УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-9

©2018. **О.В. Несмелова**

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения решений нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи. При этом существенно использована техника псевдообращения матриц по Муру–Пенроузу. Поставленная в статье задача продолжает исследование условий разрешимости, а также схем нахождения решений нелинейных нетеровых краевых задач, приведенных в монографиях А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, И.Г. Малкина, Дж. Хейла, Ю.А. Рябова, А.М. Самойленко, Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной и А.А. Бойчука. Исследован общий случай, когда линейный ограниченный оператор, соответствующий однородной части линейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи, не имеет обратного. Найдены достаточные условия приводимости дифференциально-алгебраического уравнения к системе, объединяющей дифференциальное и алгебраическое уравнение. Таким образом, дифференциально-алгебраическая краевая задача приводится к нелинейной нетеровой краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучен случай наличия простых корней уравнения для порождающих амплитуд. Для нахождения решений поставленной задачи в критическом случае получены конструктивные необходимые и достаточные условия существования, а также построена сходящаяся итерационная схема. Предложенные условия разрешимости, а также схема нахождения решений нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи подробно проиллюстрированы на примере нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи для уравнения типа Дюффинга. Для контроля скорости сходимости итерационной схемы к точному решению дифференциально-алгебраической краевой задачи для уравнения типа Дюффинга использованы невязки полученных приближений в уравнении типа Дюффинга в пространстве непрерывных функций.
MSC: 34B15.

Ключевые слова: *нелинейная нетерова дифференциально-алгебраическая краевая задача, критический случай, уравнение типа Дюффинга.*

1. Линейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем.

Исследуем задачу о построении решений

$$z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$$

линейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \ \ell z(\cdot) = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}^k; \tag{1}$$

здесь

$$A(t), \ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a, b] := \mathbb{C}[a, b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

— непрерывные матрицы, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — непрерывный вектор-столбец; $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный функционал:

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^k.$$

Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной. Исследованию дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [1–6]. В статьях [7, 8] предложена серия достаточных условий разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц. Существенным отличием дифференциально-алгебраической системы (1) является бесконечномерность пространства ее решений [4], [9, с. 959]. В статье [10] предложены условия разрешимости, а также конструкции обобщенного оператора Грина краевой задачи линейной дифференциально-алгебраической системы (1).

При условии [7, 8, 10]

$$P_{A^*(t)} = 0,\ A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a;b],\ A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a;b] \tag{2}$$

система (1) разрешима относительно производной

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)); \tag{3}$$

здесь

$$\operatorname{rank} A(t) := \sigma_0 = m \leq n.$$

Кроме того

$$\mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообратная (по Муру – Пенроузу), $P_{A^*}(t)$ — ортопроектор [14]:

$$P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t)),$$

$P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$– матрица, составленная из ρ_0 линейно-независимых столбцов $(n \times n)$– матрицы-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t)).$$

Обозначим $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t),\ X_0(a) = I_n$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Заметим, что нормальная фундаментальная матрица $X_0(t)$ невырождена. При условии (2) система (3), а следовательно и система (1), имеет решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s,\nu_0(s))\,ds,\ c \in \mathbb{R}^n.$$

По аналогии с классификацией импульсных краевых задач [10–12] случай (2) будем называть невырожденным. Подставляя общее решение

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),\ \ c \in \mathbb{R}^n$$

задачи Коши $z(a) = c$ для дифференциально-алгебраического уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$Q\,c = \alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot). \tag{4}$$

Уравнение (4) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

Здесь P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(Q^*)$; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}, кроме того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times n}$. При условии (5) и только при нем общее решение уравнения (4)

$$c = Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r}\,c_r,\ \ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение краевой задачи (1)

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + X_0(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t).$$

Здесь P_Q — матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *При условии* (2) *система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),\ \ c \in \mathbb{R}^n$$

При условии (5) *и только при нем для фиксированной непрерывной вектор-функции* $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ *общее решение дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1)

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)

$$G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) := X_0(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t).$$

2. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем.

