Нелинейные граничные задачи, вып.13, 2003, с.56-62.

О НАРУШЕНИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КРУГЕ

© Бурский В.П., Лесина Е.В., Самойлова О.В.

Донецк, Украина

Резюме. **Получен критерий нарушения единственности решения однородной задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка с матричными коэффициентами в единичном круге.**

1. Введение. В работе [1] А.В.Бицадзе привел пример эллиптической системы дифференциальных уравнений, для которой однородная задача Дирихле в круге имеет бесконечный набор линейно независимых полиномиальных решений. Затем им же был найден другой такой пример системы с тем же свойством и введено понятие слабо связанной системы в произвольной области с ляпуновской границей, для которой пространство решений однородной задачи Дирихле в данной области конечномерно. Однако проверка условия слабой связанности вызывает трудности даже в случае круга для скалярного уравнения.

Упомянутые примеры систем могут быть записаны в виде одного скалярного уравнения уже с комплексными коэффициентами. Однородная задача Дирихле в круге для таких уравнений изучена одним из авторов в работе [2]. А именно, рассматривалась задача

$$au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0, \quad x \in K, \quad u|_{\partial K} = 0, \tag{1}$$

a, b, c – постоянные комплексные скалярные коэффициенты, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ –единичный круг. Были выделены уравнения, для которых данная задача имеет нетривиальные решения в $H^2(K)$. Ими оказались уравнения, для которых угол $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ между комплексными характеристиками, где $\operatorname{tg}\varphi_j = -\lambda_j \neq \neq \pm i$, $c\lambda_j^2 + b\lambda_j + a = 0$, является π-рациональным. Кроме того, тем же свойством обладают система $d^2u/d\bar{z}^2 = 0$ (первый пример Бицадзе) и её сопряжённая $d^2u/dz^2 = 0$. Во всех случаях указанная задача имеет счётный набор линейно независимых полиномиальных решений.

В работе [3] рассмотрена однородная задача Дирихле (1) в круге, где a, b, c – комплексные квадратные матрицы порядка n, $u \in H^{2,n}(K)$, $H^{2,n}(K) = (W_2^2(K))^n$ – соболевское пространство вектор-функций и получен критерий нарушения единственности в достаточно сложной труднопроверяемой форме. Поэтому возникает вопрос о более простом описании систем с нарушенной единственностью.

В настоящей работе для частного случая $a = 1$ и коммутирующих матриц b и c получен критерий нарушения единственности в простой форме.

2. Предположения. Рассмотрим однородную задачу Дирихле

$$u|_{\partial K} = 0 \tag{2}$$

в единичном круге $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ на плоскости для уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv u''_{x_1 x_1} + b u''_{x_1 x_2} + c u''_{x_2 x_2} = 0, \tag{3}$$

где b, c – комплексные невырожденные перестановочные $n \times n$ - матрицы. Предполагается, кроме того,что коэффициенты уравнения (3) суть нормальные матрицы, одна из которых (для определённости c) является простой, то есть её минимальный полином совпадает с характеристическим ([4], [5]). Это означает, в частности, что корень из нормальной матрицы существует и является нормальной матрицей.

При сделанных предположениях легко показать,что дискриминант рассматриваемого уравнения есть нормальная матрица. Действительно, в силу простоты c и условия перестановочности матрица b представима в виде полинома от c, что влечет нормальность матрицы $b^2 - 4c$.

Поскольку операция извлечения корня из нормальной матрицы имеет смысл, исходное уравнение естественным образом приводится к виду:

$$(\nabla \cdot a^1)(\nabla \cdot a^2)u = 0. \tag{4}$$

Здесь $a^j = (I, a_2^j)$, $\quad j = 1, 2, \quad I$ – единичная матрица порядка n.

