Нелинейные граничные задачи, вып. 13, 2003, с. 100-104.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ С ВЫРОЖДЕНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

© Н. Краснощек

Донецк, Украина

Резюме. Доказана локальная по времени разрешимость в весововом гельдеровском пространстве одной системы с вырождением, возникающей в гидродинамике.

1. Система уравнений, которая описывает в лагранжевых координатах (см. [1]) одномерное движение баротропного сжимаемого вязкого газа, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_0\, u_t &= (J\, u_x)_x - p_x, \\ J_t &= -J^2\, u_x, \quad p = (\rho_0 J)^\gamma, \quad \gamma \geq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\rho_0(x)$ - некоторая заданная функция.

Систему (1) будем рассматривать в области $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ при краевых и начальных условиях

$$\begin{gathered} u|_{t=0} = u_0(x), \quad J|_{t=0} = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ (Ju_x - p)\,|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=0} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Задача (1), (2) в предположении, что

$$\rho_0(1) = 0, \quad \rho_0(x) > 0, \quad x \in [0,1), \tag{3}$$

моделирует истечение газа в вакуум в случае, когда в начальный момент времени на свободной границе плотность обращается в нуль.

Классическая разрешимость в целом по времени задачи (1), (2) в невырожденном случае, т.е. $\rho_0(x) \geq \delta > 0, x \in [0,1]$, доказана в работе [2], существование обобщенного решения задачи (1)-(3) получено в работе [1]. Подробный список работ, посвященных изучению системы (1) и систем более сложного вида, может быть найден в работе [3].

В данной работе основное исходное предположение состоит в том, что функцию ρ_o можно записать в виде

$$\rho_o(x) = x^\alpha\, a_o(x), \quad a_o(x) > 0 \text{ при } x \in [0,1]. \tag{4}$$

Мы требуем также, чтобы $\alpha\gamma > 1$. Это, в частности, означает, что функция ρ_o^γ и ее производная по x будут принадлежать некоторому классу Гельдера.

Обозначим $q = 2 + \alpha$, $r(x,y) = |x^{q/2} - y^{q/2}|^{2/q}$.

Введем гельдеровские полунормы

$$\langle u\rangle^{(\beta)}_{q,x,\Omega_T}=\sup_{(x,t),(y,t)\in\Omega_T}\frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{r^{\beta}(x,y)},$$

$$\langle u\rangle^{(\beta)}_{q,t,\Omega_T}=\sup_{(x,t),(y,\tau)\in\Omega_T}\frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\beta/q}},$$

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(\beta)}_{q\Omega_T}=\langle u\rangle^{(\beta)}_{q,x,\Omega_T}+\langle u\rangle^{(\beta)}_{q,t,\Omega_T}.$$

Далее введем следующие пространства:

1) $H^{\beta}_q(\overline{\Omega}_T)$ с нормой

$$||u||^{(\beta)}_{\Omega_T}=\max_{\overline{\Omega}_T}|u|+\langle\langle u\rangle\rangle^{(\beta)}_{q,\Omega_T},$$

2) $H^{1+\beta}_q(\overline{\Omega}_T)$ с нормой

$$||u||^{(1+\beta)}_{\Omega_T}=\max_{\overline{\Omega}_T}|u|+\max_{\overline{\Omega}_T}|u_x|+\langle\langle u\rangle\rangle^{(\beta)}_{q,\Omega_T}+\langle\langle u_x\rangle\rangle^{(\beta)}_{q,\Omega_T},$$

3) $H^{2+\beta}_q(\overline{\Omega}_T)$ с нормой

$$||u||^{(2+\beta)}_{\Omega_T}=|u|^{(2)}_{q,\Omega_T}+\langle\langle x^{\alpha}u_t\rangle\rangle^{(\beta)}_{q,\Omega_T}+\langle\langle u_{xx}\rangle\rangle^{(\beta)}_{q,\Omega_T}+\langle u_x\rangle^{(1+\beta)}_{q,t,\Omega_T},$$

где

$$|u|^{(2)}_{q,\Omega_T}=\max_{\overline{\Omega}_T}|u|+\max_{\overline{\Omega}_T}|u_x|+\max_{\overline{\Omega}_T}|u_{xx}|+\max_{\overline{\Omega}_T}|x^{\alpha}u_t|.$$

Аналогично вводятся пространства $H^{\beta}_q(\overline{\Omega})$, $H^{1+\beta}_q(\overline{\Omega})$, $H^{2+\beta}_q(\overline{\Omega})$- функций, независящих от переменной t.

