

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КАНАЛАХ КОЛЛАЙДЕРА

© Я.Л.БОГОМОЛОВ, А.Д.ЮНАКОВСКИЙ

Нижний Новгород, Россия

АБСТРАКТ. The modern perspectives of linear accelerators for electrons and positrons are connected with high- frequency pumping. Therefore these structures need quasi-optical components. One possible variant of such a structure is an accelerator part of supercollider. It is presented as a periodic set of metal rings irradiated by a convergent quasi- cylindrical wave flux. The energy provided in such systems needs using the structure of periodic narrow channels with Bragg reflectors. In case of very narrow channels between the rings the problem of high precision manufacture occurs. Moreover, a discharge can appear. That is why the channels must be wide enough and contain a sequence of mutually phased irregularities.

An optimization problem for this electrodynamic system of energy accumulation is considered. The aim is to achieve a homogeneous electric field of maximum amplitude in near axis domain. A structure period contains two distinct channels. To create the required electromagnetic field, the neighboring channels must have irregularities with different parameters. Each of these irregularities consists of two Bragg reflectors, which are placed in such a manner so that two neighboring channels produce fields equal in amplitude but opposite in sign. To define the optimal parameters one needs to solve a model scattering problem in a strip region with a one Bragg reflector or in a channel with a step-like boundary. Irregularities on rings being manufactured at rather large radii, it is sufficient to investigate the plane case.

To obtain an approximate solution, the method of discrete sources is developed. A new way of source placement is suggested. This construction of source placement permit us to suppress a "resonance" effect. To avoid incorrectness of problem considered, the modification of classical regularization procedure is applied. A comparison of numerical and analytical solutions is performed.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В настоящее время перспективы линейных ускорителей электронов и позитронов (в частности, электрон - позитронных коллайдеров) связывают с использованием все более высокочастотной накачки [1]. Соответственно становится привлекательным использовать в таких структурах компоненты квазиоптического типа. Один из возможных вариантов ускоряющей структуры с квазиоптическим вводом микроволновой энергии представляет собой периодический набор металлических дисков, облучаемых сходящимся квазицилиндрическим потоком [1,2] (Рис. 1). Приосевой объем, аккумулирующий микроволновую энергию, должен представлять собой

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-01-00577)

резонатор с достаточно высокой добротностью. Набор дисков при облучении волновым потоком, однородным в осевом направлении, должен создавать на оси поле с возможно большей величиной пространственной гармоникой, синхронной электронам. Для этого при распространении в двух соседних радиальных каналах волны должны сдвигаться между собой по фазе на 180° .

Период структуры включает в себя, таким образом, два разных канала. При облучении сходящейся цилиндрической монохроматической ($e^{i\omega t}$, $Im\omega = 0$) волной в этой периодической системе идеально проводящих дисков реализуется стоячая волновая структура. В случае, когда граничная поверхность представляет собой поверхность проводника и не зависит от угловой координаты, требуется задать такую форму цилиндрической поверхности $r = r(z)$, чтобы проекция z -овой компоненты электрического поля на первую гармонику по продольной z координате была максимальной. Параметры системы и временную частоту можно подобрать так, чтобы угловая компонента магнитного поля линейно зависела от радиальной координаты

$$H_\varphi = e^{i\omega t} r e^{i(z+\varphi)}, \quad (1)$$

а не задавалась функцией Бесселя. При этом z -овая компонента электрического поля является однородной функцией радиальной координаты

$$E_z = e^{i(\omega t + z + \varphi)}.$$

Если мы сумеем подобрать такую форму дисков, чтобы в приосевой области единственной отраженной волной, порожденной падающей волной (1), была

$$H_s = e^{i\omega t} r e^{-i(z-\varphi)},$$

то мы фактически решим задачу максимизации однородного электрического поля внутри резонатора. При этом поверхность дисков будет отражать все радиально распространяющиеся волны $H_i^{(1)}(r)$ и $H_i^{(2)}(r)$. Приведенная в [3] граничная поверхность

$$r^2 = r_0^2 - 4 \ln |\sin z| \quad (2)$$

дает решение поставленной задачи и хотя и является периодической функцией z , но с периодом π , вдвое меньшим периода требуемой стоячей волны (см. (1)). Создать падающую волну (1) из неограниченно сужающейся при $z \rightarrow 0, \pi, 2\pi, \dots$ области с границей (2) невозможно, поэтому можно рассматривать лишь область $\Omega(r, z)$, ограниченную поверхностью (2) при

$$z_0 < z < \pi - z_0, \quad \pi + z_0 < z < 2\pi - z_0,$$

где z_0 достаточно мало и плоскостями

$$z = z_0, \quad z = \pi - z_0, \quad z = \pi + z_0, \quad z = 2\pi - z_0.$$

Таким образом, в окрестностях точек $z = \pi k$ образуются волноводные каналы, по которым возможна накачка энергии в приосевую область. В [2,3] предложено использовать в каналах систему несимметричных Брэгговских резонаторов для

