Нелинейные граничные задачи. вып.14, с.146-151, 2004.

©2004. М.І. Матійчук

ПРО РОЗВ'ЯЗОК КВАЗІЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ТА ЕЛІПТИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ

Квазілінійні еліптичні та параболічні задачі у різних функціональних просторах вивчались багатьма авторами [1—7]. Тут за допомогою квазіфункції Гріна будується класичний розв'язок крайових задач з параметром в цілому.

1. Параболічна задача.

У циліндричній області $Q = (0,T) \times \Omega \times E_1^+$ (Ω компактна область в E_{n-1} з межею S) розглядається крайова задача

$$L(t,x,D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|k|\le 2b} A_x(t,x)\mu^{2b-|k|}D_x^k u = f(t,x,u,...,D_x^{2b-1}u), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad D_{x_n}u|_{x_n=0} = 0, \quad x \in \Omega^+ = \Omega \times E_1^+, \tag{2}$$

$$B_i(t,x,D)u\Big|_{\Gamma} \equiv \sum_{|k|\le r_i} b_{ik}(t,x)D_x^k u\Big|_{\Gamma} = g_i(t,x,u,...,D_x^{r_i-1}u), \tag{3}$$

$$(i = 1,bN, \quad 0 < r_i \le 2b-1), \quad \Gamma = (0,T)\times S^+, \quad S^+ = S^+ \times E_1^+,$$

$$D_x^k \equiv D_{x'}^{k'} B_{x_n}^{k_n}, \quad B_{x_n} = D_{x_n}^2 + (2\nu+1)x_n^{-1}D_{x_n}, \quad \nu \ge -\frac{1}{2}.$$

Для побудови розв'язку задачі (1)—(3) визначимо квазіфункцію Гріна відповідної лінійної задачі

$$Lu = f(t,x), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad B_i u|_{\Gamma} = g_i(t,x). \qquad (1') - (3')$$

Теорема 1. *Нехай:*

1) задача (1)—(3) B-параболічна і корені рівняння

$$\det\left(\sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x)(i\sigma')^{k'}(-\sigma_n^2)^{k_n} - \lambda E\right) = 0 \tag{4}$$

при всіх $(t,x,\sigma) \in Q \times E_n^+$ задовольняють нерівність $\operatorname{Re}\lambda(t,x,\sigma) \le -\delta = const$, $\delta > 0$;

2) коефіцієнти і поверхня S належать класам $A_k \in C^{(\omega_0)}(Q)$, $b_{ik} \in C^{(2b-r_i,\omega_\gamma)}(\Gamma)$, $S \in C^{(2b,\omega_s)}$.

Тоді існує функція $\vec{E} = (E_0(t,\tau,x,\xi), E_1(...),...,E_{bN})$ така, що для довільних $\varphi \in C(\Omega^+)$, $f \in C^{(\omega_f)}(Q^+)$, $g_i \in C^{(2b-r_i,\omega_r)}(\Gamma)$ з модулями неперервності, що задовольняють умову

$$A\omega^*(t) \equiv \int_0^t \omega^*(\tau)\tau^{-1}d\tau < \infty,$$

$$\omega^*(\tau) \equiv A^3\omega_0(t) + A^2(\omega_f + \omega_r + \omega_s),$$

розв'язок задачі (1')—(3') визначається формулою

$$u(t,x) = \int\limits_{\Omega^+} E_0(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0}d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega^+} E_0(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)\xi_n^{\nu_0}d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{bN}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S^+} E_j(t,\tau,x,\xi)D_s^{\alpha_j}g_j(\tau,\xi)\xi_n^{\nu_0}dS_\xi, \quad (\nu_0 = 2r+1). \tag{5}$$

Якщо $\varphi \in C^{(2b,\omega_\varphi)}(\Omega^+)$, *то розв'язок (1')—(3') має вигляд*

$$u(t,x) = \varphi(x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega^+} E_0(f - L\varphi)\xi_n^{\nu_0}d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{bN}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S^+} E_j(t,\tau,x,\xi)D_s^{\alpha_j}[g_j(\tau,\xi) - B_j(\tau,\xi,D)\varphi]\xi_n^{\nu_0}dS_\xi. \tag{6}$$

