

Н.О. ТУЛЯКОВА, О.М. ТРОФИМЧУК

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ РЕНТГЕНІВСЬКОЇ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ

Анотація. Рентгенівська комп'ютерна томографія – грандіозний за своєю значимістю винахід, який поєднує знаменне в історії науки відкриття рентгенівського випромінювання, праці геніального математика Й. Радона та сучасні науково-технічні досягнення в галузі фізики, електроніки та комп'ютерної техніки. Метою статті є створення теоретичних засад для науково-технічних досліджень та розробок у актуальному напрямі комп'ютерного покращення якості рентгенівських томографічних зображень та їх автоматизованого аналізу. У статті викладені математичні основи рентгенівської комп'ютерної томографії, що ґрунтуються на інтегральних перетвореннях Радона. Проведено огляд методів відновлення двовимірного томографічного зображення поперечного перерізу тривимірного об'єкту за проекціями. Стаття має теоретичний характер і може бути корисною математикам, фізикам, інженерам, програмістам та спеціалістам інших галузей.

Ключові слова: рентгенівська комп'ютерна томографія, перетворення Радона, синограма, реконструкція зображення.

DOI: 10.35350/2409-8876-2019-17-4-50-66

Вступ

На початку статті наведемо ключові поняття, необхідні для розуміння принципу рентгенівської комп'ютерної томографії, математичної моделі, котра описує проекції рентгенівських променів, та математичних методів, на яких ґрунтуються алгоритми реконструкції томографічного зображення поперечний перерізу об'єкта за проекціями.

Рентгенівське тіньове зображення – сумарне зображення шарів тіла, що знаходяться на різних відстанях від плівки (чим більше щільність речовини, тим сильніше нею поглинається випромінювання й тим більше засвічується плівка). Але звичайні рентгенівські знімки мають істотний недолік, який полягає в нашаровуванні зображень, отже, у спотворенні або втраті їх просторового розташування.

Комп'ютерна томографія (КТ) – метод отримання зображення ізольованого шару об'єкта шляхом його просвічування рентгенівськими променями та вимірювання їх *проекцій* за допомогою лінійки фотодетекторів під різними кутами напрямку сканування (від грецької *tomos* – шар, переріз). При поширенні променя уздовж деякої лінії z хвиля взаємодіє з речовиною: згасає та змінює фазу. Функція $f(x, y)$, поставлена у відповідність кожній точці (x, y) на площині, характеризує *абсорбцію* (поглинання) променя речовиною, пропорційну її щільності, та φ або *фазовий зсув* хвилі.

Проекція – вектор інтенсивностей рентгенівських променів, які пройшли через тонкий поперечний шар об'єкта, зареєстрований лінійкою фотодетекторів на приймальному боці. Кожен такий промінь на виході з об'єкту є акумульованим (інтегральним) значенням функції зображення $f(x, y)$ уздовж траєкторії проходження променя крізь об'єкт, що *моделюється перетворенням Радона двовимірної функції $f(x, y)$ уздовж деякої похилої лінії*.

Метод отримання КТ зображення поперечного шару об'єкта полягає в реєстрації під різними кутами напряму рентгенівських променів проекцій, що характеризують абсорбцію випромінювання речовиною, або в отриманні проекцій у результаті застосування алгоритмів відновлення фази за даними вимірювань, і в подальшій реконструкції за проекціями зображення.

Зондувальна система з джерел випромінювання і відповідної лінійки детекторів на протилежному боці обертається навколо об'єкта – у такий спосіб при різних кутах випромінювання α реєструються проекції, що формують *синограму*¹ зображення поперечного шару об'єкта. Само зображення невідоме, проте можливе вимірювання проекцій променів, пониклих крізь поперечний шар об'єкта під різними кутами α . Лінійки джерел і відповідних приймачів випромінювання обертаються в площині досліджуваного поперечного шару. За синограмою при допомозі математичних методів відновлюється КТ зображення перерізу, що сканувався. По сукупності отриманих таким чином за допомогою матриці фотодетекторів паралельних КТ зображень поперечних шарів об'єкта можна реконструювати тривимірний (3D) об'єкт.

Мета статті полягає у висвітленні математичних методів рентгенівської комп'ютерної томографії, що є теоретичним підґрунтям для розв'язування актуальних науково-технічних завдань у сфері комп'ютерної обробки цифрових зображень, таких як: фільтрація шуму та артефактів у даних томографічних досліджень, реконструкція зображень, покращення їх якості, відповідно, й об'єктивності аналізу, візуалізація внутрішньої структури об'єкту, моделювання імплантів, моніторинг функціонування внутрішньої системи без втручання в її цілісність задля виявлення дефектів, патологій, сторонніх тіл, та, відповідно, підвищення достовірності діагностики, та ін.

1. Перетворення Радона

Математичні основи КТ закладені ще задовго до появи рентгенівських установок у 1917 році австрійським ученим *Йоганном Радонам*, який запропонував *метод відновлення багатовимірних функцій за їхніми інтегральними характеристиками* [1]. Хоча за життя цього видатного математика його наукові праці не отримали належного визнання у зв'язку з відсутністю практичного застосування, більш ніж через півстоліття зі створенням перших рентгенівських комп'ютерних томографів практична значимість цих робіт стала неоціненною.

Теоретичні аспекти КТ висвітлені в багатьох джерелах [2-9]. Інтерес до даної тематики обумовлений актуальністю, всебічним застосуванням і перспективністю розвитку в різних галузях науки і техніки.

¹ *Синограма* – двовимірний розподіл одновимірних проекцій поперечного перерізу об'єкта як функція кута проекцій. Кут проекцій розташований по осі ординат. Лінійна проекція розташована по осі абсцис.

Принцип отримання проєкційних даних для реконструкції томографічного зображення перерізу об'єкта ілюструється на рисунку 1.