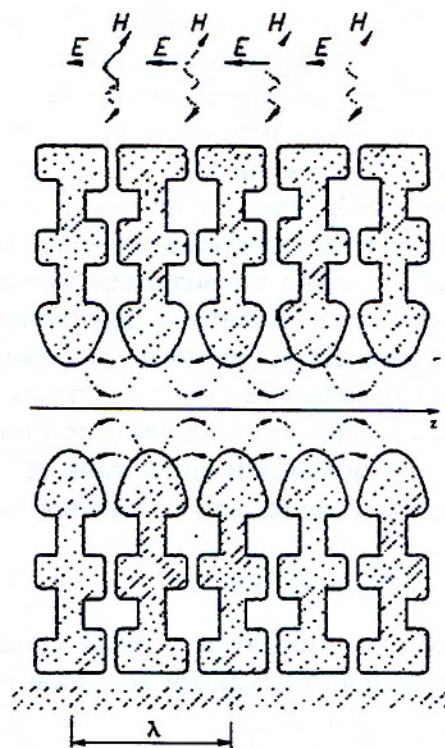


Рис. 1. Продольное сечение электродинамической системы ускорительной секции суперколлайдера.

создания на выходе двух соседних каналов противофазных полей. Эти резонаторы представляют собой уступы (проточки), разная ширина и расположение которых и формируют требуемые поля. В [2,3] найдены оптимальные параметры этих уступов в предположении узости каналов, когда можно ограничиться асимптотическим приближением плоской геометрии.

Для того, чтобы технически обеспечить точную противоположность фаз на выходе двух соседних каналов, нужно максимальное приближение точного решения задачи рассеяния в канале к асимптотическому (см. разд. 2). Поэтому прежде всего необходимо определить, при какой ширине канала по отношению к длине волны λ можно пользоваться асимптотическим представлением решения в канале в виде прямой и отраженной бегущих волн. Для ответа на этот вопрос достаточно рассмотреть плоскую задачу рассеяния при стыке двух бесконечных прямоугольных волноводов разной ширины (см. рис. (2)). Ее решение позволяет делать все оценки погрешности изготовления каналов (ширины, глубины, расположения проточек -Брэгговских рефлекторов) с помощью возмущения параметров асимптотического решения.

2. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим классическую 2-мерную задачу рассеяния о стыке двух волноводов. Возьмем бесконечную по x полосу с уступом по координате y (Рис. 2):

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq y_s & \quad -\infty < x < x_s \\ 0 \leq y \leq d_y & \quad x_s < x < \infty \quad (y_s \leq d_y) \end{aligned} \quad (3)$$

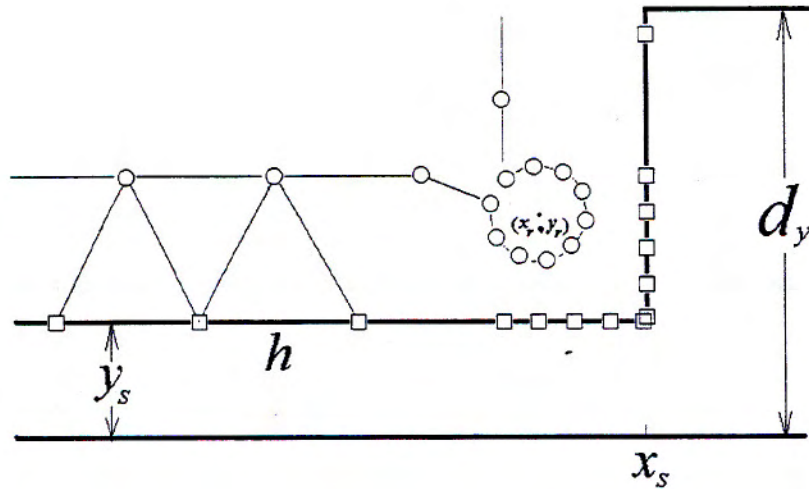


Рис. 2. Схема размещения дискретных источников (кружочки \bigcirc) и точек коллокации (квадратики \square) вдоль границы ступеньки.

