Нелинейные граничные задачи. вып.14, с.152-160, 2004.

©2004. I. Д. Пукальский

ОДНОСТОРОННЯ КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

У просторах класичних функцій з степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку односторонньої крайової задачі для еліптичних рівнянь з довільним степеневим порядком виродження коефіцієнтів. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах.

В сучасних прикладних дослідженнях дуже часто зустрічаються задачі з різними виродженнями та диференціальними нерівностями. Так задача про рух рідини в області, яка обмежена напівпроникливою мембраною, приводить до розв'язання диференціальних нерівностей [1]. Вивчення стану квантомеханічної системи вимагає дослідження рівняння Шредінгера, коефіцієнти якого визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості [2].

В монографії [3] досліджено крайові задачі для еліптичних рівнянь, які не задовольняють умову рівномірної еліптичності. Вивчення узагальнених розв'язків крайових задач для еліптичних рівнянь з степеневими особливостями на межі області проведено в [4, 5].

Ця робота є продовженням дослідження крайових задач для рівнянь з особливостями проведених в [6, 7]. Тут за допомогою апріорних оцінок і принципу максимуму вивчається одностороння крайова задача для еліптичного рівняння другого порядку без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів.

Постановка задачі і основний результат.

Нехай D - обмежена, випукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. Розглянемо в області D для еліптичного рівняння задачу знаходження функції $u(x)$, яка задовольняє при $x \in D \setminus \overline{Q}$ рівняння

$$(Lu)(x) \equiv \left[\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) D_{x_i} + A_0(x)\right] u(x) = f(x), \qquad (1)$$

а на межі області ∂D крайові умови

$$u|_{\partial D} \geq 0, \, (\mathfrak{B}u)(x)|_{\partial D} \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(x) D_{x_k} + b_0(x)\right] u|_{\partial D} \geq g(x), \qquad (2)$$

$$u(\mathfrak{B}u - g)|_{\partial D} = 0,$$

де Q – деяка область з $\mathbb{R}^{n-1}$, $\overline{Q} \subset D$.

Порядок особливості коефіцієнтів оператора L буде характеризувати функція - $a(k,x)$: $a(k,x) = \min(|x-y|^k, 1)$ при $k \geq 0$; $a(k,x) = \max(|x-y|^k, 1)$ при $k < 0$, $|x-y| = \min\limits_{y \in \overline{Q}} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$, $x \in \overline{D} \setminus \overline{Q}$.

Нехай $P(x)$, $P_1(x^{(1)})$, $B_k(x^{(2)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{k-1}^{(1)}, x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ – довільні точки із $\bar{D}$. Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2).

$C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; q; D)$ – множина функцій $u(x)$, які визначені в $\bar{D}$, мають неперервні частинні похідні в області $D \setminus \overline{Q}$ до другого порядку і скінченну норму

$$|u; \gamma, \beta; q; D|_{2+\alpha} = \sum_{j=0}^{2} |u; \gamma, \beta; q; D|_j + [u; \gamma, \beta; q; D]_{2+\alpha},$$

де, наприклад,

$$[u; \gamma, \beta; q; D]_{2+\alpha} = \sum_{i,k,j=1}^{2} \sup_{P_1, B_k \in \bar{D}} (a(q + 2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_k), \widetilde{P}) |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} \times$$

$$\times |D_{x_i} D_{x_j} u(P_1) - D_{x_i} D_{x_j} u(B_k)|,$$

$$|u; \gamma, \beta; 0; D|_0 \equiv \sup_{P \in \bar{D}} |u(P)| \equiv |u|_D.$$

$a(q, \widetilde{P}) = \min(a(q; P_1); a(q; B_k))$, $\gamma \geq 0$, $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$, $q \geq 0$.

