КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

Н.А. ВАРЕНЮК

ПРОГРАМНО-АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто алгоритм розв'язання та програмні модулі для ідентифікації параметрів початково-крайової задачі теплопровідності.

Вступ. У роботах [1, 2] розглянуто теорію оптимального керування станами багатокомпонентних розподілених систем, на основі якої запропоновано технологію побудови явних виразів градієнтів J'_{u_n} функціоналів-нев'язок для ідентифікації градієнтними методами [3, 4] параметрів багатокомпонентних розподілених систем. Результати апробації запропонованої технології шляхом ідентифікації різноманітних параметрів одновимірної за просторовою змінною параболічної системи з умовами спряження складеного тонкого включення наведено в [5]. Алгоритми розв'язання деяких обернених задач теплопровідності пластин та результати чисельних експериментів наведено в [6]. Розв'язання практичної задачі ідентифікації теплофізичних характеристик пластини описано в [7]. Дана робота є продовженням зазначених досліджень та містить опис програмних модулів, за допомогою яких отримано результати чисельних експериментів при розв'язанні обернених задач теплопровідності.

1. Математична модель. Нехай в області $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (a;\xi)$, $\Omega_2 = (\xi;b)$, ($a < \xi < b < \infty$) визначено рівняння

$$C\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + f(x,t). \qquad (1)$$

На кінцях відрізка $[a,b]$ крайові умови мають вигляд

$$-k\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=a} = \beta_1,\ k\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=b} = \beta_2, \qquad (2)$$

де

$$\beta_1,\ \beta_2 = \text{const},\ \ k(x,t)\big|_{\Omega_{j\mathrm{T}}} \in C(\bar{\Omega}_{j\mathrm{T}}) \cap C^{1,0}(\Omega_{j\mathrm{T}}),\ 0 < k_0 < k(x,t) < k_1 < \infty,$$

$$k_0,\ k_1 = \text{const},\ \ f\big|_{\Omega_{j\mathrm{T}}} \in C(\Omega_{j\mathrm{T}}),\ C = \text{const} > 0\ \ j = 1,2,\ \left|\frac{\partial k}{\partial x}\right| < \infty .$$

У точці розриву $x = \xi$ задано умови спряження (І) [8]:

$$R_1\left\{k(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{-} + R_2\left\{k(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}^{+} = [y] + \delta, \tag{3}$$

$$\left[k(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \omega, \tag{4}$$

або умови спряження (ІІ) [8]:

$$\left.\left\{k(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right\}\right|_{x=\xi} = r\left[y\right], \tag{5}$$

де $\left[\varphi\right] = \varphi^{+} - \varphi^{-}$, $\varphi^{\pm} = \left\{\varphi\right\}^{\pm} = \varphi(\xi \pm 0, t)$, $R_1, R_2 \geq 0,\ \delta = \text{const} > 0,\ \ r,\ \omega = \text{const}.$

При $t = 0$ задано початкову умову

$$y(x,0) = y_0(x),\ x \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2,\ \ y_0(x)\big|_{\bar{\Omega}_j} \in C(\bar{\Omega}_j),\ \ j = 1,2. \tag{6}$$

Наведена задача є прямою і вона полягає у знаходженні функції $y(x,t)$, яка задовольняє умови (1) – (6).

При розв'язанні обернених задач для рівняння (1) шуканою величиною виступає одна або декілька функцій із сукупності $\tilde{u} = \{C,\ k(x,t),\ \beta_1,\ \beta_2,\ r,\ y_0(x),$ $f(x,t)\}$, $\tilde{u} \in \mathcal{U} = R_{+}$, R_{+} – множина дійсних чисел. Відповідно до того, який елемент є невідомим, розглядається коефіцієнтна задача, гранична, ретроспек-тивна або змішаного типу [9].

При цьому в N точках $d_i \in \Omega$ задано додаткові умови – відомі значення розв'язку $y(x,t)$ задачі (1) – (6):

$$y(d_i,t) = \bar{f}_i(t),\ t \in (0,T),\ \ i = \overline{1,N},\ N \geq 1, \tag{7}$$

де $a < d_1 < ... < d_N < b,\ f_i(t) \in C([0,T]).$

Для однозначного розв'язання обернених задач необхідне виконання умови $N_{\min} \geq 1$ у випадку одного невідомого параметра, а якщо невідомими виступають декілька функцій із вказаного набору, то $N_{\min} \geq n$, де n – кількість шуканих функцій [9].