Волна H - поляризации удовлетворяет в указанной области уравнению Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + u = 0 \quad (4)$$

и граничному условию идеально проводящей границы

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (5)$$

Если $d_y \leq \pi$, то в рассматриваемой полосе мы имеем только одну распространяющуюся волну. Падающая (входящая) справа волна $u_1(x, y)$ представляет собой решение задачи (4), (5) при $x > x_s$:

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2i} \exp(-ix). \quad (6)$$

Ступенчатая граница генерирует отраженную волну $u_2(x, y)$. Для нахождения $u_2(x, y)$ необходимо решить задачу рассеяния. При этом отраженная (рассеянная) волна $u_2(x, y)$ должна быть уходящей, т.е. должна удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда, гарантирующим единственность решения:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - iu_2 = O(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + iu_2 = O(1), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Решение задачи (4), (5) представляется в виде

$$u = u_1 + u_2. \quad (8)$$

Заметим, что $u_2 \equiv 0$ при $y_s = d_y$. Эти условия гарантируют также существование функции Грина задачи (4) - (7) в полосе $(-\infty < x < \infty, 0 < y < d_y)$:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, \xi) \cos(\mu_n y) \cos(\mu_n \eta), \quad (9)$$

Здесь

$$G_n(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{iD_n}{\lambda_n} \exp[i\lambda_n |x - \xi|] & \text{при } 1 - \mu_n^2 = \lambda_n^2 > 0 \\ -\frac{iD_n}{\lambda_n} \exp[-\lambda_n |x - \xi|] & \text{при } 1 - \mu_n^2 = -\lambda_n^2 < 0 \end{cases},$$

$$D_0 = \frac{1}{2d_y}, \quad D_n = \frac{1}{d_y}, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{d_y}.$$

В случае, когда $d_y \ll \pi$ в области (3) рассматриваемая задача имеет асимптотическое решение [4]:

$$u_r = c_r e^{ix} + d_r e^{-ix}, \quad x > x_s; \quad u_l = d_l e^{-ix}, \quad x < x_s. \quad (10)$$

Здесь $d_r = -\frac{i}{2}$ - амплитуда падающей волны, а d_l , c_r - неизвестные амплитуды уходящих влево и вправо волн. Неизвестные величины d_l , c_r находятся из условий сшивки [4]:

$$u_l(x_s) = u_r(x_s), \quad \frac{\partial u_l}{\partial x}(x_s) = \alpha \frac{\partial u_r}{\partial x}(x_s), \quad (11)$$

здесь $\alpha = d_y/y_s$. Первое соотношение в (10) есть условие непрерывности u , тогда как второе есть следствие формулы Стокса. Из (10), (11) находим

$$d_l = -i \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad c_r = -\frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)} (\sin 2x_s + i \cos 2x_s). \quad (12)$$

Таким образом мы получаем

$$u_l = -i \frac{\alpha}{\alpha + 1} (\sin x + i \cos x), \quad (13a)$$

$$u_r = \left[\frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)} \sin(x - 2x_s) - \frac{1}{2} \sin x \right] + i \left[-\frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)} \cos(x - 2x_s) - \frac{1}{2} \cos x \right]. \quad (13b)$$

Это аналитическое представление приближенного решения может быть использовано для контроля при нахождении численного.

3. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Для нахождения приближенного решения задачи (3)- (8) мы используем метод дискретных источников (МДИ) [5]. Неизвестную рассеянную волну $u_2(x, y)$ ищем в виде

$$u_2(x, y) = \sum_{i=0}^N d_i G(x, y, \xi_i, \eta_i), \quad (14)$$

где $G(x, y, \xi_i, \eta_i)$ - функция Грина (9), ξ_i , η_i - задаваемые координаты источников, d_i - неизвестные амплитуды источников, N - число источников (а также точек