$C^{m+\alpha}(q; D)$ – множина функцій $u(x)$ визначених в $\bar{D}$, для яких скінченна норма

$$\|u; q; D\|_{m+\alpha} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{P \in \bar{D}} a(r + j, x) |D_x^j u(P)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sup_{P_1, B_k \in \bar{D}} \{a(r + m + \alpha; \widetilde{P}) |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} |D_x^m u(P_1) - D_x^m u(B_k)|.$$

Нехай для задачі (1), (2) виконані такі умови:

а) коефіцієнти $A_i(x) \in C^\alpha(r_i; D)$, $A_0(x) \in C^\alpha(\delta, D)$, $A_0(x) < 0$, $r_i \geq 0$, $\delta \geq 0$, $A_{ij}(x) \in C^\alpha(\beta_i + \beta_j; D)$ і виконується умова рівномірної еліптичності [8, с. 36] для рівняння

$$\sum_{ij=1}^{n} a(\beta_i + \beta_j, x) A_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j} u(x) = f_1(x);$$

б) вектори $\vec{b}^{(a)} = \{b_1^{(a)}, \ldots, b_n^{(a)}\}$, $b_k^{(a)} = a(\beta_k, x) b_k(x)$ і $\vec{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_k = b_k(x) \cdot |\vec{b}|^{-1}$, $|\vec{b}| = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2(x)\right]^{1/2}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до ∂D в точці $P \in \partial D$ кут менший $\frac{\pi}{2}$, $b_k(x) \in C^{1+\alpha}(\partial D)$, $b_0(x) \in C^{1+\alpha}(\partial D)$, $b_0(x) > 0$;

в) поверхня ∂D належить $C^{2+\alpha}$, $\min\limits_{x \in \partial D, y \in \overline{Q}} |x - y| \geq l > 0$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1), (2) виконані умови а) – в), функція* $f(x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; \delta; D)$, $g(x) \in C^{1+\alpha}(\partial D)$, $\gamma = \max(\max\limits_i(1 + \beta_i), \max\limits_i(r_i - \beta_i), \frac{\delta}{2})$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) в просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$ *і для нього правильна оцінка*

$$|u; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha} \leq c\Big(|f; \gamma, \beta; \delta; D|_\alpha + |g|_{C^{1+\alpha}(\partial D)}\Big), \tag{3}$$

c залежить від l, α, n, $diamD$ і норми коефіцієнтів операторів L і $\mathfrak{B}$.

Оцінки розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами.

Нехай $D_m = \left\{x, x \in D, a(1,x) \geq m^{-1}, m > 1\right\}$ – зростаюча послідовність областей з гладкою межею ∂D_m, $\partial D_m \in C^{2+\alpha}$. Розглянемо в області D односторонню крайову задачу для еліптичного рівняння

$$(L_1 u_m)(x) \equiv \left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{x_i} + a_0(x)\right] u_m(x) = f_m(x), \tag{4}$$

$$u_m(x)|_{\partial D} \geq 0, \quad (\mathfrak{B} u_m)(x)|_{\partial D} \geq g(x), u_m(\mathfrak{B} u_m - g)|_{\partial D} = 0. \tag{5}$$

Тут $a_{ij}(x) = A_{ij}(x)$, $a_i(x) = A_i(x)$, $a_0(x) = A_0(x)$, $f_m(x) = f(x)$, якщо $x \in D_m$. Для $x \in D \setminus D_m$ коефіцієнти $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$ і функція $f_m(x)$ є розв'язками при $t = 1$ внутрішньої крайової задачі

$$D_t v = \Delta v, v(0,x) = 0, \left.\frac{dv}{d\vec{n}}\right|_{\Gamma_m} = \psi(x)$$

в області $(t,x) = (0,2) \times (D \setminus D_m)$, $\Gamma_m = (0,2) \times (x, x \in D, a(1,x) = m^{-1})$, де, наприклад, для $a_{ij}(x)$, $\psi(x) \equiv A_{ij}(x)|_{\Gamma_m}$.

Теорема 2 *Нехай $u_m(x)$ – класичний розв'язок задачі (4), (5), $f(x) \in C^0(\gamma, \beta; \delta; D)$, $g(x) \in C(\partial D)$ і виконані умови а) – в). Тоді для $u_m(x)$ правильна оцінка*

$$|u_m| \leq \max\left(|f_m a_0^{-1}|_D, |b_0^{-1} g|_{\partial D}\right). \tag{6}$$

Доведення. Можливі три випадки: $u_m(x)$ недодатне в $\overline{D}$, або найбільше в $\overline{D}$ додатне значення $u_m(x)$ досягається на межі ∂D, або найбільше в $\overline{D}$ значення досягається в точці $P_1 \in D$. В першому випадку $\max\limits_{\overline{D}} u_m(x) \leq 0$; в другому – $0 < \max\limits_{\overline{D}} u_m(x) = \max\limits_{\partial D} u_m(x) = u_m(P_2)$.