Розв'язок оберненої задачі $u \in \tilde{u}$ шукаємо наближено. Він має мінімізувати на $\mathcal{U}$ функціонал-нев'язку [3, 4, 9, 10]

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\mathrm{T}} \rho_i(t)\left(y(u;d_i,t) - \bar{f}_i\right)^2 dt, \tag{8}$$

де $\rho_i(t)$ – ваговий коефіцієнт, $i = \overline{1,N}$.

Наближення u_{n+1} розв'язку задачі (1) – (6), (8) знаходимо за допомогою ітераційного процесу

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \; n = 0,1,\ldots,n^*, \tag{9}$$

який починається з деякого початкового наближення $u_0 > 0$, а напрямок спуску p_n і коефіцієнт β_n визначаються наступними виразами [9, 10]:

– для методу мінімальних похибок

$$p_n = J'_{u_n}, \; \beta_n = \frac{\|l_n\|^2}{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}, \tag{11}$$

– для методу швидкого спуску

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}{\left\|AJ'_{u_n}\right\|^2}, \tag{12}$$

– для методу спряжених градієнтів

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \gamma_0 = 0, \gamma_n = \frac{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}{\left\|J'_{u_{n-1}}\right\|^2}, \; \beta_n = \frac{\left(J'_{u_n}, p_n\right)}{\|Ap_n\|^2}, \tag{13}$$

$l_n = Au_n - \overline{f}$, $\overline{f} = \{f_i\}_{i=1}^N$, $Au = \{A_i u\}_{i=1}^N$, $A_i u = y(u; d_i, t)$, J'_{u_n} – градієнт функціонала (8) в точці $u = u_n$.

Обґрунтування ітераційного методу для розв'язання оберненої задачі наведено в роботах [9, 10].

Використання одного з методів (11) – (13) потребує обчислення значення градієнта J'_{u_n} функціонала (8). Для його знаходження використовується спряжена задача, яка для кожного наближення $u = u_n$ має вигляд:

$$-C(t)\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \; (x,t) \in \Omega_T. \tag{14}$$

$$k\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0, \; k\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{x=b} = 0, \; t \in (0,T]. \tag{15}$$

$$[\psi] = 0, \; x = d_i, \; i = \overline{1,N}, \; t \in (0,T], \tag{16}$$

$$\left[k\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\bigg|_{d_i} = -\rho_i(t)\big(y(u; d_i, t) - f_i\big), \; i = \overline{1,N}, \; t \in (0,T], \tag{17}$$

$$\psi(x,T) = 0, \; x \in (a,b). \tag{18}$$

В роботах [3, 4, 9 – 13] показано зв'язок градієнта функціонала-нев'язки із розв'язком $\psi(x,t)$ спряженої задачі (14) – (18) та наведено його явний вигляд для різних типів обернених задач.

Зупинимося більш детально на чисельних аспектах та розглянемо програмні модулі, за допомогою яких протестовано чисельні алгоритми і розв'язано обернені задачі з наперед відомим розв'язком.

Алгоритм розв'язання задачі (1) – (8), де один із параметрів $C, k(x,t)$, $\beta_1, \beta_2, r, y_0(x)$ або $f(x,t)$ є невідомим.

В ітераційному процесі (9) покладаємо $n=0$.

Крок 1. Задаємо початкове наближення шуканого значення $u=u_0$. Методи вибору початкового наближення описані в [9].

Крок 2. Розв'язуємо пряму задачу (1) – (6), де $u=u_n$ і обчислюємо значення $y=y(u_n;d_i,t),\ i=\overline{1,N},\ t\in(0,T]$.

Крок 3. Розв'язуємо спряжену задачу (14) – (18) і обчислюємо розв'язок $\psi(x,t)$ та градієнт J'_{u_n}.

Крок 4. В залежності від вибраного методу.

4.1. Для методу (11) обчислюємо $\|1_n\| = \left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^{T}\rho_i(t)\big(y(u_n;d_i,t)-f_i\big)^2\,dt\right)^{1/2}$.