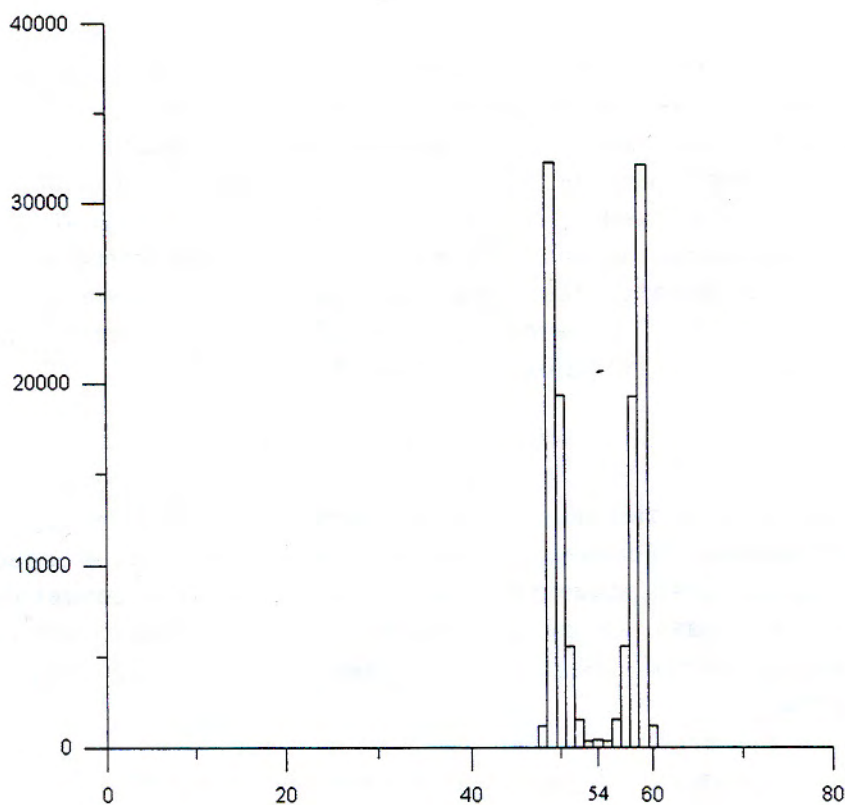


Рис. 3. Характерное распределение весов источников в окрестности угловой точки.

коллокации, т.е. точек, в которых проверяется выполнение граничного условия (5)).

Эта функция удовлетворяет уравнению (4), граничному условию (5) при $y = 0$ и при $y = d_y$ и условиям излучения Зоммерфельда (7). Подставляя (6),(14) в (5) для всех точек коллокации, мы получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для $d_i (i = \overline{1, N})$. В общем случае, когда граница области задается параметрически $(x(s), y(s))$, эта система приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^N d_i \{ G_x(x_j, y_j, \xi_i, \eta_i) \sin \beta_j - G_y(x_j, y_j, \xi_i, \eta_i) \cos \beta_j \} = \frac{1}{2} \exp(-ix_j) \sin \beta_j = -\frac{\partial u_1}{\partial n}(x_j, y_j), \quad j = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Здесь $\operatorname{tg} \beta = y'(s)/x'(s)$. Точки коллокации размещаются только на ступеньке:

$$\{ (-\infty < x \leq x_s, y = y_s); \quad (x = x_s, y_s \leq y \leq y_d) \}. \quad (16)$$

Наиболее сложной частью МДИ является способ размещения источников и точек коллокации. Согласно [6], используя продолжение волновых полей за границу области, в так называемую "нефизическую" область, и локализуя особенности полученных продолжений, источники можно размещать на достаточном удалении от

гладких участков границы. Это позволяет ограничиться в (9) небольшим числом слагаемых. На гладких участках границы наиболее естественным является равномерное с шагом h размещение точек коллокации (см. рис. 2). Источники при этом помещаются в вершинах равнобедренных треугольников, основанием которых являются отрезки между соседними точками коллокации. В окрестности угловой точки (x_s, y_s) , там, где магнитное и электрическое поля имеют особенности, требуется при размещении источников и точек коллокации учитывать специфику этой особенности. Избежать применения интегрального соотношения, называемого "условием на ребре" [5], удастся, задав как бы двойную точку коллокации, в которой выполняются два граничных условия (5):

$$u_x(x_s, y_s + 0) = 0 \text{ и } u_y(x_s - 0, y_s) = 0.$$

В численных расчетах, естественно, берутся точки $(x_s, y_s + \varepsilon)$ и $(x_s - \varepsilon, y_s)$. Такой способ размещения сохраняет симметрию точек коллокации в окрестности угла. В [3] было предложено разместить два дополнительных источника так, чтобы в окрестности угла линия, на которой размещены источники, образовывала петлю. Расположение "петли" (см. рис. (2)) определяется тем, что при размещении источника в точке

$$x_r = x_s - \delta_r h, \quad y_r = y_s + \delta_r h \quad (\delta_r \approx 0.756) \quad (17)$$

СЛАУ (15) становится вырожденной и в численных результатах проявляется явление резонанса. Размещение нескольких дополнительных источников, равномерно расположенных на круге с центром в этой точке, ликвидирует резонанс и меняет характер полюса в этой точке на дипольный. Дополнительные точки коллокации можно разместить равномерно по сторонам угла на интервале длиной h . Не требуется накапливать их к угловой точке (см. рис.(2)).

Это позволило получать линейные системы с квадратными матрицами, не требующими использования методики саморегуляризации [5].

4. ПРОЦЕДУРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Размещая источники согласно Рис. 2, мы избегаем "резонансного" эффекта полюса в точке (x_r, y_r) (см. (18)) у дискретной модели. Тем не менее, мы обнаружили (см. Рис. 4) отличие численного решения от асимптотического ((13a), (13b)). Для некоторых значений параметра (напр. при $\alpha = 2$) это различие является катастрофическим. Кроме того, мы наблюдали странное поведение решения, когда его фаза оказывалась как бы "перевернутой". (см. Рис. 5).

