Нелинейные граничные задачи, вып. 13, 2003, с. 85-88.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМИ УСЛОВИЮ ДИНИ

© М. Д. Иванович

Донецк, Украина

Резюме. В работе устанавливается условная теорема существования решения задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений при условии, что коэффициенты уравнений удовлетворяют условию Дини. Применив эту теорему, получим результат о разрешимости задачи Дирихле для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений специального вида.

1. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ рассмотрим квазилинейный оператор Q :

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du) \cdot D_{ij}u + b(x, u, Du), \tag{1}$$

где $x \in \Omega$, (здесь и далее производится суммирование по i, j от 1 до n), $Du = \nabla u$, $D_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. Предположим, что оператор Q - эллиптический в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, это означает, что матрица коэффициентов $[a^{ij}(x, z, p)]$ положительно определена для $\forall(x, z, p)$ принадлежащих $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Ввведем пространства $C^{\omega}(\overline{\Omega})$ и $C^{k,\omega}(\overline{\Omega})$, $k \geq 1$, где функция $\omega(r)$ обладает свойствами модуля непрерывности:

$$C^{\omega}(\overline{\Omega}) = \left\{u : u \in C(\overline{\Omega}),\ ||u||_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{\omega}(\overline{\Omega})} < \infty\right\},$$

где

$$[u]_{C^{\omega}(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{\omega(|x - y|)};$$

и

$$C^{k,\omega}(\overline{\Omega}) = \left\{u : u \in C^k(\overline{\Omega}),\ ||u||_{C^k(\overline{\Omega})} + \sup_{|\beta|=k} [D^{\beta}u]_{C^{\omega}(\overline{\Omega})} < \infty\right\}.$$

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$Q\,u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi(x). \tag{3}$$

Предположим, что коэффициенты $a^{ij}(x, z, p), b(x, z, p)$ принадлежат $C^{\omega}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^{2,\omega}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^{2,\omega}$ и пусть $\omega(r)$ удовлетворяет условию Дини:

$$\tilde{\omega}(r) = \int_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty. \tag{4}$$

Задача (2), (3) известным образом сводится к операторному уравнению: $u = Tu$ в некотором банаховом пространстве.

Пусть $v(x)$ - произвольная функция из пространства Гёльдера $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, где β-некоторое число из $(0,1)$. Рассмотрим задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения:

$$a^{ij}(x,v,Dv)\cdot D_{ij}u + b(x,v,Dv) = 0, \quad x\in\Omega, \tag{5}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi(x). \tag{6}$$

Коэффициенты уравнения (5) принадлежат $C^{\omega'}(\overline{\Omega})$, где $\omega' = \omega(r^{\beta})$. Функция $\omega' = (r)$ вследствие (4) также удовлетворяет условию Дини:

$$\tilde{\omega}'(r) = \int_0^r \frac{\omega'(t)}{t}dt < \infty,$$

поэтому в силу [2], существует единственное решение $u(x)\in C^{\omega'}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (5), (6). Таким образом, определен оператор

$$T: C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\omega'}(\overline{\Omega}), \quad u = Tv.$$

Ясно, что разрешимость задачи (2), (3) эквивалентна разрешимости операторного уравнения:

$$u = Tu, \quad u\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}). \tag{7}$$

Отметим сразу, что уравнение $u=\sigma Tu$, $u\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ эквивалентно задаче Дирихле:

$$a^{ij}(x,v,Dv)\cdot D_{ij}u + \sigma b(x,v,Dv) = 0, \quad x\in\Omega, \tag{9}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \sigma\phi(x), \quad \sigma\in[0,1]. \tag{10}$$

Напомним определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.*Непрерывное отображение банахова пространства в банахово пространство называется компактным, если образы ограниченных множеств являются предкомпактными множествами.*

ТЕОРЕМА 1. *(Лере-Шаудер, специальный случай) Пусть T- компактное отображение банахова пространства $\mathcal{B}$ в себя. Пусть существует постоянная M такая, что для всех $u\in\mathcal{B}$, $\sigma\in[0,1]$, удовлетворяющих уравнению $u=\sigma Tu$, справедливо неравенство: $||u||_{\mathcal{B}}\le M$. Тогда отображение T имеет неподвижную точку.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что оператор Q-эллиптический в $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и что его коэффициенты a^{ij}, b принадлежат $C^{\omega}\left(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\right)$, где ω удовлетворяет условию (4). Пусть $\phi\in C^{2,\omega}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega\in C^{2,\omega}$. Тогда задача Дирихле имеет решение $u(x)\in C^{2,\tilde{\omega}}(\overline{\Omega})$, если для некоторого $\beta\in(0,1)$ существует постоянная M, независящая от u, σ такая, что любое решение $u(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (8), (9) удовлетворяет неравенству*

$$||u||_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} < M. \tag{11}$$

Доказательство вытекает из указанной выше эквивалентности задачи (2), (3) операторному уравнению (7) и Теоремы 1, если только будет установлена компактность оператора $T: C^{1,\beta}(\overline{\Omega})\to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Воспользуемся априорной оценкой решения задачи Дирихле для линейного эллиптического оператора L, с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини ([2]):

$$||u||_{C^{2,\tilde{\omega}}(\overline{\Omega})} \le C\left(||Lu||_{C^{\omega}(\overline{\Omega})} + ||\phi||_{C^{2,\omega}(\overline{\Omega})}\right). \tag{12}$$

Пусть $v(x)\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, тогда в силу определения оператора T, $u=Tv$ является решением задачи Дирихле (5), (6), причем коэффициенты $a^{ij}(x,v,Dv)$, $b(x,v,Dv)\in C^{\omega'}(\overline{\Omega})$, $\omega'=\omega(r^{\beta})$, поэтому в силу (12) имеет место оценка:

$$||u||_{C^{2,\tilde{\omega}'}(\overline{\Omega})} = ||Tv||_{C^{2,\tilde{\omega}'}(\overline{\Omega})} \le C\left(||b||_{C^{\omega'}(\overline{\Omega})} + ||\phi||_{C^{2,\omega'}(\overline{\Omega})}\right). \tag{13}$$

Из оценки (13) следует, что ограниченные множества $\mathcal{A}$ из $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ переходят в ограниченные в $C^{2,\tilde{\omega}'}(\overline{\Omega})$ множества $\tilde{\mathcal{A}} = \{u = Tv,\ v \in \mathcal{A}\}$, а они (по теореме Арцела) являются предкомпактными множествами в $C^2(\overline{\Omega})$ и, следовательно, в $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$.