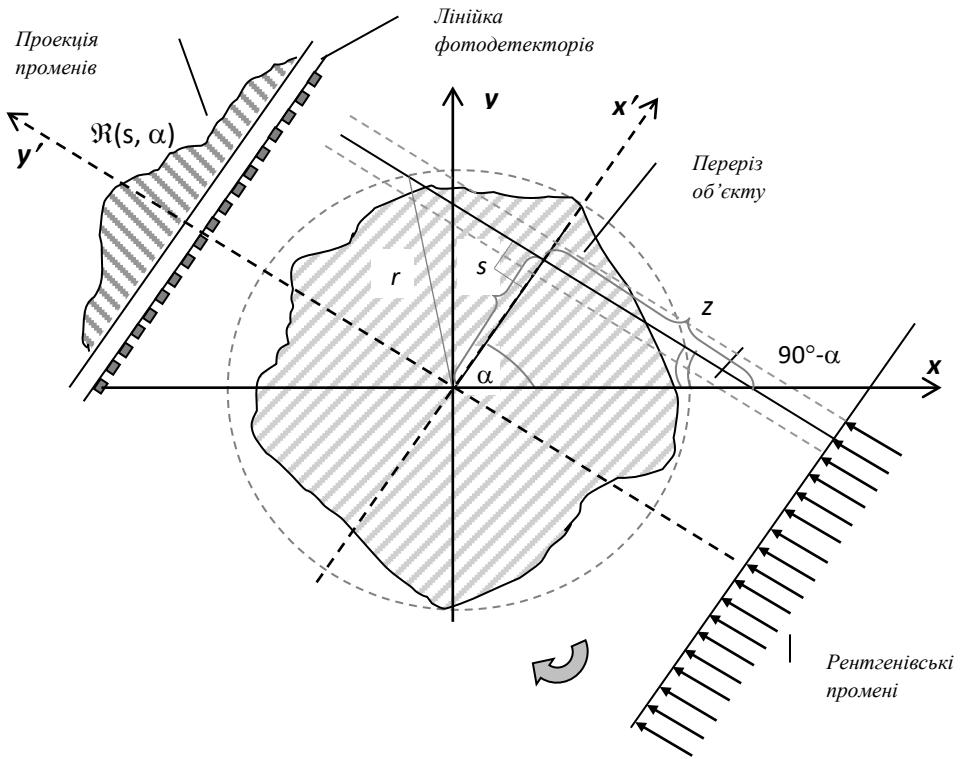


Рисунок 1 – Схема отримання проєкцій

Нехай об'єкт, що досліджується, просвічується паралельним пучком добре сфокусованих рентгенівських променів, що проникають через поперечний шар об'єкта (рис.1). На протилежному боці знаходяться приймачі випромінювання (фотодетектори), що реєструють випромінювання на виході з об'єкта – проєкцію при певному куті α .

Перетворення Радона (ПР) $\mathfrak{R}(k, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, kx + b) dx$ неперервної

функції $f(x, y)$ – це інтеграл значень $f(x, y)$ уздовж деякої прямої лінії $y = kx + b$, де k, b – коефіцієнти, $\mathfrak{R}(\cdot)$ – символ ПР.

У нормальному вигляді ПР записується так:

$$\mathfrak{R}(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(s - x \cos \alpha - y \sin \alpha) dx dy, \quad (1)$$

де $x \cos \alpha + y \sin \alpha - s = 0$ – нормальне рівняння прямої; (x, y) – точка на прямій у декартовій (прямокутній) системі координат; s – відстань від начала координат до прямої (координата променя / фотодетектора); α – кут між

віссю x та перпендикуляром, опущеним на пряму з початку координат; $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дирака.

Випромінювання $\mathfrak{R}(s, \alpha)$, що реєструється елементарним приймачем (фотодетектором), називається *радоновським образом*, а перетворення (1) – *перетворенням Радона*.

Розглянемо систему координат $OX'Y'$, отриману поворотом осей координат OXY на кут α (рис.1). Формули повороту системи координат такі:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

де (x, y) – координати точки у вихідній системі координат OXY ; (x', y') – координати цієї точки в системі координат $OX'Y'$, що повернуто на кут α .

Рівняння прямої z в новій системі координат $OX'Y'$ має вигляд: $x' - s = 0$ (рис.1). Підставляючи $x' = s$ в (2), а формули (2) в формулу ПР (1), та,

враховуючи фільтруючу властивість δ -функції ($\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(0) = f(x)$), маємо *одновимірне ПР* у такому вигляді¹:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(s, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - y' \sin \alpha, s \sin \alpha + y' \cos \alpha) dy' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz, \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, на виході з об'єкту фотодетекторами реєструються променеві суми, що є *радоновськими образами* $\mathfrak{R}(s, \alpha)$, які утворюють *проекцію* $p(s, \alpha) = \mathfrak{R}(s, \alpha)$ (3) при заданому куті повороту α . Радоновський образ являє собою інтегральне значення поглинання рентгенівського випромінювання речовиною та / або фазового зсуву хвилі в кожній точці на прямій поширення променя. Проекції $p(s, \alpha)$ – це одновимірні функції від s , що знаходяться при можливих значеннях кута α і для тих значень s , для яких функція плоского зображення $f(x, y) \neq 0$. У результаті формується *синограма*¹ поперечного перерізу, крізь який пройшли рентгенівські промені.

У реальності величина s обмежена фізичними розмірами об'єкту, а кут α вимірюється від 0 до 180° , адже при змінненні кута на 180° просвічування ведеться у зворотному напрямку, тобто $\mathfrak{R}(s, \alpha) = \mathfrak{R}(-s, \alpha + \pi)$. Для зручності

¹ Пара дійсних чисел (s, α) з області визначення радоновських образів $\mathfrak{R}(s, \alpha)$ не може розглядатися як точка на площині в полярній системі координат. Це пояснюється тим, що умова $f(0, \alpha_1) = f(0, \alpha_2)$ для будь-яких кутів α_1, α_2 , що справедлива в полярній системі координат, у загальному випадку для радоновських образів не виконується, тобто $\mathfrak{R}(0, \alpha_1) \neq \mathfrak{R}(0, \alpha_2)$ для $\alpha_1 \neq \alpha_2$, оскільки $\mathfrak{R}(0, \alpha_1), \mathfrak{R}(0, \alpha_2)$ – це інтеграли, обчислені вздовж прямих, що проходять через початок координат під різними кутами α_1, α_2 .