Проблема в том, что задача рассеяния в области (3) при стыке двух бесконечных плоских каналов разной ширины имеет нетривиальное решение

$$u_s = \cos(x - x_s), \quad (18)$$

удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (4), граничному условию (5) на стенках каналов, но не удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда (6). Это решение является собственной функцией непрерывного спектра рассматриваемого оператора при $\lambda = 0$. Так как функция Грина задачи удовлетворяет условиям

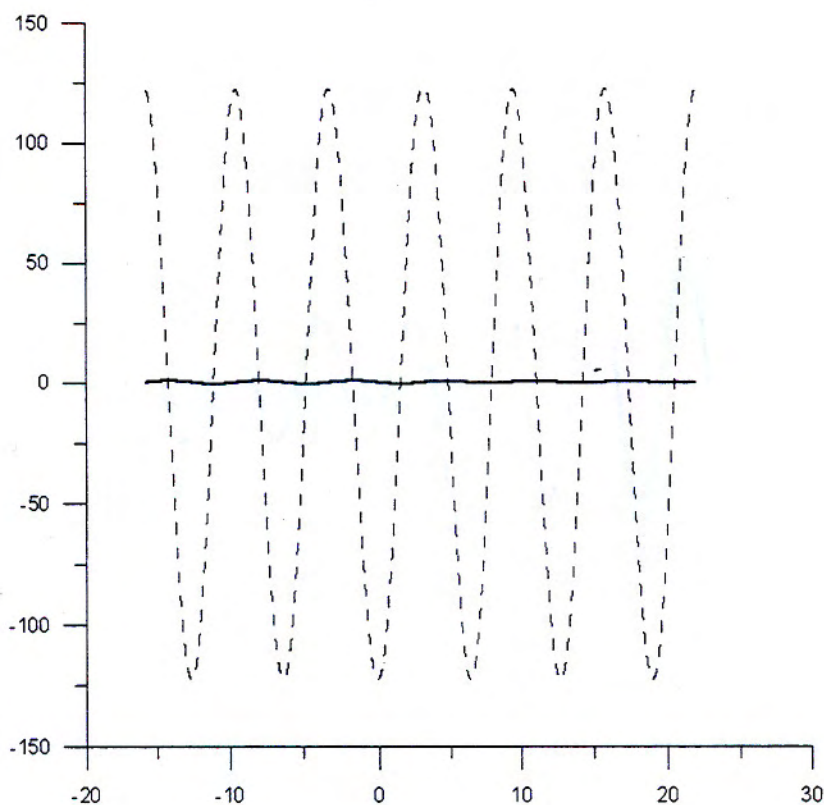


Рис. 4. Резонанс численного решения при отсутствии регуляризации.
 $\alpha = 2$.

излучения Зоммерфельда, то решение граничного интегрального уравнения задачи рассеяния не содержит такого слагаемого. Однако при дискретизации задачи, когда точки коллокации находятся в ограниченной области (в нашем случае на вертикальной стенке и на конечном горизонтальном отрезке, начинающемся в угловой точке), конечномерная задача имеет эту функцию в качестве решения однородной задачи. Иными словами, точка $\lambda = 0$ становится точкой дискретного спектра конечномерной задачи.

Задача осложняется тем, что мы находимся непосредственно в точке резонанса одновременно как для внутренней, так и для внешней области: функция $\cos(x - x_s)$ удовлетворяет уравнению (4) и граничному условию (5) не только в области (3), но и в полуограниченной области "внутренности" ступеньки (образуемого ею резонатора). Считается, что классические граничные уравнения дифракции [7,8] не могут быть непосредственно использованы для численного анализа даже вблизи резонансов внутренней области. При этом исходят из утверждения, что в точках внутреннего резонанса граничный оператор становится вырожденным, и, следовательно, его аппроксимация должна приводить к плохо обусловленной матрице [8]. Метод диссипации, в отличие от обычно применяемого перехода к модифицированным граничным уравнениям (когда известно нетривиальное решение однородной задачи), был рассмотрен в [7,8].

Для решения полученной некорректной задачи, когда нам известна функция u_s , соответствующая $\lambda = 0$, но неизвестны амплитуды источников \vec{d}_0 в представ-