Введем в рассмотрение ортогональные к a^j векторы $\widetilde{a}^j = (-a_2^j, I)/\sqrt{I + (a_2^j)^2}$, $j = 1, 2,$ и матрицы φ_1 и φ_2, для которых

$$\sin\varphi_j = \widetilde{a}_1^j, \quad \cos\varphi_j = \widetilde{a}_2^j, \quad j = 1, 2. \tag{5}$$

В соответствии с принятыми выше обозначениями $\operatorname{tg}\varphi_j = -a_2^j$, $\quad j = 1, 2.$ Это означает, что матрицы φ_1 и φ_2 найдутся в том случае, если ни одно из характеристических чисел $\lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$, $\quad k = \overline{1, n}, \quad$ матриц $(-a_2^1)$ и $(-a_2^2)$ соответственно не равно $\pm i$. Кроме того, будем считать, что символ $(\xi \cdot a^1)(\xi \cdot a^2)$ – невырожденная матрица.

3. Основной результат. Нашим основным результатом является следующая

Теорема. *Для того чтобы задача Дирихле* (1), (2) *имела нетривиальное решение в пространстве* $W_2^2(K)$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое натуральное* $n \geq 2$, *при котором удовлетворялось бы следующее условие:*

$$\det[\sin n(\varphi_2 - \varphi_1)] = 0. \tag{6}$$

При выполнении условия (6) *имеется счтный набор линейно независимых векторно-полиномиальных решений.*

Доказательство начнем со следующей простой леммы.

Лемма. *Пусть для некоторого полинома Q выполняется тождество:*

$$Q(\cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, ..., \cos m\tau, \sin m\tau) \equiv 0 \quad \forall\tau \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Тогда указанное тождество справедливо и для произвольной матрицы τ.

Доказательство леммы.

Если τ – вещественное число, то, разлагая данный полином в ряд Тейлора по степеням τ, будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{q}_k \cdot \tau^k = 0, \tag{8}$$

откуда непосредственно вытекает, что все коэффициенты $\overline{q_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...$.

В случае если τ – произвольная матрица, то, умножая $\overline{q_k}$ на τ^k и суммируя по k, получим представление вида (8), от которого осуществляется переход к записи (7). Что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть $u \in W_2^2(K)$ – некоторое нетривиальное решение задачи (1), (2), $\widetilde{u} \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$ – любое продолжение функции u. Через $\theta = \theta(x)$ обозначим характеристическую функцию круга K:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Подставим функцию $v = \widetilde{u} \cdot \theta$ в левую часть уравнения (2):

$$v_{x_1x_1} + bv_{x_1x_2} + cv_{x_2x_2} = -(x_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2)\widetilde{u}_\nu \delta_{\partial K}. \tag{9}$$

Здесь ν – внешняя нормаль, $\delta_{\partial K}$ – мера, сосредоточенная на границе ∂K круга K:

$(\delta_{\partial K}, \varphi) = \int\limits_{\partial K} \overline{\varphi} dS.$ Умножив обе части равенства (9) на $(|x|^2 - 1)$, получим ноль в правой части:

$$(|x|^2 - 1) \cdot Lv = 0. \tag{10}$$

Теперь к уравнению (10) применим преобразование Фурье: $-(\Delta_\xi + 1)\{(a^1 \cdot \xi)(a^2 \cdot \xi)\widehat{v}\} = 0.$ Отсюда для младшей однородной части v_m степени однородности m будем иметь: $\Delta_\xi\{(a^1 \cdot \xi)(a^2 \cdot \xi)v_m\} = 0.$

Решение w уравнения Лапласа $\Delta_\xi w = 0$ может быть записано в виде:

$$w = const + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(c_n \cos n\tau + d_n \sin n\tau). \tag{11}$$

с некоторыми векторными коэффициентами c_n, d_n. Поскольку в полярных координатах (r, τ)

$$v_m = r^m \sum_{\beta=0}^{m} (A_\beta \cos\beta\tau + B_\beta \sin\beta\tau),$$

то, полагая $w = (a^1 \cdot \xi)(a^2 \cdot \xi)v_m$ в равенстве (11) и принимая во внимание, что $\xi = (r\cos\tau, r\sin\tau)$, при $n = m + 2$ получим:

$$(a^1 \cdot \xi)(a^2 \cdot \xi)v_m(\tau) = c_{m+2} \cdot \cos(m + 2)\tau + d_{m+2} \sin(m + 2)\tau. \tag{12}$$