вводиться окружність радіуса r , що охоплює поперечний переріз об'єкта (рис.1). Тоді інтеграл (3) набуває вигляду

$$\mathfrak{R}(s, \alpha) = \int_{-\sqrt{r^2-s^2}}^{\sqrt{r^2-s^2}} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz. \quad (4)$$

На рисунку 2 наведено приклад двовимірної функції $f(x, y)$ та її ПР $\mathfrak{R}(s, \alpha)$ в аналітичній формі, де рис.2 а) – функція $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$;

рис.2 б) – ПР вказаної функції $\mathfrak{R}(s, \alpha) = \frac{2\pi(s + \cos \alpha/2)}{-3\cos^2 \alpha + 4s \cos \alpha + 4s^2 + 4}$, $s > 0$,

$|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$. Отримати ПР в аналітичній формі можливо тільки в окремих випадках. На практиці маємо справу тільки з *дискретними функціями*. Як

зазначалося вище, у КТ двовимірна функція зображення $f(x, y)$ шару, що просвічується, невідома, а результати вимірювань при різних кутах повороту α моделюються ПР $\mathfrak{R}(s, \alpha)$ цієї функції. Завдання полягає у відновленні за даними вимірювань (проекціями) функції зображення перерізу, тобто математично – у знаходженні зворотного ПР $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{R}(s, \alpha))$.

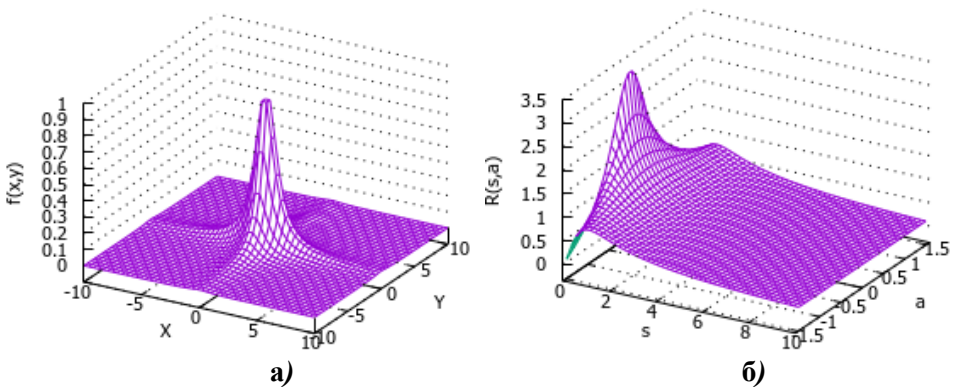


Рисунок 2 – Приклад двовимірної функції та її перетворення Радона: а) функція; б) перетворення Радона

У КТ двовимірне цифрове зображення поперечного перерізу об'єкта зазвичай являє собою функцію інтенсивності в дискретному двовимірному просторі, де координати кожного пікселя, що характеризується значенням інтенсивності (частіше цілим числом у діапазоні від 0 до 255), визначаються перетином i -го рядка та j -го стовпця. Кількість променів, що задають координати по осі s , та кількість проєкцій $p(s, \alpha)$, отриманих під різними ракурсами α (рис.1), у комп'ютерних томографах також обмежена, отже, проєкційні данні $p(s, \alpha)$ є не неперервною, а *дискретною функцією* двох змінних (s_j, α_i) . Звідси випливає, що відновлення зображення за *матрицею синограми* не може бути ідеальним. Найчастіше розглядається випадок, коли відліки функції $\mathfrak{R}(s_j, \alpha_i)$ беруться з рівномірними кроками Δ_s та Δ_α . Якщо

припустити, що промені паралельні (рис.1), то їх кількість можна визначити як $N_s = \lceil 2r / \Delta_s \rceil$, а кількість кутів (проекцій) як $N_\alpha = \lceil \pi / \Delta_\alpha \rceil$, де $\lceil \cdot \rceil$ – ціла частина дійсного числа. А проекційні данні (матриця синограми) являють собою двовимірний масив розмірністю $N_\alpha \times N_s$, де N_α – кількість рядків, N_s – кількість стовпців. *Томограма* реконструюється так само для дискретних значень просторових координат (x_i, y_j) . Як правило, використовується рівномірна прямокутна сітка, а матриця відновлюваного зображення $f(x_i, y_j)$ поперечного перерізу об'єкта має розмірність $N_x \times N_y$, де $N_x = N_y = \lceil 2r / \Delta \rceil$, Δ – крок дискретизації, однаковий для обох просторових змінних x та y .

Таким чином, *метод КТ* складається з двох етапів:

- 1) Отримуємо данні вимірювань – проекції $p(s_j, \alpha_i)$, що реєструються набором фотодетекторів під різними кутами α_i , де $s_0=0, s_1=\Delta_s, s_2=2\Delta_s, s_3=3\Delta_s, \dots, s_j=j\Delta_s, \dots, s_{N_s}=(N_s-1)\Delta_s$ – координата фотодетектора, що реєструє променеву суму $\mathfrak{R}(s_j, \alpha_i)$ (3) на виході з об'єкту, j – індекс фотодетектора (променя); $\alpha_0=0, \alpha_1=\Delta_\alpha, \alpha_2=2\Delta_\alpha, \alpha_3=3\Delta_\alpha, \dots, \alpha_i=i\Delta_\alpha, \dots, \alpha_{N_\alpha}=(N_\alpha-1)\Delta_\alpha$ – дискретні значення кута, i – індекс кута; тобто вихідними даними для реконструкції зображення поперечного перерізу об'єкта є двовимірний масив дискретних значень проекцій $\mathfrak{R}(s_j, \alpha_i), j = 0, N_s - 1, i = 0, N_\alpha - 1$.
- 2) Обробка проекційних даних з метою відновлення матриці зображення поперечного перерізу, що досліджується, $f(x_j, y_i)=f_{ij}$, де $x_0=0, x_1=\Delta, x_2=2\Delta, \dots, x_j=j\Delta, \dots, x_{N_x}=(N_x-1)\Delta$ – відліки по осі x ; $y_0=0, y_1=\Delta, y_2=2\Delta, \dots, y_i=i\Delta, \dots, y_{N_y}=(N_y-1)\Delta$ – відліки по осі y :

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} & \dots & \mathfrak{R}_{1j} & \dots & \mathfrak{R}_{1N_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{R}_{i1} & \mathfrak{R}_{i2} & \dots & \mathfrak{R}_{ij} & \dots & \mathfrak{R}_{iN_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{R}_{N_\alpha 1} & \mathfrak{R}_{N_\alpha 2} & \dots & \mathfrak{R}_{N_\alpha j} & \dots & \mathfrak{R}_{N_\alpha N_s} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1j} & \dots & f_{1N_x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{ij} & \dots & f_{iN_x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N_y 1} & f_{N_y 2} & \dots & f_{N_y j} & \dots & f_{N_y N_x} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де \mathfrak{R}_{ij} – радоновський образ (інтеграл) функції зображення f_{ij} вздовж лінії проходження j -го променя при i -му куті повороту системи зондування.

