^{(s)}} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{37}$$

В правой части (37) последний множитель стремится к нулю в силу (26), остальные ограничены постоянной, не зависящей от s. Отсюда получаем, что $I_5^{(s)} \to 0$, и, тем самым, из (36) следует второе равенство в (35).

Представим $I_4^{(s)}$ в виде

$$I_4^{(s)} = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, 0, \frac{\partial r_s}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx +$$

$$+ \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int\limits_{G_{i,k}^{(s)}} \left[a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, 0, \frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx. \tag{38}$$

Аналогично (37) доказывается, что второе слагаемое в (38) стремится к нулю при $s \to \infty$.

Теперь из (33), (34), (35), (38) получаем

$$\nu_1 \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right|^m dx \le I_s + R_s, \tag{39}$$

где

$$I_s = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x} \left[v_{i,k}^{(s)} \left(x, f_{i,k}^{(s)} - u_{i,k}^{(s)} \right) \varphi_{i,k}^{(s)}(x) \right] \right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j} dx \tag{40}$$

и $R_s \to 0$ при $s \to \infty$.

Введем при $i \in I''(s), k = 1, ..., K(i,s)$ бесконечно дифференцируемые функции $\tau_{i,k}^{(s)}(x)$ так, чтобы удовлетворялись условия:

- носитель $\tau_{i,k}^{(s)}(x)$ содержится в $U\left(\Pi_i^{(s)}, \rho_i^{(s)}\right) \cap G_{i,k}^{(s)}(c'+1)$;
- функция $\tau_{i,k}^{(s)}(x)$ равна единице в $U\left(\Pi_i^{(s)}, \frac{\rho_i^{(s)}}{2}\right) \cap G_{i,k}^{(s)}(c'+2)$;
- значение функций $\tau_{i,k}^{(s)}(x)$ принадлежат [0,1];
- с некоторой, не зависящей от s, i, k постоянной $c^{(1)}$ выполняется оценка

$$\left| \frac{\partial \tau_{i,k}^{(s)}(x)}{\partial x} \right| \le \frac{c^{(1)}}{\rho_i^{(s)}}.$$

Представим интеграл I_s в виде

$$I_s = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x, 0, \frac{\partial v_{i,k}^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[w_s(x) \tau_{i,k}^{(s)}(x) \right] dx + I_s^{(1)} + I_s^{(2)}, \tag{41}$$

где

$$I_s^{(b)} = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int\limits_{E_{i,k}^{(s,b)}} \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x, 0, \frac{\partial \left[v_{i,k}^{(s)} \varphi_{i,k}^{(s)} \right]}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[w_s(x) \left(1 - \tau_{i,k}^{(s)}(x) \right) \right] dx,$$

при $b = 1, 2$ и

$$E_{i,k}^{(s,1)} = \left[U\left(\Pi_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}\right) \backslash U\left(\Pi_i^{(s)}, \frac{\rho_i^{(s)}}{2}\right) \right] \cap G_{i,k}^{(s)}(c'+2),$$

$$E_{i,k}^{(s,2)} = G_{i,k}^{(s)}(c') \backslash G_{i,k}^{(s)}(c'+2). \tag{42}$$

По определению функции $v_{i,k}^{(s)}$ интеграл в первом слагаемом правой части (41) обращается в нуль, так что

$$I_s = I_s^{(1)} + I_s^{(2)}. \tag{43}$$

Для изучения поведения $I_s^{(1)}$, $I_s^{(2)}$ при $s \to \infty$ используются следующие оценки функций $v_{i,k}^{(s)}(x, \mu)$, которые следуют из [3]:

$$\text{a)} \left| v_{i,k}^{(s)}(x, \mu) \right| \le c^{(2)} |\mu| \left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho\left(x, \Pi_i^{(s)}\right)} \right]^{\frac{\sigma - m}{m-1}} \quad \text{при} \quad x \in U\left(G_{i,k}^{(s)}(c'), \tfrac{1}{2}\right), \tag{44}$$

б) $$\int\limits_{E_{i,k}^{(s,1)}} \left[1+\left|\frac{\partial}{\partial x}v_{i,k}^{(s)}(x,\mu)\right|\right]^{m-2}\left|\frac{\partial}{\partial x}v_{i,k}^{(s)}(x,\mu)\right|^2 dx \le$$
$$\le c^{(2)}\mu^2\left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right]^{\frac{\sigma-m}{m-1}}\left[\frac{\rho_i^{(s)}}{\lambda_s}\right]^{n-\sigma}\left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m}\left[d_i^{(s)}+\mu\right]^{m-2}, \tag{45}$$

в) $$\int\limits_{E_{i,k}^{(s,2)}} \left|v_{i,k}^{(s)}(x,\mu)\right|^m dx \le c^{(2)}\mu^m\left[\rho_i^{(s)}\right]^{n-\sigma+m}\left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m}, \tag{46}$$

г) $$\int\limits_{E_{i,k}^{(s,2)}} \left[1+\left|\frac{\partial}{\partial x}v_{i,k}^{(s)}(x,\mu)\right|\right]^{m-2}\left|\frac{\partial}{\partial x}v_{i,k}^{(s)}(x,\mu)\right|^2 dx \le$$
$$\le c^{(2)}\left\{\mu^2\left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m}\left[d_i^{(s)}+\mu\right]^{m-2}\left[\rho_i^{(s)}\right]^{n-\sigma}+\left[\rho_i^{(s)}\right]^n\right\} \tag{47}$$

с не зависящей от s, i, k, постоянной $c^{(2)}$.