Исследуем задачу о построении решений

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\ z(t,\cdot)\in\mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0]$$

нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t,\varepsilon)=B(t)z(t,\varepsilon)+f(t)+\varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon), \qquad (6)$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha. \qquad (7)$$

Решения нетеровой ($n\neq k$) краевой задачи (6), (7) ищем в малой окрестности решения $z_0(t)\in\mathbb{C}^1[a,b]$ порождающей задачи

$$A(t)z_0'(t)=B(t)z_0(t)+f(t),\ \ell z_0(\cdot)=\alpha. \qquad (8)$$

Здесь

$$A(t),\ B(t)\in\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$$

— непрерывные матрицы, $f(t)\in\mathbb{C}[a,b]$ — непрерывный вектор; $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной $z(t)$ в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по $t\in[a,b]$ и непрерывная по малому параметру; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный векторный функционал:

$$\ell z(\cdot,\varepsilon):\mathbb{C}[a,b]\to\mathbb{R}^k.$$

Нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача (6) обобщает многочисленные постановки нелинейных нетеровых краевых задач [13, 14]. Предположим, что порождающая краевая задача (8) невырождена, при этом система (6) разрешима относительно производной

$$z'=A^+(t)B(t)z+\mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t))+\varepsilon\, A^+(t)Z(z,t,\varepsilon). \qquad (9)$$

Общее решение порождающей дифференциально-алгебраической краевой задачи (8) для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t)\in\mathbb{C}[a,b]$ имеет вид

$$z_0(t,c_r)=X_r(t)c_r+G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t),\ c_r\in\mathbb{R}^r.$$

Решения краевой задачи (7), (9) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи:

$$z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon).$$

Фиксируя одну из констант $c_r\in\mathbb{R}^r$, для нахождения вектора

$$x(t,\varepsilon):\ x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\ x(t,\cdot)\in\mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0],\ x(t,0)\equiv 0$$

аналогично [14], приходим к задаче

$$x' = A^+(t)B(t)x + \varepsilon\, A^+(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon),\ \ \ell x(\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{10}$$

3. Критический случай.

Предположим, что для дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) имеет место критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$). Предположим также, что дифференциально-алгебраическое уравнение (8) невырождено. При этом порождающая задача (8) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (5) и для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет $r-$ линейно-независимых решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

В критическом случае в малой окрестности решения порождающей задачи краевая задача (7), (9) разрешима тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\, \ell K\Big[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_0(s)\Big](\cdot) = 0 \tag{11}$$

и для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет $r-$ линейно-независимых решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Предположим также, что нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача (6), (7) имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. При дополнительном условии

$$A^+(\cdot)Z(z, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a; b],\ \ A^+(t)Z(\cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[||z - z_0|| < q] \tag{12}$$

для существования решений нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) необходимо выполняется условие

$$F(c_r^*) := P_{Q_d^*}\, \ell K\Big[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0), \nu_0(s)\Big](\cdot) = 0. \tag{13}$$

Фиксируя одно из решений $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (13), решение

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$$

дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) ищем в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t).$$

Таким образом, аналогично [14], приходим к задаче

$$x'(t,\varepsilon) = A^{+}(t)B(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\, A^{+}(t)Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{14}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{15}$$

Решения дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15) при этом определяет операторная система [14, 15]

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),\ \ x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = G\Big[A^{+}(s)Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon);\nu_0(s);\varepsilon\Big](t).$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*),t,0) +$$

$$+ A_1(t)x(t,\varepsilon) + R(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{16}$$

где $A_1(t) = Z_z'(z_0(t,c_r^*),t,0)$. Остаток $R(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ при условии $Z_\varepsilon'(z_0(t,c_r^*),t,0) \equiv 0$ более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первые два члена разложения, поэтому

$$R(z,t,\varepsilon)\Bigg|_{\begin{array}{l} z\ =\ z_0(t,c_r^*), \\ \varepsilon\ =\ \ 0 \end{array}} \equiv 0,\ \ \frac{\partial R(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\begin{array}{l} z\ =\ z_0(t,c_r^*), \\ \varepsilon\ =\ \ 0 \end{array}} \equiv 0.$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ по меньшей мере одно решение краевой задачи (14), (15) определяет операторная система