2. Методи реконструкції функції за її проекціями

Між радоновським образом $\mathfrak{R}(f)$ та функцією $f(\cdot)$, що його породжує, існує *взаємно однозначна відповідність*, що визначається інтегральним рівнянням (3) або (4), це дозволяє *реконструювати томографічне зображення за проекційними даними*.

Метод відновлення функції зображення $f(x, y)$ за її проекціями $p(s, \alpha)=\mathfrak{R}(s, \alpha)$, що являють собою двовимірну структуру даних (матрицю в дискретному випадку) з набору одновимірних функцій проекцій, отриманих для різних кутів α , формально можна записати так

$$f(x, y) = \mathfrak{R}^{-1}(p(s, \alpha)) = \mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{R}(s, \alpha)), \quad (6)$$

де \mathcal{R}^{-1} – зворотне ПР; $p(s, \alpha) = \mathcal{R}(s, \alpha)$ – набір проєкцій поперечного перерізу об'єкта, що просвічується під різними можливими кутами напряму променів α (синограмма¹); s – координата елементарного детектора / джерела.

2.1. Теорема про центральний переріз

Більшість алгоритмів відновлення томографічних зображень ґрунтується на теоремі про центральний переріз, що встановлює зв'язок між двовимірним перетворенням Фур'є функції $f(x, y)$ та одновимірним перетворенням Фур'є її проєкцій $p(s, \alpha)$ (див. рис. 3).

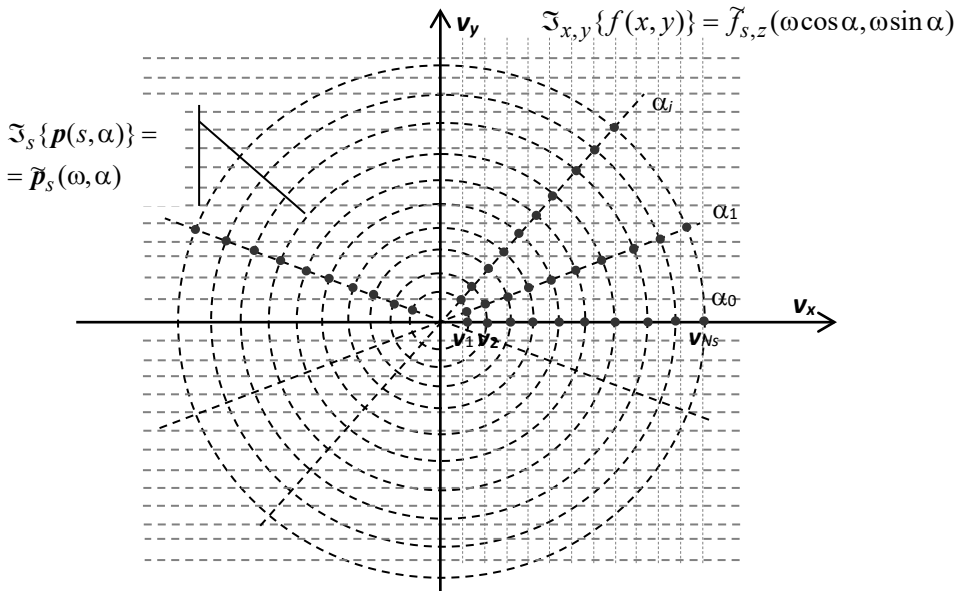


Рисунок 3 – Прямокутна та полярна сітки відліків у частотній області

Розглянемо двовимірне *пряме перетворення Фур'є* (ПФ) функції $f(x, y)$ в декартовій системі координат:

$$\tilde{f}_{x,y}(v_x, v_y) = \mathcal{Z}_{x,y}\{f(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(v_x x + v_y y)} dx dy, \quad (7)$$

де $\tilde{f}_{x,y}(v_x, v_y)$ – *фур'є-образ* від функції $f(x, y)$, при цьому нижні індекси означають змінні, за якими здійснюється інтегрування; $\mathcal{Z}(\cdot)$ – символ ПФ; (v_x, v_y) – прямокутна система координат у частотній області ПФ (лінійні частоти); i – мнима одиниця.

Перейдемо до *полярної системи координат*, тобто введемо такі змінні:

$$\begin{cases} v_x = \omega \cos \alpha, \\ v_y = \omega \sin \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ \alpha = \arctg(v_x / v_y); \end{cases}, \quad (8)$$

де $\omega=2\pi\nu$ – кругова частота.

Як бачимо з рис.1: $z = -x \cos(90^\circ - \alpha) + y \sin(90^\circ - \alpha) = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$, $s = x \cos \alpha + y \sin \alpha$; де $x' = s$, $y' = z$ у повернутій системі координат, а формули повороту осей (2) запишемо так:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \cos \alpha - z \sin \alpha; \\ y = s \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases}. \quad (9)$$

Отже, зробивши у формулі (7) заміну змінних v_x, v_y (8) та x, y (9) ($v_x x + v_y y = \omega s$) та застосувавши *якобіан переходу* від координат (x, y) у координати (z, s) $dxdy = \det \begin{bmatrix} \partial x / \partial s & \partial x / \partial z \\ \partial y / \partial s & \partial y / \partial z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} dzds = dzds$, запишемо формулу (7) у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{z,s}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) &= \mathfrak{Z}_{z,s} \{f(s, z)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) e^{-i\omega s} dz ds = \\ &= \tilde{p}_s(\omega, \alpha) = \mathfrak{Z}_s \{p(s, \alpha)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(s, \alpha) e^{-i\omega s} ds, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\tilde{p}_s(\omega, \alpha)$ - *фур'є-образ* проєкції $p(s, \alpha)^1$; $\mathfrak{Z}_s \{p(s, \alpha)\}$ – *одновимірне ПФ* проєкції $p(s, \alpha)$; $\mathfrak{R}(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz$ – *ПР* функції $f(x, y)$ (3).