Враховуючи умову (5), маємо

$$u_m(\mathfrak{B} u_m - g)|_{P_2} = 0.$$

Оскільки $u_m(P_2) > 0$, то $(\mathfrak{B} u_m - g)|_{P_2} = 0$. В точці P_2 маємо $\frac{du_m}{d\vec{e}} \geq 0$ (вектор $\vec{e}$ задовольняє умову б)), тому з крайової умови знаходимо

$$u_m(P_2) \leq b_0^{-1}(P_2) g(P_2).$$

В третьому випадку $0 < \max\limits_{\overline{D}} u_m(x) = u_m(P_1)$, причому в точці P_1 виконуються співвідношення

$$D_{x_i} u_m = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} u_m(P_1) \leq 0$$

і рівняння (4).

Оскільки в точці максимума похідні $D_{x_i}D_{x_j}u_m$ по довільному напрямку

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} a(\beta_i, x^{(1)})(x_i - x_i^{(1)}), \quad (\det \|\alpha_{ki}\| \leq 0)$$

недодатні, а вираз

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} u_m = \sum_{k,r=1}^{n} \left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\beta_i + \beta_j, x^{(1)}) a_{ij}(P_1) \alpha_{ki} \alpha_{rj} \right) D_{z_k} D_{z_r} u_m =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu_k D_{z_k} D_{z_k} u_m,$$

причому характеристичні числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ додатні, то враховуючи (4) в точці P_1, маємо

$$u_m(P_1) \leq f_m(P_1) a_0^{-1}(P_1).$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого недодатнього значення функції $u_m(x)$, знаходимо

$$u_m(x) \geq \min \left(0, \min_{\overline{D}} f_m(x) a_0^{-1}(x), \min_{\partial D} b_0^{-1}(x) g(x) \right).$$

Отже, для розв'язку задачі (4), (5) правильна оцінка (6).

Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(D)$ норму $|u_m;\gamma,\beta;q;D|_{2+\alpha}$ еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається як $|u;\gamma,\beta;q;D|_{2+\alpha}$, тільки замість функції $a(k,x)$ беремо $d(k,x)$: $d(k,x) = a(k,x)$ при $|x-y| \geq m^{-1}$; $d(k,x) = m^{-k}$, при $|x-y| \leq m^{-1}$.

Теорема 3 *Якщо виконані умови теореми 1, то для розв'язку задачі (4), (5) правильна оцінка*

$$|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} \leq c(|f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha + |g|_{C^{1+\alpha}(\partial D)}), \tag{7}$$

стала c не залежить від m.

Доведення . Використовуючи означення норми $|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}$ і інтерполяційні нерівності ([9], с. 104), маємо

$$|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha)[u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha} + c(\varepsilon)|u_m|_D.$$

Тому досить оцінити $[u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha}$. З означення півнорми випливає існування в $\bar{D}$ точок P_1 і B_k, для яких виконується нерівність

$$\frac{1}{2}[u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha} \leq E \equiv \sum_{k,i,j=1}^{n} d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_k); \widetilde{P}) |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} \times$$

$$\times |D_{x_i} D_{x_j} u_m(P_1) - D_{x_i} D_{x_j} u_m(B_k)|.$$

Якщо $|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}| \geq 4^{-1} \eta d(\gamma - \beta_k, \widetilde{P}) n^{-1} \equiv T$, $\eta \in (0,1)$, то

$$E \leq 2\varepsilon^\alpha [u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha} + c(\varepsilon)|u_m|_D. \tag{8}$$