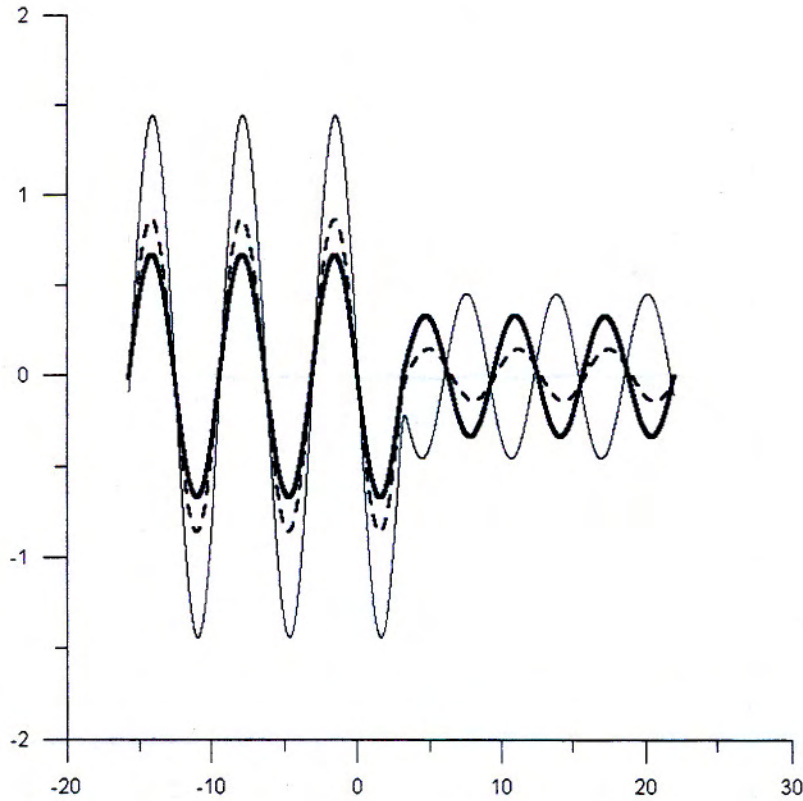


Рис. 5. Эффект регуляризации: Жирной линией нарисовано аналитическое и численное решения при $\epsilon h = 0.001$; Штриховой - при $\epsilon h = 0.003$; тонкой (поворот фазы) - при $\epsilon h = 0.01$

лени (14) для данного расположения источников и точек коллокации, построим соответствующую схему регуляризации исходной дискретной задачи.

Представление решения в виде (14) будем рассматривать как линейный оператор, ставящий в соответствие вектору \vec{d} амплитуд источников вектор $U\vec{d}$ значений поля в точках коллокации. После применения оператора граничных условий A (см. (5)) система уравнений (15) приводится к виду

$$AU\vec{d} = \vec{f}. \quad (19)$$

Обозначим через $\vec{u}_0 = \{\cos(x_k - x_s), k = \overline{1, n}\}$ собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению $\lambda = 0$, т.е.

$$A\vec{u}_0 = 0. \quad (20)$$

Тогда регуляризирующая процедура осуществляется следующим образом:

$$AU\vec{d} + \epsilon h (\vec{u}_0, U\vec{d}) \vec{d}_1 = \vec{f}. \quad (21)$$

Здесь ϵ - малый параметр регуляризации, $\vec{d}_1 = (1, \dots, 1)$ - вектор с единичными компонентами. Заметим, что, следуя классической процедуре регуляризации, следовало использовать в (21) неизвестный вектор \vec{d}_0 вместо \vec{d}_1 . Если же вместо \vec{d}_1

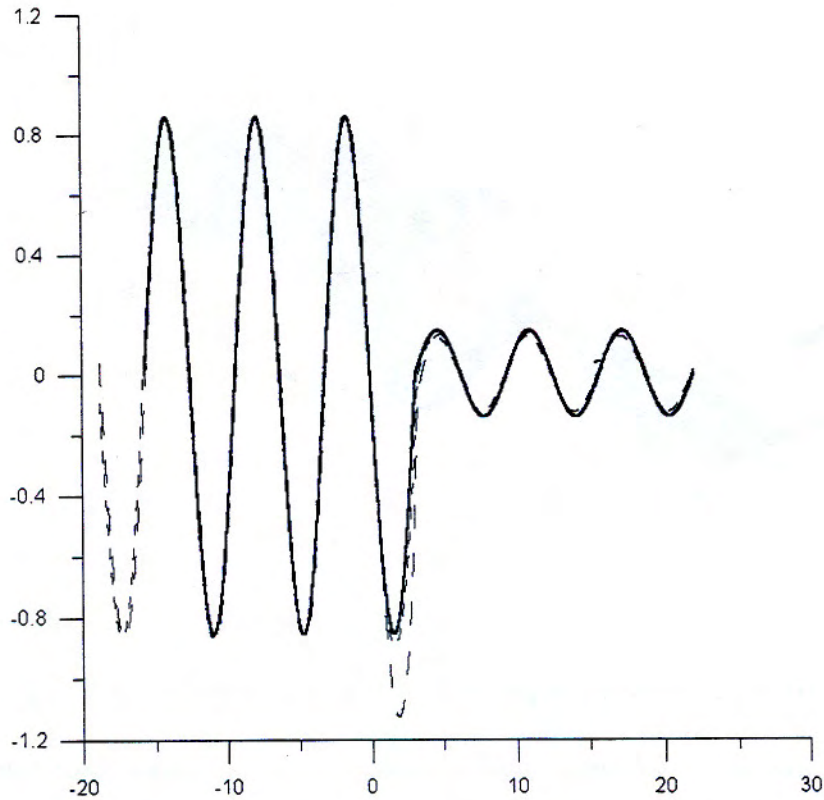


Рис. 6. Влияние ширины канала на численные результаты: жирной линией нарисовано аналитическое решение, штриховой - в широком канале при $d_y = \pi/2$; пунктиром - при $d_y = \pi/3$.