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$B_0\, c_r(\varepsilon) = P_{Q_d^*}\,\ell K\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\nu_0(s);\alpha\Big](t),$$

эквивалентная задаче о построении решения системы уравнений (14), удовлетворяющих краевому условию (15); здесь

$$B_0 = P_{Q_d^*}\,\ell K\Big[A_1(s)X_r(s),\nu_0(s)\Big](\cdot)$$

— постоянная $(d \times r)$ – матрица. Для построения решений этой операторной системы применим [14, 15] метод простых итераций; таким образом получаем итерационную схему

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = B_0^{-1}\, P_{Q_d^*}\, \ell K\Bigg[A_1(s)c_{r_{k+1}}^{(1)}(s,\varepsilon) + \qquad (17)$$

$$+R(z_0(s,c_r^*) + x_{r_{k+1}}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Bigg](\cdot),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*) + x_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon); \nu_0(s); \alpha\Bigg](t).$$

Достаточные условие существования решения нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) в критическом случае определяет следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение* (8) *невырождено. В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *порождающая задача* (8) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие* (5) *и для фиксированной непрерывной вектор-функции* $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ *имеет* $r-$ *линейно-независимых решений*

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Bigg[f(s); \nu_0(s); \alpha\Bigg](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ *для каждого корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения* (13) *для порождающих амплитуд при условии* $P_{B_0^*} = 0$ *и дополнительном условии* (12) *нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача* (6), (7) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$. *Для построения решений*

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$$

нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) *применима сходящаяся при* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ *итерационная схема* (17).

Доказанная теорема обобщает соответствующие утверждения [14] на случай нелинейной невырожденной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) в критическом случае.

Пример. *Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача для уравнения типа Дюффинга*

$$A(t)\,z'(t,\varepsilon) = B(t)z(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z,\varepsilon),\ \ell z(\cdot,\varepsilon) = 0, \qquad (18)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \ \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon \left(z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon) \right).$$

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \ \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_a^3(t, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (2) выполнено, постольку система (18) невырождена и имеет решение вида

$$z(t, c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ c \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 - \cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица $A(t)$ прямоугольная, при этом

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \ P_A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P_{A_{\rho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому найденное решение зависит от произвольной непрерывной скалярной функции; в данном случае $\nu_0(t) := 0$. Общее решение однородной части для порождающей задачи (18) определяет матрица

$$Q = 0, \ P_Q = P_{Q_r} = I_3, \ P_{Q^*} = I_2.$$

Таким образом, дифференциально-алгебраическая краевая задача (18) представляет критический случай, при этом выполнено условие разрешимости (5). Общее решение неоднородной части для порождающей задачи (18)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \ c_r \in \mathbb{R}^3;$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) = K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ 3\sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

а также матрица $X_r(t) = X_0(t)$. В случае нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (18) уравнение (13) имеет решение

$$c_r^* = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которому соответствует решение порождающей задачи

$$z(t, c_r^*) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -\cos 3t \\ 3\sin 3t \\ 0 \end{pmatrix},$$

а также матрица полного ранга

$$B_0 = \frac{3\pi}{128}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку выполнено условие $P_{B_0^*} = 0$, постольку по меньшей мере одно решение нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (18) определяет итерационная схема (17). Таким образом, находим

$$z_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} z_{1a}(t,\varepsilon) \\ z_{1b}(t,\varepsilon) \\ z_{1c}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$z_{1a}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{327\ 680}\Big(31\varepsilon - 124\,\varepsilon\cos t - 40\ 960\cos 3t + 60\,\varepsilon\cos 3t + 2\,\varepsilon\cos 9t\Big),$$

$$x_{1b}(t,\varepsilon) = \frac{2\,\varepsilon}{327\ 680}\Big(62\,\varepsilon\sin t + 61\ 440\ \sin 3t - 90\,\varepsilon\sin 3t - 9\,\varepsilon\sin 9t\Big).$$

