УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-5

©2018. **И.В. Денега**

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В данной работе рассматривается максимум произведения внутренних радиусов n непересекающихся областей, которые содержат точки расширенной комплексной плоскости, и степени γ внутреннего радиуса области, что содержит нулевую точку. Найдено неравенство для внутреннего радиуса области, что содержит точку ноль. Основной результат работы обобщает аналогичные результаты работ [1, 2] на случай произвольного расположения систем точек на $\overline{\mathbb{C}}$.

MSC: 30C75.

Ключевые слова: *внутренний радиус области, непересекающиеся области, функция Грина, трансфинитный диаметр, теорема о минимизации площади, неравенство Коши.*

Предметом изучения данной работы являются экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на комплексной плоскости. Многие такие задачи сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям (см., например, [1–13]).

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – одноточечная компактификация комплексной плоскости или сфера Римана, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Величина $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$. Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B соотношениями

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), z \to a,$$
$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Систему точек $A_n := \{\, a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$ и $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения

$$a_{n+1} := a_1, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k},$$

$$\alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad k = \overline{1,n}, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2.$$

Автор выражает благодарность профессору А.К. Бахтину за постановку задачи и полезные комментарии.

The publication contains the results of studies conducted by President's of Ukraine grant for competitive projects F75/30308 of the State Fund for Fundamental Research.

В данной работе мы исследуем максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n \geqslant 2$, – произвольная система взаимно непересекающихся областей, $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – произвольная система разных точек на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $\gamma \in (0, n]$.

Следующая теорема обобщает аналогичные результаты работ [1, 2] на случай произвольного расположения систем точек на комплексной плоскости.

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^{+}$ *и* $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *– произвольная система разных точек на* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Тогда для любого набора взаимно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ *такого, что* $I_n(\gamma) > \Delta$, *справедливо неравенство*

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2}{n-\gamma}}. \tag{2}$$

Доказательство. Аналогично работам [1,2], пусть $d(G)$ — трансфинитный диаметр компактного множества $G \subset \mathbb{C}$. Тогда справедливо соотношение

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^{+}, \infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^{+})} \leqslant \frac{1}{d(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+})}, \tag{3}$$

где $B^{+} = \{z; \frac{1}{z} \in B\}$.

В силу известной теоремы Пойа [3, с.28], [4, с.34], справедливо неравенство

$$\mu G \leqslant \pi d^2(G),$$

где μG обозначает лебегову меру компактного множества G. Отсюда имеем, что

$$d(G) \geqslant \left(\frac{1}{\pi}\mu G\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда из (3) следует, что

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{d(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^{+})}} = \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu \overline{B}_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Для ограниченной области D, $a \in D$ рассмотрим класс всех регулярных функций $\psi(z)$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) = 1$, заданных в области D и площадь образа области D при отображении произвольной функцией $\psi(z)$. Из теоремы о минимизации площади [4, с.34] получаем, что

$$\iint\limits_{B} |\psi'(z)|^2 dxdy \geqslant \pi r^2 \left(D, a\right). \tag{5}$$

Полагая $\psi_1(z) = (z - a)$ из (5) следует, что

$$S(D) = \mu(D) \geqslant \pi r^2 \left(D, a\right). \tag{6}$$

Из неравенства (4) непосредственно вытекает, что

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu \overline{B}_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu B_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} r^2 \left(B_k^{+}, a_k^{+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} r^2 \left(B_k^{+}, a_k^{+}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

С учетом соотношения

$$r\left(B_k^{+}, a_k^{+}\right) = \frac{r\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^2}$$

приходим к неравенству

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Отсюда и из предположения теоремы вытекает соотношение

$$\Delta < r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Таким образом,

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \geqslant \Delta \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{8}$$

Из неравенства Коши получаем неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда, имеем

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant \left[n\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant n^{\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}}. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant n^{\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\Delta\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right]^{\frac{\gamma}{n}} =$$

$$= n^{\frac{\gamma}{2}}\Delta^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma^2}{2n}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant n\cdot\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{n}}.$$

И наконец получаем, что

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{n-\gamma}{n}} \geqslant n\cdot\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}.$$

Тогда

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(n\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}\right)^{\frac{n}{2(n-\gamma)}} = n^{\frac{n}{2(n-\gamma)}}\Delta^{\frac{1}{n-\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2}{n-\gamma}}.$$

Отсюда и из соотношения (7) следует неравенство теоремы

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}}\cdot\Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{\frac{2}{n-\gamma}}.$$