Нехай $|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}| \leq T$. Будемо вважати, що $d(\gamma; \widetilde{P}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$. Розглянемо випадок $|x^{(1)} - y| \leq 2nT$, $|x_n^{(1)} - y_n| \leq 2T$, $y \in \partial D$. Позначимо через $K(R, P)$ кулю радіуса $R \geq 4nT$, яка містить точки P_1 і B_k з центром в точці $P \in \partial D$. Враховуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K(R, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ ([9], с. 126), в результаті якого область $\Pi = D \cap K(R, P)$ переходить в Π_1, для точок якої $y_n \geq 0$. Вважаємо, що P_1, B_k, E, $d(\gamma; x^{(1)})$, $u_m(x)$, T переходять при цьому перетворенні, відповідно в M_1, N_k, E_1, $d_1(\gamma, y^{(1)})$, $v_m(y)$, T_1. Позначимо коефіцієнти операторів L і $\mathfrak{B}$ в області Π_1 через $k_{ij}(y)$, $k_i(y)$, $k_0(y)$, $h_k(y)$, $h_0(y)$. Тоді $v_m(y)$ буде розв'язком задачі

$$\left(\sum_{ij=1}^{n} k_{ij}(M_1) D_{y_i} D_{y_j} + \lambda\right) v_m(y) = \sum_{ij=1}^{n} (k_{ij}(M_1) - k_{ij}(y)) D_{y_i} D_{y_j} v_m -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} k_i(y) D_{y_i} v_m - (k_0(y) - \lambda) v_m + f_m(\psi(y)) \equiv F_1(y), \tag{9}$$

$$(\mathfrak{B}_1 v_m)(y)|_{y_n=0} \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} h_k(M_1') D_{y_k}\right] v_m|_{y_n=0} \geq \left[\sum_{k=1}^{n} (h_k(M_1') - h_k(y)) D_{y_k} v_m - \right.$$

$$\left. - h_0(y) v_m + g_m(\psi(y))\right]|_{y_n=0} \equiv G_1(y)|_{y_n=0}, \tag{10}$$

$$v_m|_{y_n=0} \geq 0, \qquad v_m(\mathfrak{B} v_m - G_1)(y)|_{y_n=0} = 0,$$

де λ – довільне число, $\lambda \leq \sup\limits_{\overline{D}} a_0(x)$, $M_1' = M_1(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}, 0)$.

В задачі (9), (10) зробимо заміну $v_m(y) = \omega_m(z)$, $z_i = d_1(\beta_i, y^{(1)}) y_i$, $i = \overline{1, n}$. Тоді $\omega_m(z)$ буде розв'язком задачі

$$(L_2 \omega_m)(z) = [\sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i + \beta_j, y^{(1)}) k_{ij}(M_1) D_{z_i} D_{z_j} + \lambda] \omega_m = F_1(\widetilde{z}),$$

$$(\mathfrak{B}_0 \omega_m)(z) \equiv [\sum_{i=1}^{n} d_1(\beta_i, y^{(1)}) h_i(M_1') D_{z_i} \omega_m]_{z_n=0} \geq G_1(\widetilde{z}),$$

$$\omega_m|_{z_m=0} \geq 0, \omega_m(\mathfrak{B}_0 \omega_m - G_1)(z)|_{z_n=0} = 0,$$

$\widetilde{z} = (d_1^{-1}(\beta_1, y^{(1)}) z_1, \ldots, d_1^{-1}(\beta_n, y^{(1)}) z_n)$.

Позначимо через $H_\rho = \{z, |z_i - z_i^{(1)}| \leq 4^{-1} \eta \rho d(\gamma, y^{(1)}) n^{-1}, i = \overline{1, n}, z_i^{(1)} = d_1(\beta_i, y^{(1)}) y_i^{(1)}$, $z_n \geq 0$, $\rho \in (0, 1)\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\mu(z)$:

$$\mu(z) = \begin{cases} 1, & z \in H_{1/4}, \quad 0 \leq \mu(z) \leq 1; \\ 0, & z \notin H_{3/4}, \quad |D_z^k \mu(z)| \leq c_k d_1^{-k}(\gamma, y^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(z) = \omega_m(z) \mu(z)$ задовольняє крайовій задачі

$$(L_2 W_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i + \beta_j, y^{(1)}) k_{ij}(M_1) [D_{z_i} \omega_m D_{z_j} \mu + D_{z_i} \mu D_{z_j} \omega_m] + \omega_m(z) \times$$

$$\times[\sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i+\beta_j, y^{(1)})k_{ij}(M_1)[D_{z_i}D_{z_j}\mu] + \mu(z)F_2(\widetilde{z}) \equiv F_3(z), \tag{11}$$

$$(\mathfrak{B}_0 W_m)(z)|_{z_n=0} \geq [\sum_{i=1}^{n} d_1(\beta_i, y^{(1)})h_i(M_1')\omega_m D_{z_i}\mu + \mu(z)G_1|_{z_n=0} \equiv G_2(z)|_{z_n=0},$$

$$W_m|_{z_n=0} \geq 0, \quad W_m(\mathfrak{B}_0 W_m - G_2)(z)|_{z_n=0} = 0. \tag{12}$$