$$x_{1c}(t,\varepsilon) = \frac{31\,\varepsilon}{327\ 680}.$$

Аналогично находим

$$z_2(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} z_{2a}(t,\varepsilon) \\ z_{2b}(t,\varepsilon) \\ z_{2c}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$z_{2a}(t,\varepsilon) = \frac{31\,\varepsilon}{327\ 680} + \frac{37\ 059\,\varepsilon^2}{18\ 790\ 481\ 920} - \frac{2\ 343\ 800\ 971\,\varepsilon^3}{275\ 152\ 784\ 850\ 944\ 000} +$$

$$+\frac{1\ 150\ 416\ 221\ 963\,\varepsilon^4}{36\ 402\ 933\ 558\ 007\ 771\ 955\ 200} - \frac{31\,\varepsilon\cos t}{81\ 920} - \frac{129\,\varepsilon^2\cos t}{117\ 440\ 512} + \frac{755\ 013\ 771\,\varepsilon^3\cos t}{68\ 788\ 196\ 212\ 736\ 000} -$$

$$-\frac{3\ 054\ 692\ 099\ 539\,\varepsilon^4\cos t}{91\ 007\ 333\ 895\ 019\ 429\ 888\ 000} - \frac{961\,\varepsilon^3\cos 2t}{214\ 748\ 364\ 800} - \frac{961\,\varepsilon^4\cos 2t}{4\ 398\ 046\ 511\ 104\ 000} -$$

$$-\frac{\cos 3t}{8} + \frac{3\,\varepsilon\cos 3t}{16\ 384} - \frac{273\,\varepsilon^2\cos 3t}{335\ 544\ 320} + \frac{34\ 233\,\varepsilon^3\cos 3t}{6\ 871\ 947\ 673\ 600} - \frac{311\ 981\,\varepsilon^4\cos 3t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000} -$$

$$-\frac{961\,\varepsilon^3\cos 4t}{1\ 073\ 741\ 824\ 000} + \frac{2\ 883\,\varepsilon^4\cos 4t}{2\ 199\ 023\ 255\ 552\ 000} + \frac{31\,\varepsilon^2\cos 5t}{167\ 772\ 160} - \frac{279\,\varepsilon^4\cos 5t}{703\ 687\ 441\ 776\ 640} -$$

$$-\frac{93\,\varepsilon^4\cos 6t}{1\ 468\ 006\ 400} + \frac{2\ 883\,\varepsilon^4\cos 6t}{15\ 032\ 385\ 536\ 000} - \frac{279\,\varepsilon^4\cos 6t}{1\ 924\ 145\ 348\ 608\ 000} + \frac{31\,\varepsilon^2\cos 7t}{335\ 544\ 320} -$$