4.2. Для методу (12) покладаємо $u=J'_{u_n}$ і розв'язуємо пряму задачу (1) – (6). Отримуємо розв'язок $y=y(J'_{u_n};d_i,t)=AJ'_{u_n},\ i=\overline{1,N},\ t\in(0,T]$.

4.3. Для методу (13) при $n=0$ виконуємо крок 4.3.1, при $n\neq 0$ – 4.3.2.

4.3.1. Покладаємо $u=p_n$, розв'язуємо пряму задачу (1) – (6) і отримуємо розв'язок $y=y(p_n;d_i,t)=Ap_n,\ i=\overline{1,N},\ t\in(0,T]$. Обчислюємо $\left(J'_{u_n},p_n\right)= =\int_0^T\int_\Omega J'_{u_n}p_n\,dxdt$ та β_n, запам'ятовуємо значення J'_{u_n} і p_n для наступної ітерації.

4.3.2. Обчислюємо γ_n, p_n, виконуємо крок 4.3.1.

Крок 5. Обчислюємо u_{n+1}.

Крок 6. Обчислюємо $E=\|u_{n+1}-u_n\|$.

Якщо $E<\varepsilon$, де ε – досить мале число, то u_{n+1} – розв'язок.

Якщо $E>\varepsilon$ покладаємо $n=n+1$ та переходимо до кроку 2.

Кінець.

Для розв'язання обернених задач (1) – (8) розроблено програму, яка дозволяє виконувати ідентифікацію таких коефіцієнтів: теплопровідності (фільтрації) $k=\text{const}, k(x), k(t)$; теплоємності $C=\text{const}$; потоків $\beta_1=\text{const}$, $\beta_2=\text{const}$ та $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$; проникливості r слабкопроникливої складової у точці $x=\xi$; джерела/стоків $f=\text{const}, f(x), f(t), f(x,t)$; початкової умови $y_0=\text{const}$, $y_0=y_0(x)$.

Система містить модулі, які виконують обчислення, спільні для розв'язання всіх перерахованих задач: обчислення інтегралів, диференціалів, розв'язання прямої задачі за допомогою МСЕ, розв'язання спряженої задачі, перевірку завершення ітераційного процесу, виведення результатів розрахунків, а також спеціалізовані модулі для кожного зазначеного типу задачі.

Розв'язання задачі починається із введення відомих даних (рис. 1): довжини відрізку $[a, b]$; кроку дискретизації h за просторовою змінною. Вказується стаціонарність процесу, часовий проміжок $[T0; T1]$, крок дискретизації t за часовою змінною. Наявність, кількість та координати точок розриву задаються окремо (рис. 2).

На закладці «Ітераційний процес» вказуються точки спостереження ($d_i \in \Omega,\ i = \overline{1, n},\ n -$ кількість точок спостереження), вигляд ітераційної схеми (метод мінімальних похибок, метод швидкого спуску, метод спряжених градієнтів), кількість ітерацій, критерій зупинки ітераційного процесу (рис. 3).

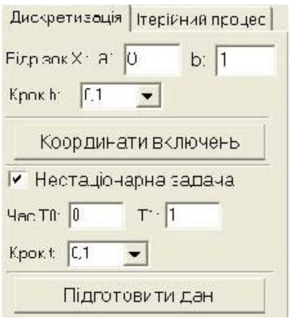


РИС. 1. Введення даних

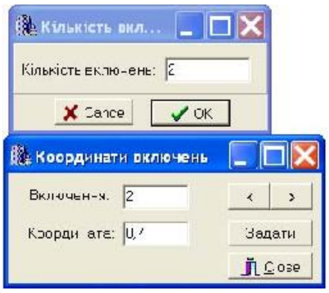


РИС. 2. Інформація про розриви

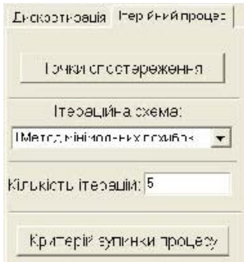


РИС. 3. Інформація про ітераційний процес

У вікні «Введення точок спостереження» (рис. 4) задаються номера точок спостереження, їх координати за змінними x та t, значення вагового коефіцієнта ρ_i (приймається $\rho_i = 1$).

У полі «Значення» для вибраної точки задається відоме, задане за умовою задачі, значення розв'язку. Якщо галочку біля поля «Значення» не поставлено, то це означає, що розв'язується тестова задача з відомим точним розв'язком і цей параметр для зазначеної точки буде обчислено автоматично.

