Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.114-117.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

© Ю.М. Малюта

Киев, Украина

Резюме. Методами твистованной К-теории вычислены топологические заряды $D6$-браны в присутствии B-поля Неве-Шварца.

1. Введение

D-браны являются топологическими солитонами, заряды которых описываются К-группами Гротендика [1]. Одним из наиболее захватывающих открытий теории D-бран является предсказание некоммутативности пространственно-временных координат [2, 3]. Описание этой некоммутативной геометрии реализуется в терминах твистованной К-теории C*-алгебр [4]. Цель настоящей работы - вычисление топологических зарядов $D6$-браны методами твистованной K-теории.

2. Твистованная К-теория

Рассмотрим следующие главные расслоения, описывающие D-браны [5]

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \to & P_H \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} SU(n)/\mathbb{Z}_n & \to & P_H \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n\to\infty} SU(n)/\mathbb{Z}_n & \to & P_H \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array} \tag{3}$$

где X - компактное многообразие.

Эти расслоения характеризуются инвариантом Диксмье-Дуади [6]

$$[H] \in H^3(X,\mathbb{Z}) \ ,$$

которому отвечает напряженность B-поля Неве-Шварца [7], взаимодействующего с D-бранами

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \ .$$

Для расслоения (1)

$$[H] = 0 \ , \quad \text{то-есть} \quad H_{\mu\nu\lambda} = 0 \ , \quad B_{\mu\nu} = 0 \ ;$$

для расслоения (2)

$$n[H] = 0 \ , \quad \text{то-есть} \quad H_{\mu\nu\lambda} = 0 \ , \quad B_{\mu\nu} \neq 0 \ ;$$

для расслоения (3)

$$[H] \neq 0\ , \quad \text{то-есть} \quad H_{\mu\nu\lambda} \neq 0\ , \quad B_{\mu\nu} \neq 0\ .$$

Ассоциированные с главными расслоениями (1) , (2) , (3) векторные расслоения имеют вид [5]

$$E_H = P_H \times \mathbb{C}^n\ , \quad \text{где} \quad Aut(\mathbb{C}^n) = U(n)\ ; \tag{4}$$

$$E_H = P_H \times M_n(\mathbb{C})\ , \quad \text{где} \quad Aut(M_n(\mathbb{C})) = SU(n)/\mathbb{Z}_n\ ; \tag{5}$$

$$E_H = P_H \times \mathcal{K}\ , \quad \text{где} \quad Aut(\mathcal{K}) = \lim_{n\to\infty} SU(n)/\mathbb{Z}_n\ ; \tag{6}$$

($M_n(\mathbb{C})$ - алгебра $n \times n$ матриц, $\mathcal{K}$ - алгебра компактных операторов).

Пространство сечений векторного расслоения (4) является алгеброй непрерывных функций $C_0(X)$;
пространство сечений векторного расслоения (5) является C^*-алгеброй $C_0(X, E_H)$, которая Морита-эквивалентна алгебре Азумая [8];
пространство сечений векторного расслоения (6) является C^*-алгеброй Розенберга $C_0(X, E_H)$ [4].

Рассмотрим короткие точные последовательности [9]

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{B} \to C_0(X, E_H) \to 0 \tag{7}$$

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{B}' \to C_0(X, E_H) \to 0 \tag{8}$$

определяющие расширения алгебры $C_0(X, E_H)$ при помощи алгебры $\mathcal{K}$.

Если в коммутативных диаграммах

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{K} & \to & \mathcal{B} & \to & C_0(X, E_H) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \tau_1 & & \\ 0 & \to & \mathcal{K} & \to & B(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Q}(H) & \to & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{K} & \to & \mathcal{B}' & \to & C_0(X, E_H) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \tau_2 & & \\ 0 & \to & \mathcal{K} & \to & B(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Q}(H) & \to & 0 \end{array}$$

(где $B(\mathcal{H})$ - алгебра ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{Q}(H)$ - алгебра Калкина) морфизмы удовлетворяют условию

$$\tau_2(s) = \pi(U)\tau_1(s)\pi(U)^*$$

(s $\in C_0(X, E_H)$, U - унитарный оператор на $\mathcal{H}$), то расширения (7) и (8) унитарно эквивалентны.