Условия на данные задачи (1), (2), (4) состоят в следующем

H_1) (условия согласования):

$$u_o(0)=0,\ u_{o_x}(1)=0,\ u_{o_{xx}}(1)=0,\ (\rho^{\gamma}_o)_x(1)=0;$$

H_2) (условия регулярности):

$$\rho^{\gamma}_o\in H^{1+\beta}_q(\overline{\Omega}),\ u_o\in H^{2+\beta}_q(\overline{\Omega}),\ \beta<\min\{\alpha,\tfrac{q}{2}\}.$$

Теорема. *Пусть выполнеы условия H_1, H_2, тогда при достаточно малом значении τ существует единственное классическое решение задачи (1),(2), (4), причем $u\in H^{2+\beta}_q(\overline{\Omega}_\tau)$, $J\in H^{1+\beta}_q(\overline{\Omega}_\tau)$, $J_t\in H^{\beta}_q(\overline{\Omega}_\tau)$.*

2. Прежде всего отметим, что согласно результатам работы [1], если пара (u,J) является решением системы (1)-(3), то имеет место оценка

$$0<\epsilon_o(T)\le J(x,t)\le\epsilon_1(T),\quad (x,t)\in\Omega_T,$$

для произвольного значения времени T. Для удобства, в дальнейшем полагаем, что $T=1$, $\epsilon_o=\epsilon_o(1)$, $\epsilon_1=\epsilon_1(1)$.

Докажем разрешимость в малом по времени задачи (1)-(3), используя принцип сжимающих отображений (см., например, [5]).

Рассмотрим в пространстве $H^{1+\beta}_q(\overline{\Omega}_\tau)$ выпуклое замкнутое множество

$$\mathcal{M}(\tau,K)=\left\{J\in H^{1+\beta}_q(\overline{\Omega}_\tau)\ :\epsilon_o\le J\le 1+\epsilon_1,\ ||u||^{(1+\beta)}_{\Omega_\tau}\le K\right\}.$$

Здесь τ,K -некоторые положительные постоянные, значения которых будут выбраны ниже ($\tau\le 1$).

Для произвольной функции $J \in \mathcal{M}(\tau, K)$ рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered}\rho_0\ u_t\ = (\ J\ u_x\ )_x - p_x, \quad p\ = (\rho_0\ J)^\gamma\ , \quad (x,t) \in \Omega_\tau,\\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in [0,1],\ (Ju_x - p)\,|_{x=1} = 0,\ u|_{x=0} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Пусть уже доказано, что существует $u \in H_q^{2+\beta}(\overline{\Omega}_\tau)$ - единственное решение задачи (5) и справедлива оценка

$$||u||_{\Omega_T}^{(2+\beta)} \leq C\left(|\rho_o^\gamma|_{q,\Omega_T}^{(1+\beta)} + |u_o|_{q,\Omega}^{(2+\beta)}\right). \tag{6}$$

Введем функцию $\overline{J}(x,t)$ из решения задачи

$$\overline{J}_t = -u_x\ \overline{J}^2,\ \overline{J}(x,0) = 1.$$

Таким образом, определен оператор $\mathcal{A}:\ \overline{J} = \mathcal{A}J$, действующий из множества $\mathcal{M}(\tau, K)$ в $H_q^{1+\beta}(\overline{\Omega}_\tau)$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2 работы [5] (с учетом справедливости оценки (6)), можно доказать, что при достаточно малом значении τ и подходящем выборе параметра K, оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим и переводит множество $\mathcal{M}$ в себя. Отсюда следует утверждение Теоремы.

Вернемся к задаче (5). При доказательстве разрешимости данной задачи используется метод регуляризатора (см. [6]), а также результаты работы [4].

Основные аналитические трудности возникают при изучении следующей модельной задачи

$$\begin{gathered}x^\alpha\ w_t - w_{xx} = f(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0,\\ w(x,0) = w_o(x),\ x > 0, \quad w_x(0,t) = \phi(t),\ t > 0.\end{gathered} \tag{7}$$

3. Обозначим $D = (0,\infty)$, $D_T = D \times (0,T)$.