Таким чином, *одновимірне ПФ* $\mathfrak{Z}_s \{p(s, \alpha)\}$ від *ПР* $\mathfrak{R}(s, \alpha)$ – *проєкції* $p(s, \alpha)$ є *двовимірним ПФ* $\mathfrak{Z}_{x,y} \{f(x, y)\}$ функції $f(x, y)$. Звідси випливає, що *зворотне двовимірне ПФ* $\mathfrak{Z}_{v_x, v_y}^{-1} \{f(v_x, v_y)\}$ є *зворотним ПР* $\mathfrak{R}^{-1}(p_\alpha(s)) = \mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{R}(s, \alpha))$ (6).

Розглянемо *двовимірне зворотне ПФ* функції $f(x, y)$:

¹ На різницю від (s, α) пара дійсних чисел (ω, α) з області визначення фур'є-образа ПР $\tilde{p}(\omega, \alpha)$ може бути інтерпретована як точка на площині в полярних координатах, оскільки $\tilde{p}(0, \alpha_1) = \tilde{p}(0, \alpha_2)$, якщо $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Крім того, виконується умова $\tilde{p}(\omega, \alpha) = \tilde{p}(-\omega, \alpha + \pi)$.

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{x,y}(v_x, v_y) e^{i(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y, \quad (11)$$

де $\tilde{f}_{x,y}(v_x, v_y) = \tilde{f}_{z,s}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$ – фур'є-образ функції $f(x, y)$ (7).

Перепишемо цю формулу в полярній системі координат (див. рис.3), використовуючи якобіан переходу з системи координат ПФ (v_x, v_y) до полярних координат (ω, α)

$$dv_x dv_y = \det \begin{bmatrix} \partial v_x / \partial \omega & \partial v_x / \partial \alpha \\ \partial v_y / \partial \omega & \partial v_y / \partial \alpha \end{bmatrix} d\omega d\alpha = \det \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \\ \sin \alpha & \omega \cos \alpha \end{bmatrix} d\omega d\alpha = \omega d\omega d\alpha.$$

Тоді формула (11) набуває вигляду

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \omega d\alpha d\omega, \quad (12)$$

Враховуючи формулу (10), отримуємо формулу зворотного для ПФ $\mathfrak{R}^{-1}(\omega, \alpha)$:

$$f(x, y) = \mathfrak{T}_{\omega, \alpha}^{-1} \{ \tilde{f}_{z,s}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) \} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_s(\omega, \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \omega d\omega d\alpha, \quad (13)$$

де $\mathfrak{R}_s(\omega, \alpha) = \mathfrak{T}_s \{ \mathfrak{p}(s, \alpha) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(s, \alpha) e^{-i\omega s} ds$ – одновимірне ПФ над ПФ

функції $f(x, y)$ (3); $\mathfrak{T}^{-1}(\cdot)$ – символ зворотного ПФ.

Вираз (13) визначає метод відновлення томограми за проєкціями, що називається *Фур'є алгоритмом* (або методом *Фур'є-синтезу*).

Теорема про центральний переріз стверджує, що одновимірний фур'є-образ проєкції $\mathfrak{p}(s, \alpha)$ дорівнює перерізу двовимірного фур'є-образа функції $f(x, y)$ вздовж прямої, що проходить через початок координат у частотній області під кутом α до осі v_x (рис.3), тобто

$$\tilde{\mathfrak{p}}_s(\omega, \alpha) = \mathfrak{T}_s \{ \mathfrak{R}(s, \alpha) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(s, \alpha) e^{-i\omega s} ds = \tilde{f}_{z,s}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \tilde{f}_{x,y}(v_x, v_y), \quad (14)$$

де координати в прямокутній (v_x, v_y) і в полярній (ω, α) системах координат області частот (рис.3) зв'язані співвідношеннями (8).

2.2. Фур'є-алгоритм відновлення томограми

За двовимірним фур'є-образом $\tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$ можна відновити функцію $f(x, y)$, застосовуючи *зворотне двовимірне ПФ у полярних координатах* (13).

Фур'є-алгоритм реконструкції томографічного зображення $f(x, y)$ такий:

1) Знаходяться одновимірні фур'є-образи $\tilde{\mathfrak{p}}_s(\omega, \alpha)$ за проєкціями $\mathfrak{p}(s, \alpha)$:

$$\tilde{p}(\omega, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \alpha) e^{-i\omega s} ds .$$

Отримуємо двовимірний спектр в полярній системі координат (ω, α) .

2) Виконується зворотне двовимірне ПФ у полярній системі координат:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \omega \tilde{p}(\omega, \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\omega d\alpha . \quad (15)$$

У випадку застосування Фур'є-алгоритма до реальних дискретних даних, що є двовимірним масивом проєкцій $p(s_j, \alpha_i)$, де $j = \overline{0, N_s - 1}$, $i = \overline{0, N_\alpha - 1}$, виникають труднощі, обумовлені тим, що процедури дискретного ПФ здійснюються на *прямокутній сітці відліків*, а фур'є-образи проєкцій знаходяться на *полярній сітці* (див. рис.3). Тому в частотній області застосовується *інтерполяція* відомих значень у вузлах полярної сітки в значення у вузлах прямокутної сітки.

Фур'є-алгоритм відновлення томограми за *дискретними* даними складається з трьох основних операцій:

- 1) Обчислення за допомогою одновимірного дискретного ПФ (ДПФ) або швидкого ПФ (ШПФ) фур'є-образів проєкцій $\tilde{p}_s(\omega_j, \alpha_i)$ для дискретних значень кута α_i , $i = \overline{0, N_\alpha - 1}$.
- 2) Інтерполяція значень $\tilde{p}_s(v_{xk}, v_{yl})$, де $k = \overline{0, N_x - 1}$, $l = \overline{0, N_y - 1}$, на прямокутній сітці за значеннями $\tilde{p}_s(\omega_j, \alpha_i)$ на полярній сітці.
- 3) Двовимірне зворотне ДПФ або ШПФ на прямокутній сітці, що дає оцінку функції зображення $f(x_k, y_l)$ так само на прямокутній сітці.