применять вектор \vec{u}_0 , то регуляризуется процедура нахождения вектора $U \vec{d}$, но остается нерегуляризованным нахождение вектора \vec{d} .

Применение регуляризирующей процедуры (21) приводит к Регуляризованной Системе Линейных Алгебраических Уравнений (РСЛАУ):

$$\sum_{i=1}^N \left\{ [G_x(x_j, y_j, \xi_i, \eta_i) \sin \beta_j - G_y(x_j, y_j, \xi_i, \eta_i) \cos \beta_j] + \right. \\ \left. + \varepsilon h \sum_{k=1}^N \cos(x_k - x_s) G(x_k, y_k, \xi_i, \eta_i) \right\} d_i = -\frac{\partial u_1}{\partial n}(x_j, y_j); j = \overline{1, N} \quad (22)$$

На Рис. (5) показана эффективность этой регуляризирующей процедуры.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Схема размещения, представленная на Рис. 2, оказалась оптимальной для сохранения симметрии структуры в окрестности угловой точки, более быстрой сходимости рядов (9) и минимизации числа источников, определяющих главную часть решения. На практике выбранное размещение точек коллокации и дискретных источников улучшало обусловленность систем (15), (22) и увеличивало скорость сходимости численного решения при увеличении числа узлов коллокации. При этом

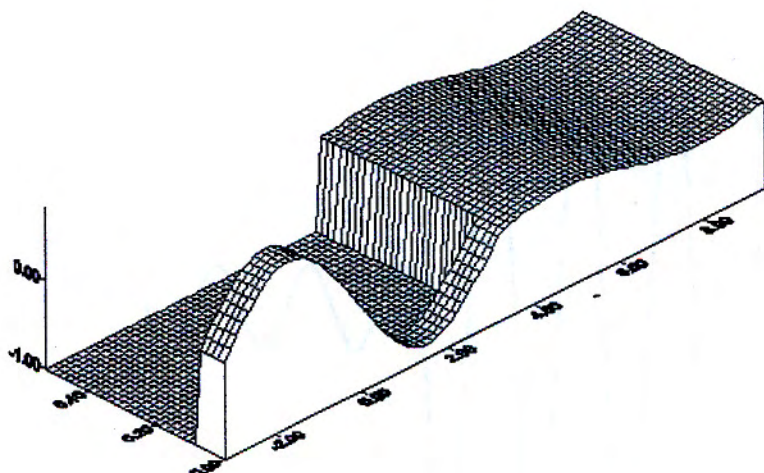


РИС.7. Поведение поля в окрестности угловой точки ($\alpha = 6$, $d_y = \pi/6$).

быстрое спадание значений весов источников по мере удаления от острия ступеньки (Рис. 3) было монотонным и симметричным.

Нетривиальным является выбор параметра δ - отношение высоты рассматриваемого на Рис. 2 треугольника к основанию h . Для случая $0 \leq \delta < 0.5$ мы не получили хороших результатов: численные решения существенно отличались как от аналитического (13), так и друг от друга, взятых для разных значений δ . Для этих значений параметра δ нужно применять обычную методику накопления точек коллокации и источников к угловой точке.

Для $0.5 < \delta < 1$ мы имели практически идентичные результаты для различных значений δ . Успешные результаты в этой области параметров объясняют и неудачу при $0 \leq \delta < 0.5$. В этой области параметра δ треугольники (см.рис. (2)) стали тупоугольными и петля как бы "вывернулась", ушла вглубь. Источники, расположенные между сингулярной точкой (17) и точками коллокации, "экранировали" находящийся в ней диполь. Естественно, что для его воссоздания на незамкнутом контуре требуется дополнительно большое число источников.

В окрестности угловой точки решение задачи (4)-(7) имеет вид:

$$u(x, y) = c_1 J_{2/3}(r) \cos \frac{2}{3} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n J_{2n/3}(r) \cos \frac{2n}{3} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right), \quad (23)$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = (y - y_s)/(x - x_s),$$

$J_{2n/3}(r)$ - функции Бесселя первого рода. На рис. 7 показано поведение поля в окрестности угловой точки. Хорошо видно, что в канале реализуется одномодовый режим распространения волн. Практически по всей ширине канала численное решение совпадает с приближенным решением (13) вплоть до границы уступа. На