Тут $D_s^{\alpha_j}$ — оператор дробового диференціювання, який відповідає оператору Бельтрамі-Лапласа

$$\Lambda(D) = \frac{\partial}{\partial t} + (-1)^b(\Delta_{x'} + B_{x_n})^b$$

на поверхні S^+ і визначаються формулою

$$D_S^{\alpha_j}g_j(t,x) = C_1\frac{g_j(t,x)}{t^{\alpha_j}} +$$

$$+C_2\int\limits_0^t \frac{d\tau}{|t-\tau|^{1+\alpha_j}}\int\limits_{S^+} G_0(t-\tau,x,y)[g_j(\tau,\xi) - g_j(t,x)]\xi_n^{\nu_0}dS_\xi, \quad x \in S^+, \tag{7}$$

Позначимо через $C_{t,z,v}^{(m,\omega,1)}(\Gamma, M)$ клас функцій $g(t,z,v)$, які визначені в області $(\Gamma, M) = \{(t,z) \in \Gamma, |v| \le M\}$ і мають похідні $D_z^k D_v^\nu g(t,z,v)$ до порядку $|k| + \nu \le m < 2b$, зі скінченною нормою

$$|g|_m^{\omega,1} = |g|_{C^{(m)}(\Gamma)} + |g|_{m,t}^{(\omega)} + [g]_{m,v}^{(1)},$$

де

$$|g|_{m,t}^{\omega} = \sum_{|k|+p\le m}\sup_{(\Gamma,M)}\left[\frac{|\Delta_t D_z^k D_v^p g(t,z,v)|}{\omega(|\Delta t|)|\Delta t|^{\frac{m-|k|-p}{2b}}}\right],$$

$$|g|_{m,v}^{1} = \sum_{|k|+|p|=m}\sup_{(\Gamma,M)}\left[\frac{|\Delta_v D_z^k D_v^p g(t,z,v)|}{|\Delta v|}\right].$$

Для оператора D^{α_j} в просторі $C_{t,z,v}^{(m,\omega_z,1)}(\Gamma, M)$ описується такою лемою.

Лема [6, с.80]. *Якщо функція* $g(t,z,v)$ *належить простору* $\overset{0}{C}{}^{(2b-r_i,\omega_r,1)}_{t,z,v}(\Gamma,\,M)$, *то оператор дробового диференціювання* $D_S^{\alpha_i}$ *порядку* $\alpha_i=\dfrac{2b-r_i}{2b}$ *відображає цей простір у простір* $C^{(0,F_r)}_{t,z}(\Gamma)$ *при будь-якому* $v\in C^{(2b-1,\omega_r)}(\Gamma_T)$, *причому*

$$|D_S^{\alpha_i}g(t,z,v)|\le C_i|g|^{(\omega_\gamma)}_{2b-r_i}F_r(\sqrt[2b]{t}),$$

де $\overset{0}{C}{}^{(\dots)}$ *означає, що* $g(0,z,v)=0$, $F_r(t)=A\omega_r|t|$.

Теорема 2 (про розв'язність задачі). *Нехай:*

1) *крайова задача (1)—(3) B-параболічна;*

2) *функції, які визначають задачу, належать класам* $A_k\in C^{(\omega_0)}(Q)$, $\varphi\in C^{(2b,\omega_\varphi)}(\Omega^+)$, $b_{ik}\in C^{(2b-r_i,\omega_r)}(\Gamma)$, $f\in C^{(\omega_t,1)}_{t,x,u}(Q_M)$, $g_j\in C^{(2b-r_j,\omega_r,1)}_{t,z,u}(\Gamma^+,M_j)$, *причому, як і в теоремі 1,* $A\omega^*(t)<\infty$;

3) *виконується умова узгодження*

$$B_i(t,z,D)\varphi|_{t=0}=g_i(0,z,\varphi,\varphi^{(1)},\dots,\varphi^{(r_i-1)}).$$

Тоді в циліндрі $Q_{T_0}=(0,T_0)\times\Omega^+$ $(0<T_0\le T)$ *існує единий розв'язок із класу* $C^{2b,1}_{x,t}(Q_{T_0})$. *Якщо параметр* μ *досить великий, то розв'язок існує в цілому* $Q_T=(0,T)\times\Omega^+$.