Переваги Фур'є-алгоритма:

- економічність за рахунок використання двовимірного ШПФ у випадку при розмірності рядків і стовпців, кратних 2^k , однак для зменшення помилок інтерполяції масиви даних необхідно доповнювати нулями;
- у результаті застосування інтерполяції усуваються характерні для алгоритмів відновлення томограм артефакти (помилкові об'єкти і лінії), особливо помітні на краях зображення.

Недоліки:

- відліки в полярній системі координат фур'є-образів проєкцій не еквідистантні – щільність точок неоднакова (див. рис.3);
- для переходу до прямокутної сітки (v_x, v_y) в частотній області необхідна інтерполяція, що, крім позитивного ефекту, має й негативний: вносить викривлення під час зворотного перетворення функції в систему координат (x, y) ;
- якість інтерполяції на низьких частотах краще у зв'язку з більшою щільністю відліків (див. рис.3), що призводить до зниження чіткості відновлюваного зображення (по суті, множення Фур'є-образів проєкцій на ω замінюється інтерполяцією);
- високочастотні осциляції на зображенні, що відновлюється, обумовлені різкими стрибками яскравості на краях проєкційних даних, спричинених

суттєвою різницею щільності повітря та речовини, що сканується рентгенівськими променями.

2.3. Алгоритм зворотного проектування

Для виведення алгоритму зворотного проектування заради зручності перепишемо формулу зворотного ПФ в полярній системі координат (12):

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \omega d\alpha d\omega,$$

де $\tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$ – фур'є-образ функції $f(x, y)$ в полярній системі координат (8).

Застосовуючи теорему про центральний переріз (14), замінивши $\tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$ на фур'є-образ проекції $\tilde{p}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$, маємо:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \omega \tilde{p}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\alpha d\omega,$$

Використовуючи властивість симетрії фур'є-образа ПР³ $\tilde{p}(\omega, \alpha) = \tilde{p}(-\omega, \alpha + \pi)$, змінюємо границі інтегрування $\begin{cases} 0 \leq \alpha < 2\pi; \\ 0 \leq \omega < \infty, \end{cases}$ на більш зручні $\begin{cases} 0 \leq \alpha < \pi; \\ -\infty < \omega < \infty. \end{cases}$ Тоді:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{p}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\omega d\alpha. \quad (16)$$

Таким чином, щоб за проекціями $p(s, \alpha)$ відновити функцію $f(x, y)$, необхідно у відповідності з (16) виконати таку послідовність операцій:

1) Знаходження одновимірних фур'є-образів проекцій $\tilde{p}_s(\omega, \alpha)$:

$$\tilde{p}_s(\omega, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \alpha) e^{-i\omega s} ds,$$

або з урахуванням обмеженості розмірів об'єкту, що досліджується (рис.1):

$$\tilde{p}_s(\omega, \alpha) = \int_{-r}^r p(s, \alpha) e^{-i\omega s} ds.$$

2) Помноження $\tilde{p}_s(\omega, \alpha)$ на $|\omega|$.

3) Знаходження за допомогою одновимірного зворотного ПФ модифікованих проєкцій

$$\hat{p}(x \cos \alpha + y \sin \alpha, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \hat{p}(\omega, \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\omega . \quad (17)$$

4) Інтегрування по куту α :

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \hat{p}(x \cos \alpha + y \sin \alpha, \alpha) d\alpha . \quad (18)$$

Операція (18) є операцією зворотного проєктування.

Для дискретних даних модифіковані проєкції $\hat{p}(\cdot)$ (17) обчислюються за допомогою ДПФ, а операція інтегрування (18) замінюється підсумовуванням по куту α_i .

Перші три операції за наведеним алгоритмом для отримання модифікованих проєкцій $\hat{p}(\cdot)$ можна замінити операцією згортки проєкції $p(s, \alpha)$ (для фіксованого кута α) з функцією $h(s)$:

$$\hat{p}(x \cos \alpha + y \sin \alpha, \alpha) = \hat{p}(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s_1) p(s - s_1) ds_1 = h(s) * p(s, \alpha) , \quad (19)$$

де $h(s) = \mathfrak{Z}^{-1}\{|\omega|\}$ – імпульсна характеристика фільтра з частотною характеристикою $H(\omega) = |\omega|$; * – операція згортки; $\mathfrak{Z}^{-1}(\cdot)$ – символ зворотного ПФ.

Зрозуміло, що такий фільтр посилює верхні частоти.

З виразів (18) та (19) випливає, що зворотне ПР $f(x, y) = \Re^{-1}(p(s, \alpha))$ за допомогою алгоритму згортки здійснюється в два етапи:

- 1) Згортка проєкцій $p(s, \alpha)$ з імпульсною характеристикою $h(s)$ (19). Результатом згортки є модифіковані проєкції $\hat{p}(s, \alpha)$.
- 2) Зворотне проєктування модифікованих проєкцій за формулою (18).

Переваги алгоритмів зворотного проєктування:

- операції згортки і зворотного проєктування для кожного ракурсу α можуть виконуватися незалежно, а вихідне зображення знаходиться як сума зображень, отриманих для кожного кута. Отже, витрати машинного часу під час паралельної обробки даних виявляються виключно малими;
- висока якість томограми локальної ділянки досліджуваного перерізу (провічується лише цікава для діагностики ділянка, при цьому кількість променів і, звідси, доза опромінення помітно зменшуються). Вказана перевага обумовлена тим, що імпульсна характеристика фільтра містить лише кілька значущих відліків, і відсутність проєкційних даних за межами порівняно вузького пучка призводить лише до спотворень відліків на краях локальної ділянки.