Заметим, что

$$(a^1\cdot\xi)(a^2\cdot\xi)=(\sqrt{I+(a_2^1)^2}\cos\varphi_1\cos\tau I-\sqrt{I+(a_2^1)^2}\sin\varphi_1\sin\tau I)\times$$
$$\times(\sqrt{I+(a_2^2)^2}\cos\varphi_2\cos\tau I-\sqrt{I+(a_2^2)^2}\sin\varphi_2\sin\tau I)=$$
$$=\sqrt{I+(a_2^1)^2}\cdot\sqrt{I+(a_2^2)^2}(\cos\varphi_1\cos\tau I-\sin\varphi_1 sin\tau I)\times$$
$$\times(\cos\varphi_2\cos\tau I-\sin\varphi_2\sin\tau I)=$$
$$\sqrt{I+(a_2^1)^2}\cdot\sqrt{I+(a_2^2)^2}\cos(\varphi_1+\tau I)\cos(\varphi_2+\tau I).$$

Теперь легко заметить, что левая часть равенства (12) обращается в ноль при $\tau=\frac{\pi}{2}+k\pi-\varphi_j$, $j=1,2$, $k=1,2,\dots$ Очевидно, при указанном значении τ для правой части получается однородная система двух уравнений:

$$\begin{cases}\cos[(m+2)((\frac{\pi}{2}+k\pi)I-\varphi_1)]\cdot c_{m+2}+\sin[(m+2)((\frac{\pi}{2}+k\pi)I-\varphi_1)]\cdot d_{m+2}=0,\\ \cos[(m+2)((\frac{\pi}{2}+k\pi)I-\varphi_2)]\cdot c_{m+2}+\sin[(m+2)((\frac{\pi}{2}+k\pi)I-\varphi_2)]\cdot d_{m+2}=0.\end{cases}\tag{13}$$

В системе (13) первое уравнение домножим слева на $\cos[(m+2)((\frac{\pi}{2}+k\pi)I-\varphi_2)]$, второе – на $(-\cos[(m+2)(\frac{\pi}{2}+k\pi)I-\varphi_1])$. Тогда результатом сложения является следующее уравнение:

$$\sin[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)]\cdot d_{m+2}=0.\tag{14}$$

Так как система (13) имеет нетривиальное решение (c_{m+2},d_{m+2}), то из уравнения (14) вытекает, что матрица $\sin[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)]$ является вырожденной, то есть $\det\{\sin[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)]\}=0$, и, таким образом, найдется номер $n=m+2$, который обеспечивает выполнение требуемого условия (6).

Остается показать справедливость тождества

$$(a^1\cdot\xi)(a^2\cdot\xi)v_m(\tau)-c_{m+2}\cdot\cos(m+2)\tau-d_{m+2}\cdot\sin(m+2)\tau\equiv 0$$

для любой матрицы τ, но этот факт следует непосредственно из доказанной выше леммы для полинома

$$Q(\cos\tau,\sin\tau,..,\cos m\tau,\sin m\tau)=$$
$$=(a^1\cdot\xi)(a^2\cdot\xi)v_m(\tau)-c_{m+2}\cdot\cos(m+2)\tau-d_{m+2}\cdot\sin(m+2)\tau.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Обратно, пусть существует натуральный номер $n\geq 2$, такой, что выполнено условие (6). Тогда найдется некоторый вектор $v\neq 0$, аннулирующий матрицу $\sin n(\varphi_2-\varphi_1)$, то есть

$$\sin n(\varphi_2-\varphi_1)\cdot v=0.$$

Покажем, что для любого $k\in\mathbb{N}$ решением задачи Дирихле (1), (2) является вектор

$$u_k=(T_{2n}^k(\widetilde{a}^1\cdot x)-T_{2n}^k(\widetilde{a}^2\cdot x))\cdot v,$$

где T_{2n} – полином Чебышева, $T_{2n}(\cos\alpha) = \cos(2n\alpha)$, $T_{2n}^k(t) = [T_{2n}(t)]^k$ – степень.