Решение модельной задачи (7) можно записать в виде

$$w(x,t) = \int\limits_0^t ds \int\limits_0^\infty G(x,y,t-s)f(y,s)dy + \int\limits_0^\infty G(x,y,t-s)w_o(y)dy + \int\limits_0^t g(x,t-s)\phi(s)ds,$$

где

$$G(x,y,t) = c_q^{(1)}\ t^{1-1/q}\ exp\ (-(u^2+v^2))\ z^{1/q}\ I_{-1/q}(z),$$

$$g(x,t) = c_q^{(2)} t^{1-1/q} \exp\left(-v^2\right)$$

$$u = \frac{y^{q/2}}{q\ t^{1/2}}, \quad v = \frac{x^{q/2}}{q\ t^{1/2}}, \quad z = 2uv,$$

$c_q^{(1)}$, $c_q^{(2)}$ -некоторые постоянные, зависящие только от параметра q, а $I_{-1/q}(\cdot)$- модифицированная функция Бесселя.

Сформулируем без доказательства две леммы.

Лемма 1. *Имеют место оценки:*

$$|D_t^k D_t^l g(x,t)| \le C t^{\frac{1-l}{q}-1-k} \exp\left(-C\frac{x^q}{t}\right), \quad k \ge 0, \quad 0 \le l \le 2,$$

$$|D_t^k G(x,y,t)| \le C t^{\frac{1}{q}-1-k} \exp\left(-c_k(u-v)^2\right) \begin{cases} 1, & z \le 1, \\ z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & z \ge 1, \end{cases}$$

$$|D_t^k D_x G(x,y,t)| \le C t^{-1-k} \exp\left(-c_k(u-v)^2\right) \begin{cases} v^{1+\frac{\alpha}{q}}(1+u^2), & z \le 1, \\ \frac{1+v}{v^{2/q}} z^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & z \ge 1, \end{cases}$$

где $C > 0$, $0 < c_k < 1$.

Лемма 2. *Пусть* $w_{o_x}(0) = \phi(0)$, $w_{o_{xx}}(0) = 0$, $f(0,t) = 0$, *тогда*

$$x^\alpha w_t(x,t)|_{x=0} = 0, \ \textit{для всех } t \in [0,T],$$

и выполнена оценка

$$\langle\langle x^\alpha w_t\rangle\rangle^{(\beta)}_{q,\Omega_T} + \langle\langle w_{xx}\rangle\rangle^{(\beta)}_{q,\Omega_T} + \langle w_x\rangle^{(1+\beta)}_{q,t,\Omega_T} \le C\left(|f|^{(\beta)}_{D_T} + ||w_o||^{(2+\beta)}_{D} + |\phi|^{\frac{1+\beta}{q}}_{[0,T]}\right).$$

Единственность полученного решения задачи (7) вытекает из следующей леммы (ср. Теорема 2.7, гл.1 работы [6]).

Лемма 3.(Принцип максимума). *Пусть* $f(x,t)$, $w_o(x)$, $\phi(t)$ *- функции, ограниченные соответственно в* $\overline{D}_T$, $\overline{D}$, $[0,T]$; *функция* $w(x,t)$ *непрерывна в полуполосе* $\overline{D}_T$ *и ее модуль не превосходит некоторого числа* M, *тогда для* $w(x,t)$ *справедлива оценка*

$$|w(x,t)| \le c(T)\left(\max_{\overline{D}}|w_o| + \max_{\overline{D}_T}|f| + \max_{[0,T]}|\phi|\right). \tag{8}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\psi(x) = \frac{l^2+m^2}{2((x+l)^2+m^2)} + \frac{1}{2}$, где l, m произвольные положительные положительные постоянные при условии что $m^2 - 3l^2 > 0$. Имеем

$$\tfrac{1}{2} \le \psi(x) \le 1, \quad x \in [0,\infty),$$

$$\psi'(x) \le 0, \quad x \in [0,\infty), \text{ в частности, } \psi'(0) = -\tfrac{1}{l^2+m^2} = -\sigma < 0,$$

$$\psi''(x) = -\frac{(l^2+m^2)(m^2-3(x+l)^2)}{((x+l)^2+m^2)^3}, \text{ так что } \max_{[0,\infty)}\left|\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}\right| \le C_*, \tag{9}$$

$$\psi''(x_*) = 0, \psi''(x) < 0, \text{ при } x \in [0,x_*); \ \psi''(x) > 0, \text{ при } x \in [x_*,\infty);$$

где σ, C_*, x_* - некоторые положительные постоянные, зависящие только от l и m.