Доведення. базується на алгоритмі доведення теореми 1.4 [6]. За допомогою квазіфункції Гріна $(E_0,E_1,\dots,E_{bN})$ згідно з формулою (6) задачі (1)—(3) поставимо у відповідність інтегро-диференціальне рівняння

$$u(t,x)=F(t,x)+\int_0^t d\tau\int_{\Omega^+}E_0(t,\tau,x,y)f(\tau,y,u,\dots,u_y^{(2b-1)})y_n^{\nu_0}dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_{S^+}E_j(t,\tau,x,\xi)D_S^{\alpha_j}g_j^*(\tau,\xi,u,u'_\xi,\dots,u_\xi^{(r_j-1)})\xi_n^{\nu_0}dS_\xi, \tag{8}$$

де позначено

$$F(t,x)=\varphi(x)-\int_0^t d\tau\int_{\Omega^+}E_0(t,\tau,x,\xi)L(\tau,\xi,D_\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0}d\xi,$$

$$g_j^*(t,x,u,\dots,u^{(r_j-1)})\equiv g_j(t,x,u,\dots,u^{(r_j-1)})-B_j(t,x,D)\varphi(x). \tag{9}$$

Диференціюючи обидві частини (8), відносно похідних $D_x^k u(t,x)\equiv u^{(k)}$, $(|k|\le 2b-1)$, отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$u^{(k)}(t,x)=F^{(k)}(t,x)+\int_0^t d\tau\int_{\Omega^+}D_x^kE_0f(\tau,y,u,\dots,u_y^{(2b-1)})y_n^{\nu_0}dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau \int_{S+} D_x^k E_j(t,\tau,x,\xi) D_S^{\alpha_j} g_j(\tau,\xi,u,...,u_\xi^{(r_j-1)})\xi_n^{\nu_0} dS_\xi. \tag{10}$$

Для знаходження розв'язку цієї системи розглядаємо послідовні наближення

$$u_m^{(k)}(t,x) = F^{(k)}(t,x) + \int_0^t d\tau \int_{\Omega+} D_x^k E_0 f(\tau,y,u_{m-1},...,u_{m-1}^{(2b-1)}) y_n^{\nu_0} dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{bN}\int_0^t d\tau \int_{S+} (D_x^k E_j) D_S^{\alpha_j} g_j^*(\tau,\xi,u_{m-1},...,u_{m-1}^{(r_j-1)})\xi_n^{\nu_0} dS_\xi, \tag{11}$$

де $u_0^{(k)} \equiv F^{(k)} = D^k F$, $|k| \le 2b-1$, $(m = 1,2,...)$.

При виконанні умов теореми послідовність $u_m(t,x)$ фундаментальна по нормі $C_x^{(2b-1)}(Q_T)$, її гранична функція належить класу $C_{x,t}^{(2b,1)}(Q_T)$ і вона є розв'язком задачі (1)—(3).