Недоліки:

- підвищена чіткість модифікованих проєкцій, обумовлена застосуванням фільтра високих частот $H(\omega) = |\omega|$;
- потрібна додаткова фільтрація для послаблення посиленого множенням на $|\omega|$ високочастотного шуму, що вносить спотворення (необхідно для відновлення зображення за даними абсорбції, для фазового контрасту якість задовільна [9]);
- під час знаходження оцінки томограми на дискретній прямокутній сітці за допомогою операції зворотного проєктування (18) так само застосовується інтерполяція, однак не в частотних, як для Фур'є-алгоритму, а в просторових координатах.

Алгоритм зворотного проєктування для реконструкції томографічних зображень найбільш поширений у рентгенівській КТ. Приклад застосування алгоритму наведено на рисунку 4.

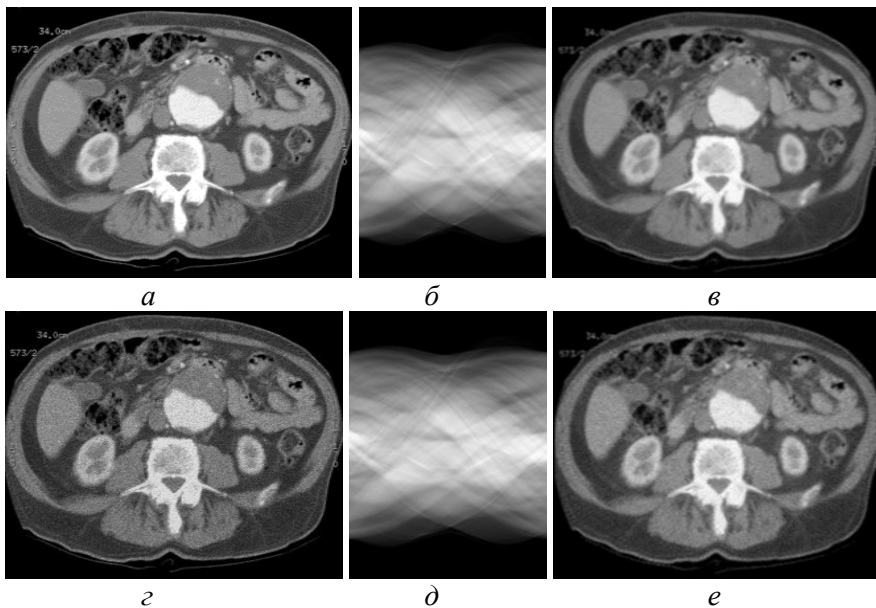


Рисунок 4 – Реконструкція томограми зрізу мозку: а) тестове зображення; б) синограма; в) відновлене зображення; г) зображення з шумом Пуассона; д) синограма зображення з шумом; е) реконструкція зображення з шумом

2.4. Ітераційні алгоритми

Розглянемо зворотне ПФ у полярній системі координат (16):

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \mathfrak{F}_{\omega, \alpha}^{-1} \{ \tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) \} = \\
 &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\omega d\alpha . \quad (20)
 \end{aligned}$$

Проекції $p(s, \alpha)$ двовимірної функції $f(x, y)$ для кожного кута α є одновимірними функціями від змінної s . Проекцію можна перетворити в двовимірну функцію, розтягнувши (виконавши зворотне проєктування) по

всій площині (x, y) . Внаслідок отримуємо зворотну проекцію $p_\alpha(x, y) = p(x \cos \alpha, y \sin \alpha, \alpha)$.

Сумарне зображення характеризується інтегруванням (підсумовуванням) зворотних проекцій для всіх значень кута $0 \leq \alpha < \pi$:

$$f_\Sigma(x, y) = \int_0^\pi p(x \cos \alpha, y \sin \alpha) d\alpha. \quad (21)$$

З урахуванням зворотного ПФ для проекції: $p(s, \alpha) = \mathfrak{F}_\omega^{-1}\{\tilde{p}(\omega, \alpha)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_s(\omega, \alpha) e^{i\omega s} d\omega$ і теореми про центральний переріз (14): $\tilde{p}_s(\omega, \alpha) = \tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \tilde{f}(v_x, v_y)$ вираз (21) набуде вигляду:

$$f_\Sigma(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) e^{i\omega s} d\omega d\alpha. \quad (22)$$

Порівнюючи (20) та (22), отримуємо такий зв'язок функції томограми $f(x, y)$ та сумарного зображення $f_\Sigma(x, y)$:

$$f_\Sigma(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \tilde{f}(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) / |\omega|. \quad (23)$$

З урахування формул полярної системи координат (8) у декартовій системі координат (v_x, v_y) формула (23) переписеться так:

$$f_\Sigma(v_x, v_y) = \tilde{f}(v_x, v_y) H_\Sigma(v_x, v_y), \quad (24)$$

де $\tilde{f}(v_x, v_y)$ – фур'є-образ функції зображення $f(x, y)$;

$H_\Sigma(v_x, v_y) = 1 / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ – частотна характеристика фільтра низьких частот.

Коефіцієнт передачі *інверсного фільтра* для відновлення томограми $f(x, y)$ за сумарним зображенням $f_\Sigma(x, y)$ матиме вигляд:

$$H_{mm}(v_x, v_y) = 1 / H_\Sigma(v_x, v_y) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (25)$$

де v_x, v_y – лінійні частоти.

Таким чином, можливий алгоритм зворотного проектування для відновлення томограми, що складається з наступних дій:

- 1) За проекціями $p_\alpha(x, y)$ знаходиться сумарне зображення $f_\Sigma(x, y)$ у відповідності з формулою (21);
- 2) Здійснюється інверсна фільтрація в частотних або просторових координатах:

$$f(x, y) = f_{\Sigma}(x, y) * h_{mm}(x, y), \quad (26)$$

де $h_{mm}(x, y) = \mathfrak{F}_{v_x, v_y}^{-1} \{H_{mm}(v_x, v_y)\}$ – імпульсна характеристика інверсного фільтра.

Оскільки фільтр $H_{\Sigma}(v_x, v_y) = 1/\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ (25) послаблює верхні частоти, сумарне зображення $f_{\Sigma}(x, y)$ (24) буде розфокусованим (нечітким). Тому для кращого відновлення томограми, застосовуються *ітераційні алгоритми* [7, 10], *що використовують сумарне зображення в якості оцінки томограми.*

Переваги ітераційних алгоритмів:

- не треба зворотний оператор;
- відносна простота синтезу нелінійних ітераційних алгоритмів, що враховують апріорну інформацію про зображення; у якості оцінки зазвичай використовується зображення, отримане на попередньому кроці;
- можлива робота в інтерактивному режимі для досягнення компромісу між якістю відновлення і часом обробки.