Можливі два випадки: існують точки межі $\Pi_1 \cap (z_n = 0)$, в яких виконується умова

$$(\mathfrak{B}_0 W_m - G_2)(z)|_{z_n=0} = 0, \tag{13}$$

або таких точок не існує, тобто $(\mathfrak{B}_0 W_m - G_2)(z)|_{z_n=0} > 0$, тоді з крайової умови (12) маємо

$$W_m|_{z_n=0} = 0. \tag{14}$$

Нехай має місце перший випадок, тоді досліджуємо задачу (11), (13). Коефіцієнти рівняння (11) і крайової умови (13) обмежені сталими, не залежними від M_1. Тому використовуючи теорему 3.2 ([8], с. 179), для довільних точок $S_1(s^{(1)})$ і $S_2(s^{(2)}) \in H_{1/4}$, маємо

$$|s^{(1)} - s^{(2)}|^{-\alpha}|D_{s_i}D_{s_j}\omega_m(S_1) - D_{s_i}D_{s_j}\omega_m(S_2)| \leq$$
$$\leq c(|F_3|_{C^\alpha(H_{3/4})} + |G_2|_{C^{1+\alpha}(H_{3/4}\cap(z_n=0))} + |\omega_m|_{H_{3/4}}). \tag{15}$$

Враховуючи властивості функції $\mu(z)$, нерівність $d_1(\gamma, s^{(1)}) \geq d_1(\gamma, y^{(1)})$ для $S(s) \in H_{3/4}$, знаходимо

$$|F_3|_{C^\alpha(H_{3/4})} \leq cd_1^{-1}((2+\alpha)\gamma, y^{(1)})(|F_2;\gamma,0;2\gamma;H_{3/4}|_\alpha + |\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}|_2 +$$
$$+|\omega_m|_{H_{3/4}}), \tag{16}$$
$$|G_2|_{C^{1+\alpha}(H_{3/4}\cap(z_n=0))} \leq c_1 d_1^{-1}((2+\alpha)\gamma, y^{(1)})(|g|_{C^{1+\alpha}(\partial D)} +$$
$$+|\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}|_2 + |\omega_m|_{H_{3/4}}).$$

Із визначення простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_2|\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}|_r \leq |v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_r \leq c_3|\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}|_r,$$

$$V_\rho = \{y, y \in \Pi_1, |y_i - y_i^{(1)}| \leq 4\rho T_1\}.$$

Підставляючи (16) в (15) і повертаючись до змінних y, одержимо

$$E_1 \leq c_4(|F_2;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha + |g|_{C^{1+\alpha}(\partial D)} + |v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_2 + |v_m|_{V_{3/4}}). \tag{17}$$

Знайдемо оцінку норми $|F_2;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка функції $F_2(y)$. Наприклад,

$$[k_0 v_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}]_\alpha \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{M,N_k \in V_{3/4}} [d_1(2\gamma+\alpha(\gamma-\beta_k);\widetilde{M})|k_0(M) - k_0(N_k)| \times$$

$$\times|y_k^{(1)} - y_k^{(2)}|^{-\alpha}|v_m| + d(2\gamma;M_k)|k_0(M_k)|d(\alpha(\gamma-\beta_k);\widetilde{M})|y_k^{(1)} - y_k^{(2)}|^{-\alpha}\times$$

$$\times|v_m(M) - v_m(N_k)|] \le c_5(|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_1 + |v_m|_{V_{3/4}}).$$

Аналогічно встановлюються оцінки інших доданків функції $F_2(y)$:

$$|F_2;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha \le \varepsilon_1[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha} + c_6(|v_m|_{V_{3/4}} + |f;\gamma,\beta;2\gamma;D|_\alpha), \tag{18}$$

де $\varepsilon_1 = n^2\nu^2 c + (n+2)\varepsilon^\alpha$, η, ε – довільні числа, $\nu \in (0,1)$.