$$-\frac{961\,\varepsilon^3\cos 7t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}+\frac{13\ 919\,\varepsilon^4\cos 7t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000}+\frac{961\,\varepsilon^4\cos 8t}{92\ 358\ 976\ 733\ 184\ 000}+\frac{\cos 9t}{163\ 840}-$$
$$-\frac{3\,\varepsilon^2\cos 9t}{104\ 857\ 600}+\frac{153\,\varepsilon^3\cos 9t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}-\frac{1\ 167\,\varepsilon^4\cos 9t}{28\ 147\ 497\ 671\ 065\ 600}+\frac{961\,\varepsilon^4\cos 10t}{145\ 135\ 534\ 866\ 432\ 000}-$$
$$+-\frac{31\,\varepsilon^3\cos 11t}{8\ 589\ 934\ 592\ 000}-\frac{31\,\varepsilon^4\cos 11t}{175\ 921\ 860\ 444\ 160\ 000}+\frac{93\,\varepsilon^3\cos 12t}{61\ 418\ 032\ 332\ 800}-$$
$$-\frac{279\,\varepsilon^4\cos 12t}{125\ 784\ 130\ 217\ 574\ 400}-\frac{31\,\varepsilon^3\cos 13t}{12\ 025\ 908\ 428\ 800}+\frac{93\,\varepsilon^2\cos 13t}{24\ 629\ 060\ 462\ 182\ 400}-$$
$$-\frac{3\,\varepsilon^3\cos 15t}{9\ 395\ 240\ 960}+\frac{183\,\varepsilon^4\cos 15t}{192\ 414\ 534\ 860\ 800}-\frac{279\,\varepsilon^4\cos 15t}{394\ 064\ 967\ 394\ 918\ 400}+$$
$$+\frac{31\,\varepsilon^4\cos 17t}{844\ 424\ 930\ 131\ 968\ 000}-\frac{93\,\varepsilon^4\cos 18t}{5\ 682\ 276\ 092\ 346\ 368\ 000}+\frac{31\,\varepsilon^4\cos 19t}{1\ 055\ 531\ 162\ 664\ 960\ 000}+$$
$$+\frac{3\,\varepsilon^3\cos 21t}{377\ 957\ 122\ 048\ 000}-\frac{9\,\varepsilon^4\cos 21t}{774\ 056\ 185\ 954\ 304\ 000}-\frac{\varepsilon^4\cos 27t}{12\ 807\ 111\ 440\ 334\ 848\ 000}-$$
$$-\frac{93\,\pi\,\varepsilon^2\sin t}{20\ 971\ 520}-\frac{93\,\varepsilon^2 t\sin t}{20\ 971\ 520}+\frac{2\ 697\pi\,\varepsilon^3\sin t}{429\ 496\ 729\ 600}+\frac{2\ 697t\,\varepsilon^3\sin t}{429\ 496\ 729\ 600}-$$
$$-\frac{441\ 471\pi\,\varepsilon^4\sin t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000}-\frac{441\ 471\,t\,\varepsilon^4\sin t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000},$$

$$x_{2b}(t,\varepsilon)=-\frac{93\pi\,\varepsilon^2\cos t}{20\ 971\ 520}-\frac{93\,\varepsilon^2\cos t}{20\ 971\ 520}+\frac{2\ 697\pi\,\varepsilon^3\cos t}{429\ 496\ 729\ 600}+\frac{2\ 697t\,\varepsilon^3\cos t}{429\ 496\ 729\ 600}-$$
$$-\frac{441\ 471\pi\,\varepsilon^4\cos t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000}-\frac{441\ 471\,t\,\varepsilon^4\cos t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000}+\frac{31\,\varepsilon\sin t}{81\ 920}-\frac{1\ 959\,\varepsilon^2\sin t}{587\ 202\ 560}-$$
$$-\frac{323\ 062\ 251\,\varepsilon^3\sin t}{68\ 788\ 196\ 212\ 736\ 000}+\frac{770\ 888\ 449\ 411\,\varepsilon^4\sin t}{91\ 007\ 333\ 895\ 019\ 429\ 888\ 000}+\frac{961\,\varepsilon^3\sin 2t}{107\ 374\ 182\ 400}-$$
$$-\frac{961\,\varepsilon^4\sin 2t}{2\ 199\ 023\ 255\ 552\ 000}+\frac{3\sin 3t}{8}-\frac{9\,\varepsilon\sin 3t}{16\ 384}+\frac{819\,\varepsilon^2\sin 3t}{335\ 544\ 320}-\frac{102\ 699\,\varepsilon^3\sin 3t}{6\ 871\ 947\ 673\ 600}+$$
$$+\frac{935\ 943\,\varepsilon^4\sin 3t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000}+\frac{961\,\varepsilon^3\sin 4t}{268\ 435\ 456\ 000}-\frac{2\ 883\,\varepsilon^4\sin 4t}{549\ 755\ 813\ 888\ 000}-\frac{31\,\varepsilon^2\sin 5t}{33\ 554\ 432}+$$
$$+\frac{279\,\varepsilon^4\sin 5t}{140\ 737\ 488\ 355\ 328}+\frac{279\,\varepsilon^2\sin 6t}{734\ 003\ 200}-\frac{8\ 649\,\varepsilon^3\sin 6t}{7\ 516\ 192\ 768\ 000}+\frac{837\,\varepsilon^4\sin 6t}{962\ 072\ 674\ 304\ 000}-$$
$$-\frac{217\,\varepsilon^2\sin 7t}{335\ 544\ 320}+\frac{6\ 727\,\varepsilon^3\sin 7t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}-\frac{97\ 433\,\varepsilon^4\sin 7t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000}-\frac{961\,\varepsilon^4\sin 8t}{11\ 544\ 872\ 091\ 648\ 000}-$$
$$-\frac{9\,\varepsilon\sin 9t}{163\ 840}+\frac{27\,\varepsilon^2\sin 9t}{104\ 857\ 600}-\frac{1\ 377\,\varepsilon^3\sin 9t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}+\frac{10503\,\varepsilon^4\sin 9t}{28\ 147\ 497\ 671\ 065\ 600}-$$
$$-\frac{961\,\varepsilon^4\sin 10t}{14\ 513\ 553\ 486\ 643\ 200}+\frac{341\,\varepsilon^3\sin 11t}{8\ 589\ 934\ 592\ 000}+\frac{341\,\varepsilon^4\sin 11t}{175\ 921\ 860\ 444\ 160\ 000}-$$
$$-\frac{279\,\varepsilon^3\sin 12t}{15\ 354\ 508\ 083\ 200}+\frac{837\,\varepsilon^4\sin 12t}{31\ 446\ 032\ 554\ 393\ 600}+\frac{403\,\varepsilon^3\sin 13t}{12\ 025\ 908\ 428\ 800}-$$