Керування зупинкою процесу здійснюється у відповідному вікні (рис. 5).

Наближення параметра k. Вся необхідна для наближення коефіцієнта k інформація задається і в полях форми, показаної на рис. 6. Вибирається вигляд коефіцієнта $k = \text{const}$, $k = k(x)$ чи $k = k(t)$ та метод, за яким буде обчислюватися градієнт функціоналу J'_{u_n}. У випадку параметричного способу знаходження коефіцієнта, тобто коли шуканий коефіцієнт має вигляд $k_0(x) = = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ або $k_0(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, потрібно зазначити відповідні поля. Також задається початкове значення, від якого починається наближення. Наприклад, якщо коефіцієнт k шукається за допомогою полінома $k(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$, то зазначені поля будуть мати вигляд, показаний на рис. 6. У цьому випадку шуканими будуть параметри a_0, a_2, a_4, їх початкові значення відповідно дорівнюють 2, 6, 0.5.

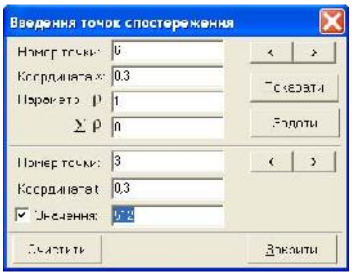


РИС. 4. Інформація про точки спостереження

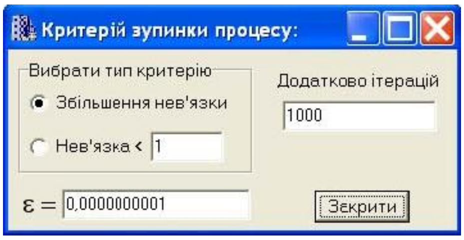


РИС. 5. Критерій зупинки ітераційного процесу

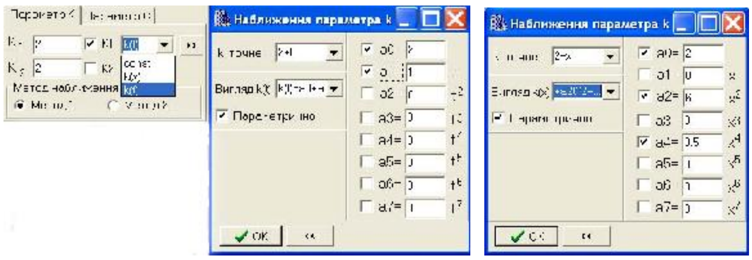


РИС. 6. Інформація про наближення коефіцієнта $k = \text{const}$, $k = k(x)$, $k = k(t)$

Різні випадки роботи системи на прикладі розв'язання задачі із наперед відомим точним розв'язком при $u = k = \text{const}$ на відрізку $\Omega_T = [0;1] \times (0,1]$ наведено в [5].

Для знаходження коефіцієнта $u = k = k(x)$ у вигляді функції обчислення J'_{u_n} виконується за формулою (метод 1):

$$J'_{u_n} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right)\psi dt + \int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\bigg|_{x=0} \psi(0,T)dt - \int_0^T \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\bigg|_{x=l} \psi(l,T)dt = \varphi(x),$$

$$\left\| J'_{u_n} \right\| = \int_0^l \varphi(x)dx\,.$$

Для знаходження у параметричному вигляді коефіцієнта $u = k(x) = = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...,\ x \in [0, l]$ для кожного із параметрів $a_i,\ i = \overline{0,6}$ градієнт функціоналу J'_{u_n} знаходиться за наступною формулою:

$$J'_{u_n} = \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\right)\psi dx dt + \int_0^T \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\bigg|_{x=0} \psi(0,T) dt - \int_0^T \varphi_i \frac{\partial y(u_n)}{\partial x}\bigg|_{x=l} \psi(l,T) dt,$$

де $\varphi_i = x^i$ при a_i – шукане, $i = \overline{0,6}$.