□

Если система точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такая, что $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant 1$, тогда получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^+$ и $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n$ – произвольная система разных точек на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ такая, что $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$. Тогда для любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ такого, что $I_n(\gamma) > \Delta$, справедливо неравенство

$$r(B_0, 0) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}.$$

Цитированная литература

1. *Бахтин А.К.* Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Зб. пр. Ін-ту мат-ки НАН України. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 25–33.
2. *Bakhtin A.K.* Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. – 2018. – V. 234, No. 1. –P. 1–13.
3. *Polya G., Szego G.* Isoperimetric inequalities in mathematical physics. M: Fizmatgiz, 1962.
4. *Goluzin G.M.* Geometric theory of functions of a complex variable. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.
5. *Jenkins J.* Univalent functions and conformal mapping. Moscow:Publishing House of Foreign Literature, **256**, 1962 (in Russian).
6. *Hayman V.* Multivalent functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
7. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 1. – С. 3–76.
8. *Dubinin V.N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014. 344 p.
9. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН України, 2008. – 308 с.
10. *Bakhtin A., Vygivska L., Denega I. N*-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – T. 38, № 2. – C. 229–235.
11. *Bakhtin A.K., Zabolotnii Ya.V.* Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – V. 221, No. 5. –P. 623–629.
12. *Bakhtin A.K., Vygivska L.V., Denega I.V.* Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – V. 220, No. 5. – P. 584–590.
13. *Denega I.V., Zabolotnii Ya.V.* Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62, No. 11. – P. 1611–1618.

References

1. Bakhtin, A.K. (2017). Estimates of inner radii for mutually disjoint domains. *Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU, 14*(1), 25-33 (in Russian).
2. Bakhtin, A.K. (2018). Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci., 234*(1), 1-13.
3. Polya, G., Szego, G. (1962). *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.* Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
4. Goluzin G.M. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable.* Amer. Math. Soc. Providence, R.I.
5. Jenkins, J. (1962). *Univalent functions and conformal mapping.* Moscow: Publishing House of Foreign Literature (in Russian).
6. Hayman, V. (1958). *Multivalent functions.* Cambridge: Cambridge University Press.

7. Dubinin, V.N. (1994). Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Uspekhi Mat. Nauk, 49*(1), 3-76 (in Russian). Translation in (1994) *Russian Math. Survey, 49*(1), 1-79.
8. Dubinin, V.N. (2014). *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory.* Birkhäuser/Springer, Basel.
9. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. In *Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU* (in Russian).
10. Bakhtin, A., Vygivska, L., Denega, I. (2017). N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 38*(2), 229-235.
11. Bakhtin, A.K., Zabolotnii, Ya.V. (2017). Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains. *J. Math. Sci., 221*(5), 623-629.
12. Bakhtin, A.K., Vygivska, L.V., Denega, I.V. (2017). Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains. *J. Math. Sci., 220*(5), 584-590.
13. Denega, I.V., Zabolotnii, Ya.V. (2017). Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Variables and Elliptic Equations, 62*(11), 1611-1618.

I.V. Denega

Some estimates for extremal decomposition of the complex plane.

In geometric function theory of complex variable extremal problems on non-overlapping domains are well-known classic direction. A lot of such problems are reduced to determination of the maximum of product of inner radii on the system of non-overlapping domains satisfying a certain conditions. In this paper, we consider the well-known problem of maximum of the functional $r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)$, where B_0,...,B_n are pairwise disjoint domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ are different points of the circle, $\gamma \in (0, n]$, and $r(B, a)$ is the inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ relative to the point a. This problem was posed as an open problem in the Dubinin paper in 1994. Till now, this problem has not been solved, though some partial solutions are available. In the paper an estimate for the inner radius of the domain that contains the point zero is found. The main result of the paper generalizes the analogous results of [1, 2] to the case of an arbitrary arrangement of systems of points on $\overline{\mathbb{C}}$.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, the Green function, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area, the Cauchy inequality.*

I.В. Денега

Деякі оцінки для екстремального розбиття комплексної площини.

У даній роботі розглядається максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки розширеної комплексної площині, і ступеня γ внутрішнього радіусу області, що містить точку нуль. Знайдено нерівність для внутрішнього радіусу області, що містить точку нуль. Основний результат роботи узагальнює аналогічні результати робіт [1, 2] на випадок довільного розташування систем точок на $\overline{\mathbb{C}}$.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, області, що не перетинаються, функція Гріна, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі, нерівність Коші.*

Институт математики НАН Украины, Киев
iradenega@gmail.com

Получено 22.10.18