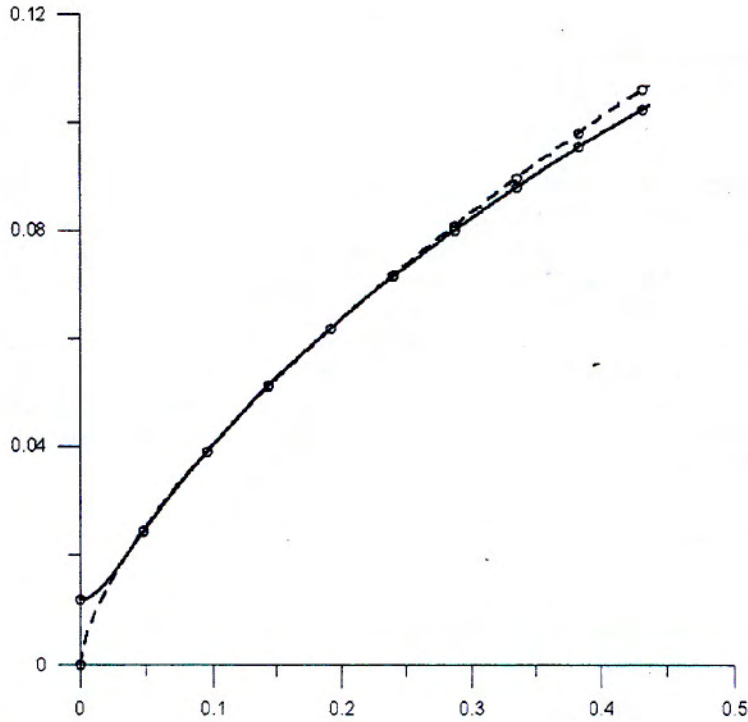


Рис. 8. Численное решение при $y = y_s$ - сплошная линия; аппроксимация кривой $u = c + c_1 r^{2/3}$ по методу наименьших квадратов - пунктир.

рис. 8 изображено поведение приближенного решения вдоль волновода на уровне $y = y_s$. Видно, что приведенная на рис. 2 конфигурация источников хорошо аппроксимирует решение (23) в окрестности угловой точки.

Технологически самая тонкая перегородка (см.рис. 1) должна быть достаточно прочной. Это приводит к дополнительному ограничению на величину зазора между соседними дисками $y_s \sim \frac{\lambda}{9}$ при $\alpha > 6$ в (9). В том случае, когда максимальная ширина канала меньше одной шестой длины волны λ , численное решение совпадает с асимптотическим с высокой точностью (до долей процента) как по амплитуде, так и по фазе. На рис. 6 приведены графики соответствующих решений при $d_y = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Видно, что уже при $d_y = \frac{\pi}{3}$ график численного решения практически неотличим от асимптотического. Это позволяет сохранять прочность конструкции и делать все оценки погрешности изготовления каналов (ширины, глубины, расположения проточек) с помощью возмущения параметров асимптотического решения (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. M.I.Petelin, G.Caryotakis, A.A. Tolkachev, S.V.Kuzikov, G.K.Postoenko, M.L.Tai, A.D.Yunakovsky, *Quasi-Optical Components for MMW Fed Radars and Particle Accelerators*, High Energy Density Microwaves (editor Robert M.Phillips) American Institute of Physics. Woodbury. New York (1998), pp. 304-315.
2. Я.Л.Богомолов, М.И.Петелин, М.Л.Тай, А.Д.Юнаковский, *О синтезе Брэгговских рефлекторов для электронных ускорителей с квазиоптическим вводом излучения*, Изв. ВУЗ-ов Радиофизика (в печати) (2001).

3. Я.Л.Богомолов, А.Д.Юнаковский, *Моделирование электродинамических систем накопления энергии*, Современные методы в теории краевых задач Понтрягинские чтения -XI. Часть I. Воронеж, ВГУ, 2000г., стр. 37-47.
4. J.Schwinger, *Discontinuities in waveguides.*, Gordon Breach Science publishers, N -Y., London, Paris, 1969.
5. Ю.А.Еремин, А.Г.Свешников, *Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции*, М.: Изд. Московского университета, 1992 г., 184с.
6. А.Г.Кюркчан, А.И.Суков, А.Г.Клеев, *Особенности волновых полей и численные методы решения краевых задач для уравнения Гельмгольца*, Успехи современной радиоэлектроники. Зарубежная электроника No 5 (2000), стр. 14-33.
7. Р.П.Тарасов, *Счетная устойчивость граничных уравнений I рода в задачах дифракции вблизи резонансов*, ЖВМиМФ 39 (1999), no. 6, стр. 943-969.
8. И.А.Загороднов, Р.П.Тарасов, *Граничные интегральные уравнения I и II рода в численном решении задач дифракции на многогранниках вблизи резонансов внутренней области*, ЖВМиМФ 40 (2000), no. 10, стр. 1517-1540.

Институт прикладной физики РАН
ул. Ульянова, 46
603600 Нижний Новгород, Россия
E-mail address: yun@appl.sci-nnov.ru