Приклад. За допомогою розроблених модулів розв'язано модельний приклад на відрізку $\Omega_T = [0,1] \times (0,1]$, коли $u = k(x) = a + bx + cx^2$, $k_{точне} = 2 + x^2$ – вважається невідомим. Нехай $a = 2, b = 0$, а $c = 1$ – шукане. В точках $d_0 = 0.2$, $d_1 = 0.7$ задано відомі значення розв'язку. Для розв'язання прямих та відповідних спряжених задач використовувалися квадратичні за просторовою змінною поліноми методу скінченних елементів (МСЕ) з кроком розбиття по відрізку $[0,1]$ $h = 0.1$, а відповідні задачі Коші розв'язано за допомогою схеми Кранка – Ніколсона з кроком дискретизації за часом $t = 0.1$. В таблиці наведено результати відновлення параметра c за різними початковими наближеннями c_0, c_n – знайдений розв'язок, n – кількість ітерацій, $\delta_c = \left|\frac{c - c_n}{c}\right| \cdot 100\%$ – відносна похибка, $\|l_n\| = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_0^T (y(u_n;\ d_i, t) - f_i(t))^2 dt\right)^{1/2}$ – нев'язка. Як видно з таблиці, отримуємо шукане значення з похибкою $\delta_c < 0,011$ % за різними значеннями початкового наближення c_0.

ТАБЛИЦЯ

c_0	c_n	δ_c, %	n	$\|l_n\|$
0.1	0.999891	0,0108	297	1,63E-9
0.5	0.999892	0.0108	277	1,60E-9
0.9	0.999890	0.0109	223	1,66E-9
1	1.000000	2,73E-8	1	3,04E-17
1.1	1.000107	0.01078	223	1,61E-9
1.5	1.000107	0.0107	275	1,60E-9
2	1.000106	0.01069	297	1,58E-9

Наближення параметрів β_1, β_2. Розглянемо відновлення параметрів крайових умов другого роду (2).

На рис. 7 показано вікно, у якому ставляться необхідні позначки і задаються початкові значення відновлюваних параметрів в одній із точок $x = a$ чи $x = b$.

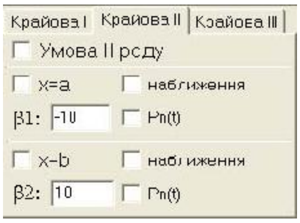


РИС. 7. Наближення параметрів крайових умов

Для відновлення одного з параметрів β_1 чи β_2, або обох одночасно, галочки ставляться навпроти надпису «наближення». Градієнт функціоналу J'_{u_n} обчислюється таким чином: $J'_{u_n} = J'_{u_{n1}} = = \int\limits_0^T \Psi(a,t)dt, \quad u = \beta_1, \quad J'_{u_n} = J'_{u_{n2}} = \int\limits_0^T \Psi(b,t)dt,$ $u = \beta_2$. При одночасному наближенні β_1 та β_2 виконуються обчислення $J'_{u_{n1}}$ та $J'_{u_{n2}}$ для кожного параметра, при цьому $J'_{u_n} = \left(J'_{u_{n1}}, J'_{u_{n2}} \right)$, а складові у методах (11), (12) та (13) обчислюються наступним чином:

$$p_n = J'_{u_n}, \ \beta_n = \frac{\|l_n\|^2}{\left\|J'_{u_{n1}}\right\|^2 + \left\|J'_{u_{n2}}\right\|^2}, \tag{11’}$$

$$p_n = J'_{u_n}, \ \beta_n = \frac{\left\|J'_{u_{n1}}\right\|^2 + \left\|J'_{u_{n2}}\right\|^2}{\left\|AJ'_{u_n}\right\|^2}, \tag{12’}$$

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \ \gamma_0 = 0, \ \gamma_n = \frac{\left\|J'_{u_{n1}}\right\|^2 + \left\|J'_{u_{n2}}\right\|^2}{\left\|J'_{u_{n1-1}}\right\|^2 + \left\|J'_{u_{n2-1}}\right\|^2}, \ \beta_n = \frac{\left(J'_{u_{n1}}, p_n\right) + \left(J'_{u_{n2}}, p_n\right)}{\left\|AJ'_{u_n}\right\|^2}. \tag{13’}$$

Для відновлення параметрів у вигляді $u = \beta_1(t)$ та $u = \beta_2(t)$ необхідно встановити позначку навпроти $Pn(t)$. У цьому випадку градієнт функціоналу J'_{u_n} обчислюється наступним чином:

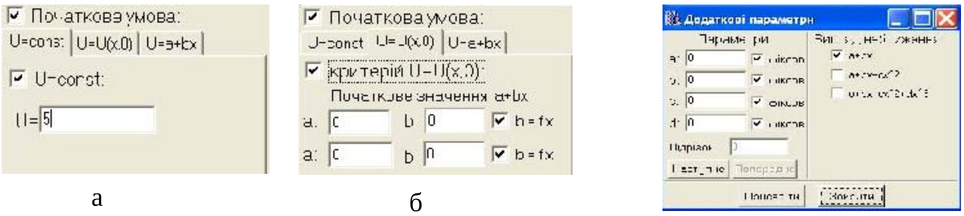
$$J'_{u_n} = J'_{u_{n1}} = \Psi(a,t), \ \text{якщо } \beta_1 - \text{шукане}, \ \left\|J'_{u_{n1}}\right\|^2 = \int\limits_0^T \Psi^2(a,t)dt\,;$$

$$J'_{u_n} = J'_{u_{n2}} = \Psi(b,t), \ \text{якщо } \beta_2 - \text{ шукане}, \ \left\|J'_{u_{n2}}\right\|^2 = \int\limits_0^T \Psi^2(b,t)dt\,.$$

Результати розв’язання модельних прикладів, які проводилися за допомогою даної системи з різною кількістю точок спостереження, наведено в [6].

Наближення параметрів початкової умови. Початкова умова $y_0(x)$ може відновлюватися як постійна $y_0 = \text{const}$, як функція $y_0 = y_0(x)$ та параметрично у вигляді полінома $y_0 = a + bx + cx^2 + dx^3$. Для кожного вигляду передбачено своє вікно для задавання відновлюваної функції та відповідних початкових значень (рис. 8, а).

При відновленні початкової умови як функції початкове наближення для $y_0(x)$ задається у вигляді $y_0 = a + bx$, а значення a та b задаються у відповідних полях (рис. 8, б). При відновленні початкової умови параметрично, де невідомими вважаються всі або окремі коефіцієнти у поліномі $y_0 = a + bx + cx^2 + dx^3$, початкове значення кожного параметра, інформація про те, чи відбувається його пошук, чи його значення вже відоме, а також вигляд наближення, задаються у діалоговому вікні (рис. 10, в).



а б в

РИС. 8. Відновлення параметрів початкової умови

Можливе розв’язання задачі відновлення початкової умови на відрізку, який поділений на частини за допомогою одного чи двох тонких включень у точках $x = \xi_1$ та $x = \xi_2$.

Відновлення параметрів умов спряження. На рис. 9 показано вікно, в якому вибирається тип умови спряження та задаються значення її параметрів. Робляться відмітки, якщо якийсь із вказаних параметрів наближується.

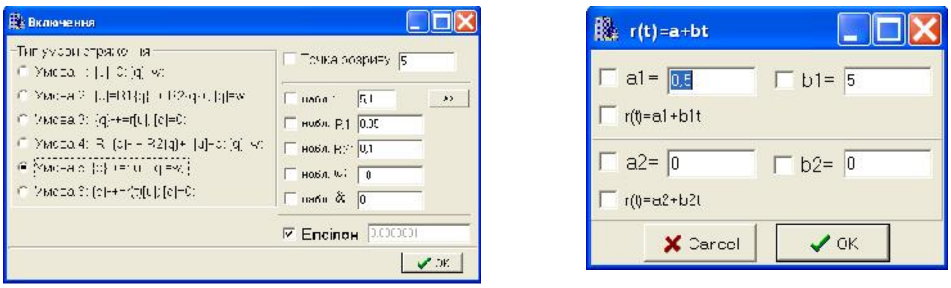


РИС. 9. Відновлення параметрів за умов спряження

Якщо про відновлювані коефіцієнти термічного опору відомо, що за умов спряження $\left\{k\frac{\partial y}{\partial x}\right\}\Big|_{x=\xi_1} = r_1[y],\ \left\{k\frac{\partial y}{\partial x}\right\}\Big|_{x=\xi_2} = r_2[y]$ невідомі параметри, такі що $u = r_1(t)$ чи $u = r_2(t)$ (при наявності 2-х тонких включень), то для цього випадку передбачено можливість знаходження $r_1(t)$ та $r_2(t)$ у параметричному вигляді $r_1^0(t) = a_1^0 + b_1^0 t,\ \ r_2^0(t) = a_2^0 + b_2^0 t.$ Галочка біля параметра означає, що він зафіксований і не шукається в ітераційному процесі.