Послідовні наближення $u_m^{(k)}(t,x)$ оцінюються за допомогою методики [6, § 4] і нерівностей для компонент E_j:

$$|D_x^k E_j(t,\tau,x,\xi)| \le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{n_{\nu_j}+|k|}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\rho-c_1\mu^{2b}(t-\tau)}\}, \quad (|k|\le 2b),$$

$$|\Delta_t D_x^k E_j(t,\tau,x,\xi)| \le c_k|\Delta t|^{\frac{2b-|k|}{2b}}(t-\tau)^{-\frac{n_{\nu_j}+|k|}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n}\{e^{-c\rho-c_1\mu^{2b}(t_0)}\}$$

$$|k|<2b, \quad |\Delta t| < (t-\tau)^{1/2b}, \tag{12}$$

$n_{\nu_j} = n_\nu = n+2\nu+1$ при $j=0$, $n_{\nu_j} = n_\nu - 1$, $j=\overline{1,bN}$, а також оцінки інтеграла

$$J_k = \int_0^t \frac{e^{-\mu\tau}}{\tau^{|k|/2b}} d\tau \le M_k(t,\mu) = \begin{cases} \Gamma\left(1-\dfrac{|k|}{2b}\right)\mu^{-1+\frac{|k|}{2b}}, & t\in(0,\infty), \mu>0, \\ \left(1-\dfrac{|k|}{2b}\right)^{-1} t^{1-\frac{|k|}{2b}}, & \mu\ge 0, |k|<2b, \end{cases} \tag{13}$$

При цьому отримуємо для послідовних наближень нерівності

$$|u_0^{(k)}(t,x)| \le |\varphi^{(k)}(x)| + C_k M_k(t,\mu)|\varphi|_{2b},$$

$$|u_m^{(k)}(t,x) - u_{m-1}^{(k)}(t,x)| \le C_k M_k(t,\mu)[\Phi(t,M)]^{m-1}|(f,\varphi,g)|^m, \tag{14}$$

де позначено

$$\Phi(t,\mu) = \sum_{|k|=0}^{2b-1} M_k(t,\mu) + \int_0^t \frac{[\omega_r(\tau)+\omega_\varphi(\tau)]}{\tau} e^{-\mu\tau} d\tau,$$

$$|(f,\varphi,g)| \equiv |f|_0^{(\omega_f,1)} + |\varphi|_{2b}^{\omega_\varphi} + \sum_{i=1}^{bN} |g_j|_{2b-2i}^{\omega_r,1}.$$

При фіксованому $\mu \geq 0$ функція

$$\Phi(t,\mu) = O(t^{1/2b}) + \int_0^t \frac{[\omega_r(\tau) + \omega_\varphi(\tau)]}{\tau} e^{-\mu\tau} d\tau$$

прямує до нуля при $t \to 0$, тому існує значення $t = T_0$, при якому $\Phi(T_0,\mu)|(f,\varphi,g)| \leq q_0 < 1$. Якщо $0 < t < \infty$, то

$$\Phi(t,\mu) = o\left(\frac{1}{\mu^{1/2b}}\right) + \int_0^\varepsilon \frac{[\omega_\varphi + \omega_r]}{\tau} e^{-\mu\tau} d\tau + o\left(\frac{1}{\varepsilon\mu}\right), \quad \mu \to \infty.$$

Вибираємо ε досить малим, а по ньому μ настільки великим, щоб виконувалась нерівність $\Phi(t,\mu)|(f,\varphi,g)| \leq q_0 < 1$. У першому випадку послідовність $\{u_m^{(k)}\}_{m=1}^\infty$ рівномірно збігається в області $Q_{T_0} = [0,T_0] \times \Omega^+$, а в другому — в циліндрі $Q = (0,\infty) \times \Omega^+$. Гранична функція задовольняє нерівність

$$|u|_{2b-1} \leq C|(f,\varphi,g)|. \tag{15}$$

Можна довести, що $D_x^{2b-1}u(t,x)$ неперервна за Діні, тому потенціали у формулі (8) належать до класу $C_{x,t}^{(2b,1)}(Q)$ і $u(t,x)$ є розв'язком задачі (1)—(3).

2. Еліптична квазілінійна крайова задача.