Отметим еще при $b=1,2$ оценки

$$\sum_{k=1}^{K(i,s)}\int\limits_{E_{i,k}^{(s,b)}}\sum_{j=1}^{n}\left|w_s(x)\right|^m dx \le K_{13}\left\{\left[\rho_i^{(s)}\right]^m\int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)},r_i^{(s)}\right)}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx+\right.$$
$$\left.+\frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^\sigma}{\left[r_i^{(s)}\right]^\sigma}\int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)},r_i^{(s)}\right)}\left|w_s(x)\right|^m dx\right\}, \tag{48}$$

которые получаются аналогично оценкам (3.44) из главы 10 [2].

С учетом неравенств (48) оценим $I_s^{(1)}$, $I_s^{(2)}$. Имеем

$$\left|I_s^{(b)}\right| \le K_{14}\sum_{i\in I''(s)}\left\{\sum_{k=1}^{K(i,s)}\int\limits_{E_{i,k}^{(s,b)}}\left[1+\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(v_{i,k}^{(s)}\varphi_{i,k}^{(s)}\right)\right|^m\right]dx\right\}^{\frac{m-1}{m}}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)},r_i^{(s)}\right)}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx+\frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma-m}}{\left[r_i^{(s)}\right]^\sigma}\int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)},r_i^{(s)}\right)}\left|w_s(x)\right|^m dx\right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{49}$$

Отсюда и из (44), (45), (12), (25) имеем

$$\left|I_s^{(1)}\right| \le K_{15} \sum_{i\in I''(s)} \left\{ \mu_s^{-\frac{\sigma-m}{m-1}} \frac{\left[d_i^{(s)}\right]^{(\sigma-m)\frac{m}{m-1}}}{\left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{\sigma}{m-1}}} + \left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right)} \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx + \frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma-m}}{\left[r_i^{(s)}\right]^{\sigma}} \int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right)} |w_s(x)|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} \le$$

$$\le K_{16} \mu_s^{-\frac{\sigma-m}{m}} \left\{ \sum_{i\in I''(s)} \frac{\left[d_i^{(s)}\right]^{(\sigma-m)\frac{m}{m-1}}}{\left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{\sigma}{m-1}}} + \mu_s^{\frac{\sigma-m}{m}} \sum_{i\in I''(s)} \left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \times \qquad (50)$$

$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} + K_{16} \left\{ \sum_{i\in I''(s)} \frac{\left[d_i^{(s)}\right]^{(\sigma-m)\frac{m}{m-1}}}{\left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{\sigma}{m-1}}} + \right.$$

$$\left. + \mu_s^{\frac{\sigma-m}{m}} \sum_{i\in I''(s)} \left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left\{ \int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right)} |w_s(x)|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Правая часть неравенства (50) стремится к нулю при $s \to \infty$. В самом деле, в первом слагаемом обе фигурные скобки ограничены в силу условия b_1), неравенства (9) и отмечавшийся ранее слабой сходимости $w_s(x)$ к нулю в $W_m^1(\Omega)$. Так что первое слагаемое правой части (50) стремится к нулю на основании (10). Во втором слагаемом первая фигурная скобка ограничена в силу условия b_1), неравенства (9) и определения $\mu_s, \rho_i^{(s)}$, а вторая стремится к нулю из-за сильной сходимости $w_s(x)$ к нулю в пространстве $L_m(\Omega)$. Таким образом доказано, что $I_s^{(1)} \to 0$ при $s \to \infty$.

Оценим $I_s^{(2)}$, используя (49), (46), (47), (12), (25). Получаем

$$\left|I_s^{(2)}\right| \le K_{17} \sum_{i\in I''(s)} \left\{ \lambda_s^{n-\sigma} \left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m} + \lambda_s^{n-\sigma} \left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right)} \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx + \frac{\left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma-m}}{\left[r_i^{(s)}\right]^{\sigma}} \int\limits_{U\left(\Pi_i^{(s)}, r_i^{(s)}\right)} |w_s(x)|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} \le \qquad (51)$$

$$\le K_{18} \lambda_s^{(n-\sigma)\frac{m-1}{m}} \left\{ \sum_{i\in I''(s)} \left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m} + \sum_{i\in I''(s)} \left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left\{ \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}} +$$

$$+ K_{18} \lambda_s^{(n-\sigma)\frac{m-1}{m}} \mu_s^{\frac{\sigma-m}{m}} \left\{ \sum_{i\in I''(s)} \left[d_i^{(s)}\right]^{\sigma-m} + \sum_{i\in I''(s)} \left[\rho_i^{(s)}\right]^{\sigma} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \times \left\{ \int\limits_{\Omega} |w_s|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

И стремление к нулю правой части (51) при $s \to \infty$ обеспечивается оценками (9), (11), слабой сходимостью $w_s(x)$ к нулю в $W_m^1(\Omega)$, а также равенствами (7), (8), определяющими выбор λ_s, μ_s.

Окончательно получаем из (43), (50), (51)

$$\lim_{s\to\infty} I_s = 0$$

и, тем самым, из (39) имеем сильную сходимость $w_s(x)$ к нулю в $W_m^1(\Omega)$, что и заканчивает доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Марченко В.А., Хруслов Е.Я. *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей* - К.: Наукова думка, 1974. - 278 с.

[2] Скрыпник И.В.*Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач* - М.: Наука, 1990. - 448 с.

[3] Скрыпник И.В., Наумова М.А. *Поточечная оценка решения квазилинейной эллиптической задачи в области с тонкой полостью* // Укр. матем. журн. - 1992. - Т.44, 10. - С. 1417-1432.

Донецкий Национальный Университет,
Математический факультет
ул. Университетская, 24
83055 Донецк, Украина