Введем следующую функцию

$$u(x,t) = \frac{w(x,t)}{\psi(x)}\, e^{-at} - c_1 - \frac{2M}{R^{2+\alpha}}\left(x^{2+\alpha} + c_2 t\right),$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные, зависящие только от $\max\limits_{[0,T]}|\phi|$, $\max\limits_{[0,\infty}|u_o|$, $\max\limits_{D_T}|f|$ и постоянных l и m.

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что функция u удовлетворяет следующим соотношениям

$$
\begin{gathered}
x^\alpha u_t - u_{xx} - 2\frac{\psi_{xx}}{\psi}u_x + \left(x^\alpha a - \frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)u = F(x,t),\ (x,t)\in D_T,\\
u(x,0) = w_o(x)/\psi(x),\ x>0,\\
u_x(0,t) - \sigma\, u(0,t) = \phi(t) + \sigma\left(c_1 + \frac{M_*}{R^{2+\alpha}}c_2 t\right),\ t>0,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
F(x,t) = e^{-at}\frac{f}{\psi} - c_2x^\alpha - \left(x^\alpha a - \frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)(c_1+c_2t) + 2(2+\alpha)\frac{\psi_x}{\psi}x^{1+\alpha} -\\
-\frac{M_*}{R^{2+\alpha}}\left[\left(x^{2+\alpha}+c_3t\right)\left(x^\alpha a - \frac{\psi_{xx}}{\psi}\right) + x^\alpha\left(c_2 - (2+\alpha)(1+\alpha)\right)\right].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Обозначим через $S_{R,T}$ параболическую границу цилиндра $\Pi_{R,T} = \{(x,t)\ \ x\in (0,R),\ t\in[0,T]\}$. Учитывая, что $\phi(x)\geq 1/2$ и, по предположению, $w(x,t)\leq\ M$, нетрудно убедиться в том, что если

$$
2\max_{[0,\infty)}|u_o| + \max_{[0,T]}|\phi|/\sigma \leq c_1, \tag{12}
$$

то $u(x,t)\leq 0$ при $(x,t)\in S_{R,T}$.

Докажем, что и внутри $\Pi_{R,T}$ функция $u(x,t)$ неположительна. Выберем параметр a так, чтобы выражение $\left(x^\alpha a - \frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)$ было положительно и отделено от нуля для всех $x\in D_T$. Положим $C_o = \inf\limits_{[0,x_*]}\left(x^\alpha a - \frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)$. В силу (9) $C_0>0$. Напомним, что $\max\limits_{[0,\infty)}\left|\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}\right| \leq C_*$. Положим $a_o = (C_o + C_*)x^{-\alpha}$. Очевидно, что при $a = \max\{1, C_o\}$ имеем

$$
\left(x^\alpha a - \frac{\psi_{xx}}{\psi}\right) \geq C_0,\ \text{при } x\in[x_*,\infty).
$$

Пусть $(x^*,t^*)\in\Pi_{R,T}$ - точка локального неотрицательного максимумма функции $u(x,t)$. Возвращаясь к (9)-(12) и полагая, что

$$
\begin{gathered}
c_2 = 2(2+\alpha)(1+\alpha),\\
2\max_{D_T}|f|/C_o \leq c_1,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

имеем $u(x^*,t^*)\leq 0$. Таким образом $u(x,t)\leq 0$ при $(x,t)\in\overline{\Pi}_{R,T}$. Далее при $R\to\infty$ из (9), (12), (13) следует оценка (8). Доказательство леммы завершено.

Работа поддержана Государственным Фондом Фундаментальных Исследований Украины No.01.07/00130.

Список литературы

[1] Терсенов А.С. *Задача об истечении вязкого газа в вакуум* , Динамика сплошной среды, **69** (1985), 82–95.

[2] Кажихов А.В. *Корректность в целом смешанных задач для модельной системы уравнений вязкого газа* , Динамика сплошной среды, **21** (1975), 18–47.

[3] Belov S.Ya., Belov V.Ya. *On a confluence problem for the equations of a viscous heat-conducting gas,* J. Math. Kyoto Univ., **36** (1996), p.597-618.

[4] Базалий Б.В., Дегтярев С.П. *Первая краевая задача для вырождающихся параболических уравнений*, Нелинейные граничные задачи, **3** (1991), с.6-12.

[5] Шелухин В.В. *Однозначная разрешимость задачи о движении поршня в вязком газе*, Динамика сплошной среды, **31** (1977), 132–150.

[6] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* - М.: Наука, 1967.

ИПММ НАН Украины, ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк, Украина