Підставляючи (18) в (17), знаходимо

$$E_1 \le (\varepsilon_1 + \varepsilon^\alpha)[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_\alpha + c_7(|v_m|_{V_{3/4}} + |f;\gamma,\beta;2\gamma;D|_\alpha + |g|_{C^{1+\alpha}(\partial D)}). \tag{19}$$

Якщо виконується умова (14), то досліджуємо задачу (11), (14).

Повторюючи міркування, проведені при одержані оцінки (19) і використовуючи теорему 7.1 ([8], с. 71), одержимо

$$E_1 \le (\varepsilon_1 + \varepsilon^\alpha)[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha} + c_8(|v_m|_{V_{3/4}} + |f;\gamma,\beta;2\gamma;D|_\alpha). \tag{20}$$

Розглянемо випадок, коли $|x_n^{(1)} - y_n| \ge 2T$, або $|x-y| \ge 2nT$, $y \in \partial D$. Нехай $V_\rho^1 = \{x, |x_i - x_i^{(1)}| \le 4\rho T$. Вважаємо, що $\widetilde{P} \equiv P_1(x^{(1)})$. В задачі (4), (5) зробимо заміну $u_m(x) = v_m(z)$, $z_i = d(\beta_i, x^{(1)})x_i$, $i = \overline{1,n}$. Тоді функція $W_m^{(1)} \equiv \omega_m(z)\mu_1(z)$ задовольняє задачу

$$\begin{gathered}\left[\sum_{ij=1}^n d(\beta_i+\beta_j;x^{(1)})a_{ij}(P_1)D_{z_i}D_{z_j} + \lambda\right](\omega_m\mu_1) = \\ = \sum_{ij=1}^n d(\beta_i+\beta_j;x^{(1)})a_{ij}(P_1) \times [D_{z_i}\omega_m D_{z_j}\mu_1 + D_{z_j}\omega_m D_{z_i}\mu_1] + \\ \omega_m\left[\sum_{ij=1}^n d(\beta_i+\beta_j;x^{(1)})a_{ij}(P_1)D_{z_i}D_{z_j}\mu_1\right] + \mu_1 F_4 \equiv F_5(z),\end{gathered} \tag{21}$$

$$W_m^{(1)}|_{\partial D} = 0,$$

де

$$F_4 = \sum_{ij=1}^n [a_{ij}(P_1) - a_{ij}(P)]d(\beta_i+\beta_j;x^{(1)})D_{z_i}D_{z_j}\omega_m -$$

$$-\sum_{i=1}^n d(\beta_i, x^{(1)})a_i(P)D_{z_i}\omega_m - (a_0(y)-\lambda)\omega_m + f_m(\widetilde{z}),$$

$$\mu_1(z) = \begin{cases} 1, & z \in H_{1/4}^{(1)}, \quad 0 \le \mu(z) \le 1; \\ 0, & z \notin H_{3/4}^{(1)}, \quad |D_z^k\mu_1(z)| \le c_k d^{-k}(\gamma, x^{(1)}),\end{cases}$$

$$H_\rho^{(1)} = \{z, |z - z_i^{(1)}| \le 4^{-1}\eta\rho d(\gamma, x^{(1)})n^{-1}, i = 1,n, z_i^{(1)} = d(\beta_i, x^{(1)})x_i^{(1)}, \rho \in (0,1)\}$$

Коефіцієнти рівняння (21) обмежені сталими, не залежними від P_1. Тому використовуючи теорему 1.1 ([8], с. 45), та оцінки (1.11) з ([8], с. 148), для довільних точок $M_1(z^{(1)})$ і $M_2(z^{(2)}) \in H_{1/4}^{(1)}$ справедлива нерівність

$$|z^{(1)} - z^{(2)}|^{-\alpha}|D_{z_i}D_{z_j}\omega_m(M_1) - D_{z_i}D_{z_j}\omega_m(M_2)| \le c|F_5|_{C^\alpha(H_{3/4})}. \tag{22}$$

Враховуючи властивості функції $\mu_1(z)$ і означення простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$, знаходимо

$$E \le (\varepsilon_1+\varepsilon^\alpha)[u_m;\gamma,\beta;0;V^1_{3/4}]_{2+\alpha}+c_3(|f;\gamma,\beta;2\gamma;D|_\alpha+|u_m|_{V^1_{3/4}}). \tag{23}$$

Об'єднавши нерівності (8), (19), (20), (23) і вибравши ρ і ε достатньо малими, дістанемо оцінку (7).