У циліндрі $Q = (0,\infty) \times \Omega + E_1^+$ розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{|k|\leq 2b} A_k(x)\mu^{2b-|k|} D_x^k u + f(x,u,...,D_x^{(2b-1)u}), \tag{16}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \tag{17}$$

$$B_i(x,D)u|_S \equiv \sum_{|k|+2j=r_i} b_{kj}(x) D_x^k B_{x_n}^j u|_S = g_i(z,u_1,...,u^{(r_i-1)}), \tag{18}$$

якій відповідає стаціонарна крайова задача

$$\sum_{|k|\leq 2b} A_k(x)\mu^{2b-|k|} D_x^k u = f(x,u,...,u^{2b-1}), \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_i(x,D)u|_S = g_i(z,u,...,u^{(r_i-1)}), \\ u'_{x_n}|_{x_n=0} = 0. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Теорема 3. *Припустимо, що:*

1) *задача (19), (20) рівномірні B-еліптична і для коренів відповідного рівняння (4) виконується нерівність* $\operatorname{Re}\lambda(x,\sigma) < -\delta$;

2) функції, які визначають задачу, належать до класів: $A_k \in C^{(0,\omega_0)}(\Omega^+)$, $b_{ik} \in C^{(2b-r_i,\omega_\gamma)}(S)$, $S \in C^{(2b,\omega_s)}$, $f \in C^{(\omega_f,1)}_{x,u}(Q_M)$, $g_i \in C^{(2b-r_i,\omega_\gamma)}_{z,u}(\Gamma_M)$, *причому*

$$A\omega^*(t) = \int_0^t \frac{\omega^*(\tau)}{\tau} d\tau < \infty, \quad \omega^*(t) \equiv A^3\omega_0 + A^2(\omega_f + \omega_\gamma + \omega_s).$$

Тоді при досить великому значенні параметра μ *існує розв'язок задачі (19), (20), який належить класу* $C^{(2b,\omega^*)}(\Omega^+)$. *Якщо задача (19), (20) лінійна* $f \equiv f(t,x)$, $g_i \equiv g_i(t,z)$, *то розв'язок зображається за допомогою квазіфункції Гріна* $(\Phi_0(x,\xi), \Phi_1(x,\xi), \ldots, \Phi_{bN}(x,\xi))$ *формулою*

$$u(x) = \int_{\Omega^+} \Phi_0(x,\xi) f(\xi) \xi_n^{\nu_0} d\xi + \sum_{j=1}^{bN} \int_{S^+} \Phi_j(x,\xi) D_S^{\alpha_j} g_j(\tau,\xi) \xi_n^{\nu_0} dS_\xi \tag{21}$$

і задовольняє нерівність

$$|u|_{2b}^{\omega^*} \le c_0 \left(|f|_{\omega_f} + \sum_{j=1}^{bN} |g_j|_{2b-r_j}^{(\omega_\gamma)} \right). \tag{22}$$

Тут

$$\Phi_j(x,\xi) = \int_0^\infty E_j(t,x,\xi,\mu) dt,$$

$$D_S^{\alpha_j} g_j(x) = \int_{S^+} \varphi_j(x,\xi)[g_j(\xi) - g_j(x)] \xi_n^{\nu_0} dS_\xi, \tag{23}$$

$$\varphi_j(x,\xi) = c_2 \int_0^\infty G_0(t,x,\xi) e^{-\mu^{2b} t} dt, \quad x,\xi \in S^+.$$

Формули (21), (23) отримуються з відповідних формул (5), (7) заміною порядку інтегрування і граничного переходу при $t \to +\infty$.

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы // М.: Наука.- 1964. - 444 с.
2. *Загорский Т.Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа // Львов: ЛГУ. - 1961. - 115 с.
3. *Ивасишен С.Д.* Матрица Грина параболических граничных задач // Київ.- Вища школа.- 1990. - 199 с.
4. *Ладыженская О.А., Солонников Н.Н., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // М.: Наука.- 1967. - 736 с.
5. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач // М.: Наука.- 1990. - 448 с.
6. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями // Чернівці: Прут.- 2003. - 248 с.
7. *Reiko A.* On general boundary value problem for parabolic equations // J. Math. Kyoto Univ. - 1964.- 4. no. 1. - p.207-243.

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича Отримано 4.11.2004