$$-\frac{1\ 209\,\varepsilon^4\sin 13t}{24\ 629\ 060\ 462\ 182\ 400}+\frac{9\,\varepsilon^2\sin 15t}{1\ 879\ 048\ 192}-\frac{549\,\varepsilon^3\sin 15t}{38\ 482\ 906\ 972\ 160}-$$

$$-\frac{837\,\varepsilon^4\sin 15t}{78\ 812\ 993\ 478\ 983\ 680}-\frac{527\,\varepsilon^4\sin 17t}{844\ 424\ 930\ 131\ 968\ 000}+\frac{837\,\varepsilon^4\sin 18t}{2\ 841\ 138\ 046\ 173\ 184\ 000}-$$

$$-\frac{589\,\varepsilon^4\sin 19t}{1\ 055\ 531\ 162\ 664\ 960\ 000}-\frac{63\,\varepsilon^3\sin 21t}{377\ 957\ 122\ 048\ 000}+$$

$$+\frac{189\,\varepsilon^4\sin 21t}{774\ 056\ 185\ 954\ 304\ 000}+\frac{27\,\varepsilon^4\sin 27t}{12\ 807\ 111\ 440\ 334\ 848\ 000}.$$

$$x_{2c}(t,\varepsilon)=\frac{31\,\varepsilon}{327\ 680}-\frac{921\,\varepsilon^2}{3\ 758\ 096\ 384}-$$

$$-\frac{556\ 415\ 371\,\varepsilon^3}{275\ 152\ 784\ 850\ 944\ 000}+\frac{1\ 032\ 284\ 380\ 167\,\varepsilon^4}{182\ 014\ 667\ 790\ 038\ 859\ 776\ 000}.$$

Для оценки точности найденных приближений к решению нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (18) определим невязки $\Delta_k(\varepsilon)$ нулевого и первого приближения к решению краевой задачи (18). Положив $\varepsilon := 0,1$, $k = 0,\ 1,\ 2$, имеем

$$\Delta_0(0,1)\approx 0,000\ 195\ 312,\ \ \Delta_1(0,1)\approx 2,23\ 935\times 10^{-7},$$

$$\Delta_2(0,1)\approx 1,62\ 572\times 10^{-9}.$$

Аналогично, имеем

$$\Delta_0(0,01)\approx 0,0000\ 195\ 312,\ \ \Delta_1(0,01)\approx 2,24\ 013\times 10^{-9},$$

$$\Delta_2(0,01)\approx 1.62\ 658\times 10^{-12}.$$

Отметим также, что нулевое и первое приближения к решению краевой задачи (18) в точности удовлетворяет краевому условию. В то же время, второе приближения к решению краевой задачи (18) содержит невязку в краевом условии

$$\ell z_2(\cdot,\varepsilon)=\frac{93\,\pi\,\varepsilon^2}{10\ 485\ 760}-\frac{2\ 697\,\pi\,\varepsilon^3}{214\ 748\ 364\ 800}+\frac{441\ 471\,\pi\,\varepsilon^4}{8\ 796\ 093\ 022\ 208\ 000},$$