Модулі, які розв’язують задачу наближення коефіцієнта термічного опору r для одного чи двох включень легко можна застосувати для випадку більшої кількості включень.

Відновлення функції джерела/стоків f. Відомості про функцію джерела/стоків задаються у полях вводу, показаних на рис. 10. Галочка навпроти надпису «Функція витоків/стоків:» означає, що при розв’язанні задачі проводиться ідентифікація функції f. За відсутністю такої позначки поля вводу слугують для введення значень функції.

В системі реалізовано алгоритми із наближеного знаходження функції f одного із наступних виглядів: $f = \text{const}$, $f = f(x)$, $f = f(t)$ та $f = f(x,t)$. Для кожного з цих випадків передбачена своя закладка на панелі параметрів, де вказується вигляд функції та вигляд її наближення.

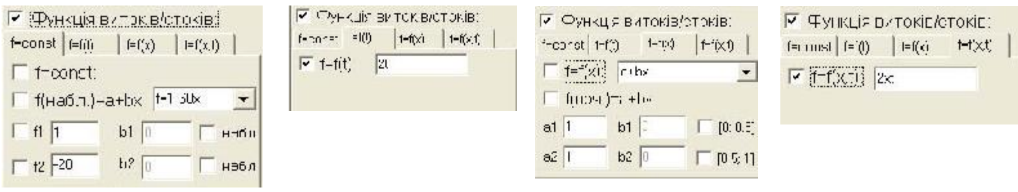


РИС. 10. Наближення параметрів функції джерела/стоків

Одночасне наближення декількох невідомих параметрів. У програмі можливе одночасне наближення декількох невідомих параметрів. Для цього потрібно на етапах задання вхідних даних поставити позначки навпроти кожного із параметрів, які наближаються. В процесі розв’язання задачі проводиться аналіз зазначених параметрів і по черзі активуються відповідні модулі, які реалізують необхідні алгоритми.

Висновок. Розглянуто можливості розробленого програмно-алгоритмічного забезпечення, орієнтованого на розв’язання початково-крайових обернених задач теплопровідності.

Н.А. Варенюк

ПРОГРАММНО-АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрен алгоритм решения и программные модули для идентификации параметров начально-краевой задачи теплопроводности.

N.A. Vareniuk

PROGRAM-ALGORITHMIC SUPPORT FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEMS OF HEAT TRANSFER

The algorithm of the solution and program modules for the problem of identifying the parameters of a heat conduction initial boundary-value problem is considered.

1. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. 400 p.
2. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. Киев: Наук. думка, 2003. 506 с.
3. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение коэффициентных обратных задач теплопроводности для составной пластины. *Проблемы управления и информатики*. 2007. № 3. С. 21 – 48.
4. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 5. С. 33 – 28.
5. *Дейнека В.С., Вещунова Н.А.* Численное решение задач идентификации параметров параболических многокомпонентных систем. *Компьютерная математика*. 2008. № 1. С. 22 – 33.
6. *Дейнека В.С., Вещунова Н.А.* Численное решение обратных задач нестационарной теплопроводности для пластины. *Компьютерная математика*. 2008. № 2. С. 32 – 43.
7. *Дейнека В.С., Вещунова Н.А.* Идентификация теплофизических характеристик пластин. *Компьютерная математика*. 2009. № 1. С. 3 – 12.
8. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев: Наук. думка, 1998. 615 с.
9. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
10. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
11. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение граничных обратных задач теплопроводности для составного стержня. *Проблемы управления и информатики*. 2007. № 2. С. 75 – 97.
12. *Wang J., Silva Neto A.J., Moura Neto F.D., Su J.* Function estimation with Alifanov's iterative regularization method in linear and nonlinear heat conduction problems. Appl. Math. Model. – 2002. **26**, N 11. P. 1093 – 1111.
13. *Ozisik M.N., Orlande H.R.B.* Inverse Heat Transfer. Fundamentals and Applications. Taylor & Francis, 2000. 314 p.

Одержано 04.05.2017

Про автора:

Варенюк Наталія Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: nvareniuk@ukr.net