Уравнение (3) после подстановки вектора u в левую часть удовлетворяется тривиально. Остается проверить выполнимость граничного условия (2) для u:

$$T_{2n}^k(\widetilde{a}^1\cdot x) - T_{2n}^k(\widetilde{a}^2\cdot x) = Q(x)[T_{2n}(\widetilde{a}^1\cdot x) - T_{2n}(\widetilde{a}^2\cdot x)]\cdot v|_{\partial K} =$$

$$= Q(x)[T_{2n}(\sin(\varphi_1+\tau I)) - T_{2n}(\sin(\varphi_2+\tau I))]\cdot v =$$

$$= Q(x)[\cos 2n(\frac{\pi}{2}I - \varphi_1 - \tau I) - \cos 2n(\frac{\pi}{2}I - \varphi_2 - \tau I)]\cdot v =$$

$$= Q(x)\{-2\sin n(\pi I - \varphi_1 - \varphi_2 - 2\tau I)\}\sin[n(\varphi_2 - \varphi_1)]\cdot v = 0.$$

Теорема доказана.

4. Примеры.

В заключение приведём два примера дифференциальных уравнений, для которых однородная задача Дирихле в круге имеет нетривиальное решение.

1) Пусть для краткости $n(\varphi_2 - \varphi_1) = n\varphi_0 = A$. Рассмотрим в качестве матрицы A следующую симметрическую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix},$$

где $b\in\mathbb{C}$, a определяется по b. Требуется выполнение условия $\det[\sin A] = 0$, что приводит к нахождению матрицы $\sin A$. Будем считать, как обычно, что $\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \ldots$. Нетрудно показать, что степень матрицы A может быть посчитана по следующей формуле:

$$A^{2k+1} =$$

$$= \begin{pmatrix} b^{2k+1}+C_{2k+1}^2 b^{2k-1}a^2+\ldots+C_{2k+1}^{2k}ba^{2k} & C_{2k+1}^1 b^{2k}a+C_{2k+1}^3 b^{2k-2}a^3+\ldots+a^{2k+1} \\ C_{2k+1}^1 b^{2k}a+C_{2k+1}^3 b^{2k-2}a^3+\ldots+a^{2k+1} & b^{2k+1}+C_{2k+1}^2 b^{2k-1}a^2+\ldots+C_{2k+1}^{2k}ba^{2k} \end{pmatrix},$$

где $k = 0,1,2,\ldots$. Учитывая полученную формулу, после элементарных преобразований искомую матрицу $\sin A$ запишем в виде:

$$\sin A = \begin{pmatrix} \cos a\sin b & \cos b\sin a \\ \cos b\sin a & \cos a\sin b \end{pmatrix}.$$

Теперь условие $\det[\sin A] = 0$ сводится к тригонометрическому уравнению: $\cos^2 a\sin^2 b - \cos^2 b\sin^2 a = 0$, решая которое, мы определяем значение $a = \pm b + n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

Таким образом,

$$A = n\varphi_0 = \begin{pmatrix} b & \pm b + n\pi \\ \pm b + n\pi & b \end{pmatrix}, \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = \begin{pmatrix} \frac{b}{n} & \pm\frac{b}{n}+\pi \\ \pm\frac{b}{n}+\pi & \frac{b}{n} \end{pmatrix}.$$

Матрицы φ_1 и φ_2 выберем следующим образом:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mp g - \pi \\ \mp g - \pi & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

где $g = \frac{b}{n}$. Теперь, принимая во внимание обозначения (5), нетрудно определить матричные векторы $\widetilde{a}^j$ и ортогональные к ним векторы a^j, $j = 1, 2$, уравнения (4):

$$\widetilde{a}^1 = \{\pm \sin g \cdot J,\ -\cos g \cdot I\}; \quad \widetilde{a}^2 = \{\sin g \cdot I,\ \cos g \cdot I\};$$

$$a^1 = \{\cos g \cdot I,\ \pm \sin g \cdot J\}; \quad a^2 = \{-\cos g \cdot I,\ \sin g \cdot I\}.$$