вызванную линеаризацией условия разрешимости (11), использованной при нахождении вектора $c_{r_2}(\varepsilon)$. Избежать невязки в краевом условии для второго приближения к решению краевой задачи (18) можно при нахождении вектора $c_{r_2}(\varepsilon)$ непосредственно из условия разрешимости (11), в данном случае, нелинейного уравнения, аналогично [18, 19].

Цитированная литература

1. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.

2. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища школа, 2000. – 296 с.
3. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 178 p.
4. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Descrete Methods. – 1983. – №4. – P. 517–521.
5. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
6. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 686 с.
7. *Чуйко С.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. – 2013. – **5**, №5. – С. 769–783.
8. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, №1. – P. 9–21.
9. *Бойчук А.А., Покутный А.А., Чистяков В.Ф.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – **53**, № 6. – С. 958–969.
10. *Чуйко С.М.* О понижении порядка в дифференциально алгебраической системе // Укр. мат. вестник. – 2018. – **15**, №1. – С. 1–17.
11. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
12. *Chuiko S.M.* A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 8. – P. 1189–1193.
13. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
14. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
15. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278–288.
16. *Chuiko S.M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. – 2016. – **60**, №8. – P. 64–73.
17. *Chuiko S.M., Starkova O.V.* About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods // Nonlinear oscillation. – 2009. – **12**, № 4. – P. 556–573.
18. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
19. *Chuiko S.M.* To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics. – 2017. – **85**, №1. – P. 62–68.

References

1. Boyarintsev, Yu.E., Chistyakov, V.F. (1998). *Algebro-differentsialnyie sistemyi. Metodyi resheniya i issledovaniya.* Novosibirsk: Nauka (in Russian).
2. Samoylenko, A.M., Shkil, M.I., Yakovets, V.P. (2000). *Liniyni sistemi diferentsIalnih rivnyan z virodzhennyam.* K.: Vischa shkola (in Ukrainian).
3. Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations.* San Francisco-London-Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program.
4. Campbell, S.L., Petzold, L.R. (1983). Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. *SIAM J. Alg. Descrete Methods, 4*, 517-521.
5. Chistyakov, V.F. (1996). *Algebro-differentsialnyie operatoryi s konechnomernyim yadrom.* Novosibirsk: Nauka (in Russian).
6. Hayrer, E., Vanner, G. (1999). *Reshenie obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy. Zhestkie i differentsialno-algebraicheskie zadachi.* Moscow: Mir (in Russian).
7. Chuiko, S.M. (2013). Lineynyie neterovyi kraevyie zadachi dlya differentsialno-algebraicheskih