Докажем теперь непрерывность оператора T. Возьмем последовательность $\{v_m\}$, сходящуюся к v в $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Тогда, так как последовательность $u_m = Tv_m$ предкомпактна в $C^2(\overline{\Omega})$, то любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{T\overline{v}_m\}$ такая подпоследовательность, сходящаяся в $C^2(\overline{\Omega})$ к $u(x)$, $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда, так как $a^{ij}(x, v, Dv) \cdot D_{ij}u + b(x, v, Dv) = \lim\limits_{m\to\infty} \{a^{ij}(x, \overline{v}_m, D\overline{v}_m) \times \times D_{ij}T\overline{v}_m + b(x, \overline{v}_m, D\overline{v}_m)\} = 0$, мы имеем равенство $u = Tv$, из которого следует, что сама последовательность $\{T\overline{v}_m\}$ сходится к $u = Tv$. Тем самым непрерывность T доказана. Следовательно, оператор T компактен. Теорема доказана.

2. Рассмотрим два случая, когда из Теоремы 2 следует разрешимость задачи Дирихле. Предположим, что или оператор Q имеет специальную дивергентную форму:

$$Qu = div A(Du), \tag{14}$$

или $n = 2$ и оператор Q имеет вид:

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du) \cdot D_{ij}u,\ i, j = \overline{1, 2}. \tag{15}$$

Предположим, что граничное многообразие $\Gamma = (\partial\Omega, \phi) = \{(x, z) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} | z = \phi(x)\}$ удовлетворяет условию ограниченности наклона. Это означает, что для любой точки $P \in \Gamma$ существуют две плоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющие уравнения: $z = \pi_P^+(x)$, $z = \pi_P^-(x)$, проходящие через точку P и такие, что выполнены условия:

1) $\pi_P^-(x) \le \phi(x) \le \pi_P^+(x) \le, \forall x \in \partial\Omega$;
2) наклоны этих плоскостей, равномерно по P, ограничены константой K, т.е. $|D\pi_P^{\pm}(x)| \le K$, для всех $P \in \Gamma$.

Если $\partial\Omega \in C^2$, $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega$ - равномерно выпукла, то граничное многообразие Γ удовлетворяет условию ограниченности наклона.

Теорема 3.*Пусть оператор Q имеет или вид (14) или вид (15). Предположим, что оператор Q и функция ϕ удовлетворяет условиям Теоремы 2. Пусть, дополнительно, граничное многообразие $(\partial\Omega, \phi)$ удовлетворяет условию ограниченности наклона. Тогда задача Дирихле $Qu = 0$, $x \in \Omega$, $u|_{\partial\Omega} = \phi(x)$ (2), (3) разрешима в $C^{2,\tilde{\omega}}(\overline{\Omega})$.*

Доказательство следует из Теоремы 2 и того факта, что для операторов вида (14), (15) имеет место априорная оценка (11) ([1, гл.11]).

Заметим, что в общем случае, когда оператор Q имеет вид (1) коэффициент Гёльдера $[Du]_{\beta,\Omega}$ оценивается через $||u||_{C^1(\overline{\Omega})}$ при условии, что коэффициенты $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega} \times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ([1, гл.13]). Поэтому из Теоремы 2 следует следующая условная теорема существования. (Оценка же $||u||_{C^1(\overline{\Omega})}$ достигается при дополнительных требованиях на структуру оператора Q и свойства границы $\partial\Omega$, см. [1]).

Теорема 4.*Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что оператор Q-эллиптический в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, его коэффициенты $a^{ij}(x, z, p) \in C^1(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $b(x, z, p) \in C^{\omega}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^{2,\omega}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^{2,\omega}$, где ω удовлетворяет условию (4). Тогда если существует постоянная M, независящая от u, σ такая, что любое решение класса $C^2(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле $a^{ij}(x, v, Dv) \cdot D_{ij}u + \sigma b(x, v, Dv) = 0$, в Ω, $u|_{\partial\Omega} = \sigma\phi(x)$, $\sigma \in [0, 1]$ удовлетворяет оценке $||u||_{C^1(\overline{\Omega})} < M$, то задача Дирихле $Qu = 0$, $x \in \Omega$, $u|_{\partial\Omega} = \phi(x)$ (2), (3) разрешима в $C^{2,\tilde{\omega}}(\overline{\Omega})$. Если оператор Q имеет дивергентный вид или $n = 2$ то можно предполагать, что $a^{ij} \in C^{\omega}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$.*

Список литературы

[1] Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, М.:-Наука, Главная редакция математической литературы, 1989, 463с.

[2] Иванович М.Д. *О характере непрерывности решений линейных эллиптических уравнений второго порядка* , Вестник МГУ им. М.В.Ломоносова, Сер. Математика, механика, **3** (1966), с.37–47.

Донецкий Национальный Университет,
Математический факультет,
ул.Университетская 24,
83055, Донецк, Украина