Тогда

$$a = -\cos^2 g \cdot I, \quad b = \frac{1}{2}\sin 2g \cdot (I \mp J), \quad c = \pm \sin^2 g \cdot J,$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Далее, выполнив деление на a, чтобы коэффициентом при $u''_{x_1x_1}$ была единичная матрица, получим искомое уравнение:

$$u''_{x_1x_1} - \frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mp 1 \\ \mp 1 & 1 \end{pmatrix} u''_{x_1x_2} \mp \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u''_{x_2x_2} = 0, \tag{15}$$

где $\gamma = \operatorname{tg} g$. Если обозначить $u = (v, w)$, то уравнение (15) записывается в виде системы скалярных уравнений:

$$\begin{cases} v_{x_1x_1} - \frac{1}{2}\gamma v_{x_1x_2} \pm \frac{1}{2}\gamma w_{x_1x_2} \mp \gamma^2 w_{x_2x_2} = 0, \\ \pm\frac{1}{2}\gamma v_{x_1x_2} \mp \gamma^2 v_{x_2x_2} + w_{x_1x_1} - \frac{1}{2}\gamma w_{x_1x_2} = 0. \end{cases}$$

Детерминант символа в этом случае равен $(\xi_1 - \gamma\xi_2)(\xi_1^3 + \gamma^3\xi_2^3)$, поэтому для невещественного γ^3 система (15) эллиптична.

2) Во втором примере в качестве φ_1 и φ_2 возьмём верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{g}{2} & \mp g - \pi \\ 0 & -\frac{g}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{g}{2} & 0 \\ \pm g + \pi & \frac{g}{2} \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения: $\sin\frac{g}{2} = s$, $\cos\frac{g}{2} = h$, $\pm g + \pi = p$. Теперь после несложных вычислений получим, что

$$\sin\varphi_1 = \begin{pmatrix} -s & -ph \\ 0 & -s \end{pmatrix}, \quad \cos\varphi_1 = \begin{pmatrix} h & -ps \\ 0 & h \end{pmatrix},$$

$$\sin\varphi_2 = \begin{pmatrix} s & 0 \\ ph & s \end{pmatrix}, \quad \cos\varphi_2 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ -ps & h \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{a}^1 = \left\{\begin{pmatrix} -s & -ph \\ 0 & -s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & -ps \\ 0 & h \end{pmatrix}\right\}, \quad \widetilde{a}^2 = \left\{\begin{pmatrix} s & 0 \\ ph & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & o \\ -ps & h \end{pmatrix}\right\};$$

$$a^1 = \left\{\begin{pmatrix} -h & ps \\ 0 & -h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s & -ph \\ 0 & -s \end{pmatrix}\right\}, \quad a^2 = \left\{\begin{pmatrix} -h & 0 \\ ps & -h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & 0 \\ ph & s \end{pmatrix}\right\}.$$

В этом случае коэффициентами искомого уравнения являются матрицы

$$a=\begin{pmatrix} h^2+p^2s^2 & -phs \\ -phs & h^2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix}, \quad c=\begin{pmatrix} -s^2-p^2h^2 & -phs \\ -phs & -s^2 \end{pmatrix},$$

причем после умножения на матрицу a^{-1} уравнение принимает вид (3). А соответствующая система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} (h^2+p^2s^2)v_{x_1x_1}-(s^2+p^2h^2)v_{x_2x_2}+pw_{x_1x_2}-phs\Delta w=0, \\ -phs\Delta v+h^2w_{x_1x_1}-pv_{x_1x_2}-s^2w_{x_2x_2}=0. \end{cases}$$

Список литературы

1. А.В. Бицадзе, *О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными*, Усп. матем. наук **6** (1948), 211-212.
2. В.П. Бурский, *О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге*, Матем. заметки **3** (1990), 32-36.
3. В.П. Бурский, *О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге*, Матем.заметки **1** (1999), 23-27.
4. Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, М: Наука, 1966.
5. М.Маркус, Х.Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*, М: Наука, 1972.

IAMM, R.Luxemburg Str.74,
83114, Donetsk, Ukraine