Недоліки:

- поява смуг у результаті розтягування проєкцій, якщо кількість кутів для підсумовування проєкцій недостатня;
- евристичність (для більш точного відновлення томограми необхідне зворотне ПР);
- недоліки інверсного фільтра (крайові ефекти, посилення шуму, низька завадостійкість);
- незадовільна контрастність і чіткість сумарного зображення, звідси, для поліпшення якості оцінки томограми, необхідне застосування ітераційного алгоритму;
- затрати часу для ітерацій.

Висновок

Наукові праці видатного математика Йоганна Радона набагато випередили свій час і значно сприяли науково-технічному прогресу. Після створення рентгенівських установок завдяки роботам Радона стало можливим те, що колись би вважалося дивом, – зазирнути всередину непрозорого об'єкту та отримати детальну картину його внутрішньої структури без втручання в її цілісність.

Практичну значимість рентгенівської КТ у різних сферах господарювання складно переоцінити. Особливо в медицині: КТ стала надзвичайно важливим неінвазивним методом діагностики та лікування, що дозволяє без оперативного втручання детально розглядіти вміст і стан внутрішніх органів. Це призвело до істотного прориву в досягненні глобальної мети забезпечення високої достовірності діагностики, ефективності лікування та профілактики різних хвороб, отже, покращення здоров'я, тобто якості та тривалості життя людини.

У майбутньому перспективи розвитку КТ великі. Створюються томографи нового покоління, що забезпечують високу ефективність та об'єктивність досліджень. Новим і перспективним напрямом розвитку КТ є фазоконтрастна рентгенівська томографія [10, 11], застосування якої

дозволить не тільки покращити якість зображень, зокрема чіткіше виявляти неоднорідності в м'яких тканих, але й суттєво зменшити дозу опромінювання, а також здешевити КТ дослідження і зробити їх масовими та загальнодоступними.

Теоретичний матеріал, поданий у статті, викладено в доступній для сприйняття формі із сподіванням на те, що він допоможе тим, хто прагне вдосконалення та розвитку чудових можливостей, що надає комп'ютерна томографія, через впровадження нових ідей, розробок та вдалих рішень, призначених слугувати на благо людству.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Radon J. Uber die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser mannigfaltigkeiten. Berichte uber die Verhandlungen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig // Journal of Mathematical Physics, 1917, no. 69, pp. 262-277.
2. Buzug T. Computed Tomography: From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT. Springer-Verlag, 2008.
3. Kak A.C., Slaney M. Principles of Computerized Tomographic Imaging. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001.
4. Троицкий И.Н. Компьютерная томография. - Москва: Знание, 1988.
5. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. - М.: Мир, 1983.
6. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. - Новосибирск: Наука, 1987.
7. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. Цифровая обработка изображений в информационных системах: Учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. - 352 с.
8. Грузман И.С. Математические задачи компьютерной томографии // Соровский образовательный журнал, 2001, т. 7, № 5, с. 117-121.
9. Krenkel M. Cone-beam x-ray phase-contrast tomography for the observation of single cells in whole organs. - Universitätsverlag Göttingen: "Göttingen series in X-ray physics", 2015, vol. 17. – 238 p.
10. Biemond J., Lagendijk R.L., Mersereau R.M. Iterative Methods for Image Deblurring // Proc. of the IEEE, May 1990, vol. 78, no. 5, pp. 856 - 883.
11. Paganin D., Nugent K. A. Noninterferometric Phase Imaging with Partially Coherent Light// Physical Review Letters, Mar 1998, vol. 80, no. 12, pp. 2586 - 2589.

REFERENCES

1. Radon J. Uber die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser mannigfaltigkeiten. Berichte uber die Verhandlungen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Journal of Mathematical Physics, 1917, vol.69, p262-277.
2. T. Buzug. Computed Tomography: From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT. Springer-Verlag, 2008.
3. A.C. Kak, M. Slaney, Principles of Computerized Tomographic Imaging, Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001.
4. Troitskiy Y.N. Komp'yuternaya tomografiya [Computed Tomography]. – Moscow: Znanye Publ., 1988. (In Russian)
5. Khermen H. Vosstanovlenye yzobrazhenyy po proektsiyam [Projection image restoration]. – Moscow: Myr Publ., 1983. (In Russian)

6. Pykalov V.V., Preobrazhenskiy N.H. Rekonstruktyvnaya tomografiya v hazodynamike y fizyke plazmy [Reconstructive tomography in gas dynamics and plasma physics]. - Novosybyrsk: Nauka Publ., 1987. (In Russian)
7. Hruzman Y.S., Kyrychuk V.S., Kosykh V.P., Peretyahyn H.Y., Spektor A.A. Tsyfrovaaya obrabotka yzobrazheniy v ynformatsyonnykh systemakh: Uchebnoe posobyе. [Digital Image Processing in Information Systems: A Training Manual] – Novosybyrsk: NHTU Publ., 2002. – 352 p. (In Russian)
8. Hruzman Y.S. Matematycheskiye zadachy komp'yuternoy tomografyy [Mathematical problems of computed tomography] / Sorovskiy Educational Journal, 2001, vol.7, no.5, pp.117-121. (In Russian)
9. Krenkel M. Cone-beam x-ray phase-contrast tomography for the observation of single cells in whole organs. - Universitätsverlag Göttingen: “Göttingen series in X-ray physics”, 2015, vol.17. – 238 p.
10. Biemond J., Lagendijk R.L., Mersereau R.M. Iterative Methods for Image Deblurring // Proc. of the IEEE, May 1990, vol.78, no.5, pp.856 - 883.
11. Paganin D., Nugent K. A. Noninterferometric Phase Imaging with Partially Coherent Light// Physical Review Letters, Mar 1998, vol. 80, no. 12, pp. 2586 - 2589.

Стаття надійшла до редакції 19.10.2019.