Доведення теореми 1.

Оскільки права частина нерівності (7) не залежить від m, а послідовності $\{V_m^{(0)} \equiv |u_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)} \equiv d(\gamma-\beta_i,x)|D_{x_i}u(P)|\}$, $\{V_m^{(2)} \equiv d(2\gamma-\beta_i-\beta_j,x)|D^1_{x_i}D^1_{x_j}u_m(P)|\}$, $P(x)\in D$, рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні, то за теоремою Арчела існують підпослідовності $\{V^{(0)}_{m(k)}\}$, $\{V^{(1)}_{m(j)}\}$, $\{V^{(2)}_{m(i)}\}$ рівномірно збіжні в D. Переходячи до границі при $m(k)\to\infty$, $m(j)\to\infty$, $m(i)\to\infty$ в задачі (4), (5), одержимо, що $u(x)$ єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$, для якого справедлива оцінка (3).

ТЕОРЕМА 4 *Якщо $f(x)\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)$ і виконані умови теореми 1, то единий розв'язок задачі (1), (2) в просторі $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою*

$$u(x)=\int_D \Gamma_1(x,d\xi)f(\xi)+\int_{\partial D}\Gamma_2(x;d_\xi S)g(\xi) \tag{24}$$

і компоненти (Γ_1,Γ_2) задовольняють нерівності

$$|\int_D \Gamma_1(x,d\xi)| \le |A_0^{-1}(x)|_D, |\int_{\partial D}\Gamma_2(x,d_\xi S)| \le |b_0^{-1}(x)|_{\partial D}. \tag{25}$$

Доведення . Оскільки $C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)\subset C^\alpha(\gamma,\beta;\delta;D)$, то для розв'язку задачі (1), (2) при $f(x)\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)$ правильна нерівність

$$|u;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} \le c(|f;\gamma,\beta;0;D|_\alpha+,|g|_{C^{1+\alpha}(\partial D)}). \tag{26}$$

Розглядаючи $u(x)$ при фіксованих x як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f,g)$ на нормованому просторі $C_\alpha = C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)\times C^{1+\alpha}(\partial D)$ з нормою, рівною правій частині нерівності (26), на підставі теореми Рісса, оскільки $C_\alpha\subset C(D)$, можна вважати, що $u(x)$ породжує борелівську міру $\Gamma(x,Z)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножини Z області D, включаючи і D і всі її підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (24).

Використовуючи теорему 2, поклавши при цьому у формулі (24) відповідно $f(x)=1$, $g(x)\equiv 1$, одержимо оцінки (25).

1. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств // М.: Мир.- 1979. - 576 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика // М.: Гос. изд. физ.-мат лит..- 1963. - 702 с.
3. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных // М.: Наука.- 1981. - 448 с.
4. *Никольский С.М.* О краевой задаче первого рода с сильным вырождением // Докл. АН СССР. - 1975. - 222.- N 2. - с. 281 - 283.
5. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* Об общих эллиптических задачах с сильным вырождением // Докл. АН СССР. - 1980. - т. 254.- N 6. - с. 1336- 1342.

6. *Пукальський І.Д.* Задача Діріхле дли сингулярних еліптичних рівнянь // Мат. методи і фіз.-мех. поля. - 2002. - т. 45, N 2. - с. 42 - 48.
7. *Пукальський І.Д.* Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. матем. журн. - 2001. - Т. 53.- no. 11. - с. 1521 - 1531.
8. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа // М.: Наука.- 1973. - 576 с.
9. *И.А.Шишмарев* Введение в теорию эллиптических уравнений // Издат. Московского ун-та.- 1979. - 189 с.

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича

Отримано 14.10.2003