sistem. *Komp. issledov. i modelirovanie, 5*(5), 769-783 (in Russian).
8. Chuiko, S.M. (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 210*(1), 9-21.
9. Boychuk, A.A., Pokutnyiy, A.A., Chistyakov, V.F. (2013). O primenenii teorii vozmuscheniy k issledovaniyu razreshimosti differentsialno-algebraicheskih uravneniy. *Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki, 53*(6), 958-969 (in Russian).
10. Chuiko, S.M. (2018). O ponizhenii poryadka v differentsialno algebraicheskoy sisteme. *Ukr. mat. vestnik, 15*(1), 1-17 (in Russian).
11. Samoylenko, A.M., Perestyuk, N.A. (1987). *Differentsialnyie uravneniya s impulsnyim vozdeystviem.* Kiev: Vischa shk. (in Russian).
12. Chuiko, S.M. (2001). A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. *Differential Equations, 37*(8), 1189-1193 (in Russian).
13. Grebenikov, E.A., Ryabov, Yu.A. (1979). *Konstruktivnyie metodyi analiza nelineynyih system.* Moscow: Nauka (in Russian).
14. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition).* Berlin; Boston: De Gruyter.
15. Chuiko, A.S. (2005). Oblast shodimosti iteratsionnoy protseduryi dlya slabonelineynoy kraevoy zadachi. *Neliniyni kolivannya, 8*(2), 278-288 (in Russian).
16. Chuiko, S.M. (2016). Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. *Russian Mathematics, 60*(8), 64-73.
17. Chuiko, S.M., Starkova, O.V. (2009). About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods. *Nonlinear oscillation, 12*(4), 556-573.
18. Kantorovich, L.V., Akilov, G.P. (1977). *Funktsionalnyiy analiz.* Moscow: Nauka (in Russian).
19. Chuiko, S.M. (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics, 85*(1), 62-68.

O.V. Nesmelova

Nonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic systems.

The article proposes original solvability conditions and the scheme for finding solutions of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. And we use the matrix pseudo-inversion technique of Moore–Penrose. The posed problem in the article continues the study of conditions of solvability and schemes for finding solutions of the nonlinear Noetherian boundary-value problems given in the monographs by A. Poincare, A.M. Lyapunov, I.G. Malkin, J. Hale, Yu.A. Ryabov, A.M. Samoylenko, N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina and A.A. Boychuk. We studied a general case, when a linear bounded operator corresponding to the homogeneous part of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem has no inverse. Sufficient conditions for reducibility of the differential algebraic equation to the system uniting a differential and algebraic equation are found. Thus, the differential-algebraic boundary value problem is reduced to the nonlinear Noetherian boundary value problem for the system of ordinary differential equations. We studied the case of the presence of simple roots of the equation for generating amplitudes. Constructive necessary and sufficient conditions of existence were obtained to find solutions to the problem in the critical case, and the converging iterative scheme was constructed. The proposed solvability conditions, and the scheme for finding solutions of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem are illustrated in detail by the example from the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for Duffing type equations. For control of the rate of the iterative scheme convergence to the exact solution of the differential-algebraic boundary value problem for the Duffing type equation, we used the residuals of the obtained approximations in the Duffing type equation in the space of continuous functions.

Keywords: *nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem, critical case, Duffing type equation.*

О.В. Нєсмєлова

Нелінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем.

У статті запропоновано оригінальні умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі. При цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць по Муру–Пенроузу. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов розв'язності, а також схем знаходження розв'язків нелінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова, І.Г. Малкіна, Дж. Хейла, Ю.О. Рябова, А.М. Самойленко, М.В. Азбелева, В.П. Максімова, Л.Ф. Рахматулліної та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, який відповідає однорідній частини лінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі, не має оберненого. Знайдено достатні умови звідності диференціально-алгебраїчного рівняння до системи, яка об'єднує диференціальне та алгебраїчне рівняння. Таким чином, диференціально-алгебраїчна крайова задача зводиться до нелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь. Вивчено випадок наявності простих коренів рівняння для породжуючих амплітуд. Для знаходження розв'язків поставленої задачі в критичному випадку отримані конструктивні необхідні і достатні умови існування, а також побудована збіжна ітераційна схема. Запропоновані умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі, детально проілюстровані на прикладі нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Дюффінга. Досліджена в статті нелінійна нетерова диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння Дюффінга не є диференціальною, на відміну від найбільш вивчених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, а також традиційних постановок періодичних крайових задач для диференціальних рівнянь Дюффінга, Льєнара і Ван дер Поля. Для контролю швидкості збіжності ітераційної схеми до точного розв'язку диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Дюффінга використані нев'язки отриманих наближень в рівнянні типу Дюффінга в просторі неперервних функцій.

Ключові слова: *нелінійна нетерова диференціально-алгебраїчна крайова задача, критичний випадок, рівняння типу Дюффінга.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск
star-o@ukr.net

Получено 27.12.18