Пусть $Ext(X, [H])$ обозначает множество унитарно эквивалентных классов расширений $C_0(X, E_H)$ с помощью $\mathcal{K}$ по модулю расщепляющихся расширений. Тогда твистованные K-группы определяются следующим образом [9]

$$K_j(X, [H]) = Ext(X \times \mathbb{R}^j,\ p_1^*[H]), \quad j \in \mathbb{N}\ ,$$

где $p_1 : X \times \mathbb{R}^j \to X$ обозначает проекцию на первый сомножитель.
Имеет место периодичность Ботта :

$$K_j(X, [H]) = \begin{cases} K_0(X, [H]) & \text{для четных } j\ , \\ K_1(X, [H]) & \text{для нечетных } j\ . \end{cases}$$

3. Вычисление твистованных K-групп

Пусть $X=S^3$. Вычислим твистованные K-группы $K_0(S^3,n[H])$ и $K_1(S^3,n[H])$ для случая $H_{\mu\nu\lambda}=0$, $B_{\mu\nu}\neq 0$. Для этого применим твистованный вариант спектральной последовательности Атьи-Хирцебруха [10] :

$$E_2^{p,q}=H^p(X,\mathbb{Z}) \qquad (q\ even)\ ,$$

$$E_{r+1}^{p,q}=\frac{ker[d_r:E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}]}{im[d_r:E_r^{p-r,q+r-1}\to E_r^{p,q}]}\ ,$$

$$E_\infty^{p,q}=K_{p+q}(X,n[H])\ .$$

Этапы вычислений выглядят так :

$$E_3^{0,4}=\frac{ker[d_2:E_2^{0,4}\to E_2^{2,3}]}{im[d_2:E_2^{-2,5}\to E_2^{0,4}]}$$

$$E_4^{0,4}=\frac{ker[d_3:E_3^{0,4}\to E_3^{3,2}]}{im[d_3:E_3^{-3,6}\to E_3^{0,4}]}=ker\ d_3$$

$$E_5^{0,4}=\frac{ker[d_4:E_4^{0,4}\to E_4^{4,1}]}{im[d_4:E_4^{-4,7}\to E_4^{0,4}]}$$

$$E_6^{0,4}=\frac{ker[d_5:E_5^{0,4}\to E_5^{5,0}]}{im[d_5:E_5^{-5,8}\to E_5^{0,4}]}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{0,4}=K_0(S^3,n[H])$$

$$E_3^{3,2}=\frac{ker[d_2:E_2^{3,2}\to E_2^{5,1}]}{im[d_2:E_2^{1,3}\to E_2^{3,2}]}$$

$$E_4^{3,2}=\frac{ker[d_3:E_3^{3,2}\to E_3^{6,0}]}{im[d_3:E_3^{0,4}\to E_3^{3,2}]}=coker\ d_3$$

$$E_5^{3,2}=\frac{ker[d_4:E_4^{3,2}\to E_4^{7,-1}]}{im[d_4:E_4^{-1,5}\to E_4^{3,2}]}$$

$$E_6^{3,2}=\frac{ker[d_5:E_5^{3,2}\to E_5^{8,-2}]}{im[d_5:E_5^{-2,6}\to E_5^{3,2}]}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{3,2}=K_1(S^3,n[H])$$

Согласно вычислениям

$$K_0(S^3,n[H])=ker\ d_3\ ,\quad K_1(S^3,n[H])=coker\ d_3\ .$$

Воспользуемся точной последовательностью

$$0 \longrightarrow ker\ d_3 \longrightarrow E_3^{0,4} \xrightarrow{d_3} E_3^{3,2} \longrightarrow coker\ d_3 \longrightarrow 0\ .$$

Редукция этой последовательности к точной последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0$$

приводит к результату :

$$K_0(S^3, n[H]) = 0\ , \qquad K_1(S^3, n[H]) = \mathbb{Z}_n\ .$$

Группа $K_1(S^3, n[H]) = \mathbb{Z}_n$ определяет топологические заряды $D6$-браны в присутствии B-поля Неве-Шварца.

Список литературы

[1] E. Witten, *D-branes and K-theory*, hep-th/9810188.

[2] N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, hep-th/9908142.

[3] A. Connes, *Noncommutative geometry Year 2000*, math.QA/0011193.

[4] J. Rosenberg, *Continuous trace algebras from the bundle theoretic point of view*, Journ. Austr. Math. Soc. **47** (1989) 368.

[5] P. Bouwknegt and V. Mathai, *D-branes, B-fields and twisted K-theory*, hep-th/0002023.

[6] J. Dixmier and A. Douady, *Champs continues d'espaces hilbertiens at de C^*-algebres*, Bull. Soc. Math. France **91** (1963) 227.

[7] E. Witten, *Overview of K-theory applied to strings*, hep-th/0007175.

[8] A. Kapustin, *D-branes in a topologically nontrivial B-field*, hep-th/9909089.

[9] V. Mathai and I.M. Singer, *Twisted K-homology theory, twisted Ext-theory*, hep-th/0012046.

[10] J. Rosenberg, *Homological invariants of extensions of C^*-algebras*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **38** (1982) 35.

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев