КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.6:539.3

А.А. АРАЛОВА

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

Математическое моделирование

Рассмотрены некоторые вопросы оптимального управления термоупругим состоянием полого толстого цилиндра. Предложен алгоритм численного идентификации термического сопротивления. Представлены результаты решения модельного примера.

Введение. В работах [1 – 4] для решения задач идентификации параметров широкого круга предложено строить явные выражения градиентов функционалов невязок с помощью соответствующих сопряженных задач, полученных ими в теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем, которая является развитием соответствующих исследований Ж.Л. Лионса. Также эта технология распространена на задачи термоупругого деформирования многокомпонентных тел [5 – 7].

В данной статье рассмотрены вопросы оптимального управления термоупругим состоянием полого цилиндрического тела. Представлены результаты решения модельной задачи по идентификации термического сопротивления при известном наблюдении.

1. Оптимальное управление термоупругого состояния полой длинной цилиндрической оболочки.

Рассмотрим длинный толстый полый изотропный круговой цилиндр. С учетом симметрии, следуя [2, 8], термоупругое состояние длинного толстого полого цилиндра описывается краевой задачей:

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0, \quad r\in\Omega, \qquad (1)$$

где $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=(r_1,\xi)$, $\Omega_2=(\xi,r_2)$, $0<r_1<\P<r_2<\infty$, r_1, r_2 – радиусы, соответственно, внутренней и внешней круговых поверхностей, σ_r, σ_φ – компоненты тензора напряжений.

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi - (3\lambda + 2\mu)\alpha T,\ \ \sigma_\varphi = \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\varphi - (3\lambda + 2\mu)\alpha T,$$

$$\varepsilon_r = \frac{dy}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{y}{r}, \tag{1'}$$

$y = y(r)$ – радиальное смещение; λ, μ – постоянные Ляме; α – коэффициент температурного расширения; ε_r, ε_φ – компоненты тензора деформации; T – изменения температуры $\bar{T}$ от начального ее состояния T_0. С учетом (1') равенство (1) принимает вид:

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right) - \frac{y}{r}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha r\frac{dT}{dr}\right\} = f(r),\ \ r \in \Omega. \tag{2}$$

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right)\right\} = \bar{f}(r),\ \ r \in \Omega, \tag{3}$$

где k – коэффициент теплопроводимости, $\bar{f}$ – мощность источников/стоков. На внутренней и внешней поверхностях цилиндра заданы напряжения

$$\sigma_r(y)\Big|_{r=r_i} = -p_i,\ \ i = 1,2, \tag{4}$$

на внутренней и внешней поверхности заданы краевые условия третьего рода:

$$-k\frac{dT}{dr} = -\alpha_1 T + \beta_1,\ \ r = r_1, \tag{5}$$

$$k\frac{dT}{dr} = -\alpha_2 T + \beta_2,\ \ r = r_2. \tag{6}$$

В точке $r = \zeta$ – на круговой поверхности контакта составляющих Ω_1, Ω_2 тела условия неидеального контакта имеют вид:

$$[y] = 0,\ \ [\sigma_r(y)] = 0,\ \ \left[k\frac{dT}{dr}\right] = 0,\ \ \left\{k\frac{dT}{dr}\right\}^{\pm} = u[T], \tag{7}$$

где первые два условия выражают непрерывность радиального смещения и нормального напряжения на поверхности контакта, а третье и четвертое – наличие слаботеплопроницаемого слоя с термическим сопротивлением $u = \text{const} \ge 0$, $[T] = T^+ - T^-$, $T^{\pm} = \{T\}^{\pm} = T(\xi \pm 0)$.

Задано наблюдение

$$Z(u) = Cy(u), \quad Cy(u) = y(u; d_i), \tag{8}$$

где $C \in L(V, \mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ – некоторое гильбертово пространство, $r_1 \le d_i \le r_2$, $d_i \ne \xi$. Поставим в соответствие каждому управлению $u \in \mathcal{U} = R$ значение функционала стоимости

$$J(u) = \left\|Cy(u) - z_g\right\|^2_{\mathcal{H}} + (\bar{a}u, u)_{\mathcal{U}}, \tag{9}$$

где $z_g \in R$, $(\bar{a}\,u, u)_{\mathcal{U}} \ge \neg_0 \|u\|^2_{\mathcal{U}}$, $\forall u \in \mathcal{U}$, $\neg_0 = \text{const} > 0$, $\bar{a} = \text{const} > 0$. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (2) – (7)

называется вектор-функция $Y=(y,T)$, которая $\forall z=(z_1,z_2)$ удовлетворяет системе равенств

$$a(y,z_1)=l(T;z_1), \tag{10}$$

$$a_1(T,z_2)=l_1(u;z_2), \tag{11}$$

где

$$a(y,z_1)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\left((\lambda+2\mu)\left(\frac{dy}{dr}\frac{dz_1}{dr}+\frac{y}{r}\frac{z_1}{r}\right)+\lambda\left(\frac{y}{r}\frac{dz_1}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{z_1}{r}\right)\right)dr,$$

$$a_1(u;T,z_2)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} rk\frac{dT}{dr}\frac{dz_2}{dr}dr+u[T][z_2]+\alpha_1 r_1T(r_1)z_2(r_1)+\alpha_2 r_2T(r_2)z_2(r_2),$$

$$l(T;z_1)=\int_{r_1}^{r_2}\left(fz_1+r(3\lambda+2\mu)\alpha T\left(\frac{dz_1}{dr}+\frac{z_1}{r}\right)\right)dr+r_1p_1z_1(r_1)-r_2p_2z_1(r_2),$$

$$l_1(z_2)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\,\overline{f}\,z_2dr+\beta_1r_1z_2(r_1)+\beta_2r_2z_2(r_2).$$

Теорема 1. Каждому управлению $u\in\mathcal{U}$ соответствует единственное состояние – функция $y=y(u)\in V=W_2^1(\Omega)$, где $V=\{v(r):v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,\ 2;$ $V=[v]|_{\xi}=0\}$, $W_2^1(\Omega)$ – пространство функций Соболева определенных на области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, которая доставляет на *V* минимум функционалу

$$\Phi(z_1)=a(z_1,z_1)-2l(T;z_1) \tag{12}$$

и является единственным в *V* решением задачи в слабой постановке: найти элемент $y\in V$, удовлетворяющий тождеству (10), где *T* – единственная функция с $V_0=\{v(r):v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,\ 2\}$, что доставляет на V_0 минимум функционалу

$$\Phi_1(z_2)=a_1(z_2,z_2)-2l_1(u;z_2) \tag{13}$$

и является единственным в V_0 решением задачи: найти элемент $T\in V_0$, удовлетворяющий тождеству (11).

Справедливость теоремы устанавливается на основе леммы Лакса – Мильграма [4].

Определение 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ решением задачи (12), (13) называется вектор-функция $(y(u;r),T(u;r))\in\mathcal{H}$, где при фиксированном $u\in\mathcal{U}$ функция $T(u;r)$ доставляет минимум функционалу $\Phi_1(\cdot;\cdot)$ на *V*, а $y(u;r)$ – при фиксированном $u\in\mathcal{U}$ и полученной функции $T(u;r)\in V$, доставляет минимум на *V* функционалу (11).

Лемма 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ задачи (10), (11); (12), (13) эквивалентны и имеют единственное решение $(y(u;r),T(u;r))\mathcal{H}$.

Пусть $y' = y(u')$, $y'' = y(u'')$ – решения из V эквивалентных задач (10), (12) при элементе $u \in \mathcal{U}$, которые равны соответственно u', u'' и определяются фиксированными единственными решениями $T' = T(u')$, $T'' = T(u'')$ эквивалентных задач (11), (13).

Учитывая обобщенное неравенство Фридрихса [10], получим

$$\left|y' - y''\right|(r_2) \le c_0 \left|u' - u''\right|. \qquad (14)$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$ представления

$$J(u) = \left\|y(u) - z_g\right\|_{\mathcal{H}}^2 + (\bar{a}u, u) = ® (u,u) - 2L(u) + \left\|z_g - y(0)\right\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad (15)$$

где

$$(u,v)_{\mathcal{U}} = uv, \;\; \pi(u,v) = \big(y(u) - y(0), y(v) - y(0)\big)_{\mathcal{H}} + (\bar{a}u, v)_{\mathcal{U}},$$

$$L(v) = \big(z_g - y(0), y(v) - y(0)\big)_{\mathcal{H}}, \; \big(y(u), y(v)\big)_{\mathcal{H}} = y(u; r_2)\, y(v; r_2).$$

Теорема 2. Пусть состояние системы определяется как единственное решение (10), (11). Тогда существует единственный элемент выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$ для которого

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_\partial} J(v). \qquad (16)$$

Так как $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{J\big(u + \lambda(v - u)\big) - J(u)}{\lambda} = \pi(u, v - u) - L(v - u) \ge 0,$ то неравенство

$$\pi(u, v - u) \ge L(v - u), \;\; \forall v \in \mathcal{U}_\partial \qquad (17)$$

есть необходимым и достаточным условием оптимальности управления $u \in \mathcal{U}_\partial$.

2. Идентификация термического сопротивления при известном смещении на поверхности цилиндрического тела. Пусть в условии неидеального контакта (7) $u = \text{const} \ge 0$ – неизвестно. Так же задано наблюдение

$$y(d_i) = f_i, \quad i = \overline{1, N}. \qquad (18)$$

Тогда введем в рассмотрение функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\big(y(d_i) - f_i\big)^2. \qquad (19)$$

Вместо задачи (2) – (7), (18), будем рассматривать задачу (10), (11), (19), которая заключается в определении элемента для которого выполняется выражение вида (18) с учетом ограничений (10), (11), где функционал-невязка имеет вид (19).

Задачу (10), (11), (19) будем решать с помощью градиентных методов [11], где (n + 1)-е приближение u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ находится по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \; n = 0, 1, \cdots, n^*, \qquad (20)$$

начиная с некоторого приближения $u_0 \in \mathcal{U}$, а направление спуска p_n и коэффициент β_n для метода минимальных ошибок определяем с помощью выражений

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}. \tag{21}$$

Здесь J'_{u_n} – градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n$, $e_n = Au_n - f_0$, $Au_n = y(u_n; d_i)$.

Следуя [7, 11] для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (10), (11), (19) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$-(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right) - \frac{p}{r}\right) = 0, \ r \in \Omega_d; \ \sigma_r(p)\big|_{r=r_i} = 0, \ i = 1, 2;$$

$$-\frac{d}{dr}\left(kr\frac{d\psi}{dr}\right) - r(3\lambda + 2\mu)\alpha\left(\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r}\right) = 0, \ r \in \Omega_d;$$

$$-k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_1} = -\alpha_1\psi(r_1), \ k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_2} = -\alpha_2\psi(r_2); \ [p]\big|_{r=\xi} = 0,$$

$$[\sigma_r(p)]\big|_{r=\xi} = 0, \ \left[k\frac{d\psi}{dr}\right]\bigg|_{r=\xi} = 0, \ \left\{k\frac{d\psi}{dr}\right\}^{\pm} = u[\psi]\big|_{r=\xi},$$

$$[p]\big|_{r=d_i} = 0, \ [\sigma_r(p)]\big|_{r=d_i} = -\frac{1}{d_i}\left(y(u; d_i) - f_i\right), \ i = \overline{1, N}, \tag{22}$$

где $\sigma_r(p) = (\lambda + 2\mu)\dfrac{dp}{dr} + \lambda\dfrac{p}{r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\psi.$

Определение 2. Обобщенным решением краевой задачи (22) называется вектор-функция $Y^* = (p, \psi) \in \mathcal{H}^* = V^* \times V_0^*$, $V_0^* = \left\{v(r) : v\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \ i = 1, 2\right\}$ $V^* = \left\{v(r) : v\big|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), \ i = 1, 2; \ [v]\big|_{\xi} = 0\right\}$, которая $\forall z = (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^*$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\Psi, z_1) = \bar{l}(u_n; z_1), \tag{23}$$

$$a_1(p, z_2) = \bar{l}_1(\Psi; z_2), \tag{24}$$

где

$$\bar{l}(u_n; z_1) = \sum_{i=1}^{N}\left(y(u_n; d_i) - f_i\right)z_1(d_i), \ \bar{l}_1(\Psi; z_2) = \int_{\Omega_d} r(3\lambda + 2\mu)\alpha\left(\frac{dp}{dr} + \frac{p}{r}\right)z_2 dr. \tag{25}$$

Выбирая в тождестве (24) вместо функции z_2 разность $T(u_{n+1}; r) - T(u_n; r)$, а в (23) вместо z_1 – разность $y(u_{n+1}; r) - y(u_n; r)$ получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle \approx \sum_{i=1}^{N} \left(y(u_n; d_i) - f_i \right) \left(\tilde{y}(u_{n+1}; d_i) - y(u_n; d_i) \right) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \frac{d}{dr}\left(r k \frac{dT}{dr} \right) \psi dr +$$

$$+ r_1 k \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_1} \psi(r_1) - r_2 k \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_2} \psi(r_2) + \Delta u_n \left(\xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{+} \psi^{+} - \xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{-} \psi^{-} \right).$$

Следовательно $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$,

где $\tilde{\psi}_n = \left\{ \tilde{\psi}_n^i \right\}_{i=1}^{2}$, $\tilde{\psi}_n^1 = \int_{\Omega_1} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) \psi \, dr + \Delta u_n \left(r_1 k \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_1} \psi(r_1) - \xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{-} \psi^{-} \right)$,

$$\tilde{\psi}_n^2 = \int_{\Omega_2} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) \psi dr + \Delta u_n \left(\xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{+} \psi^{+} - r_2 k \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_2} \psi(r_2) \right).$$

Пример. Пусть $r_1 = \pi/8$, $r_2 = \pi/2$, $\xi = \pi/4$. Классическое решение краевой задачи (1), (4) на отрезке $[\pi/8, \pi/4]$ имеет вид $T = 0.5\cos(1.5r) + 3$, $y = \sin(r)$, а на отрезке $[\pi/4, \pi/2]$ $T = 1.5\exp(-0.5r) + 1$, $y = 1.3\exp(-0.5r) + 3$. Так же известно $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 4.24909$, $\alpha_2 = 0$; $\beta_2 = -0.93574$; $k_1 = 2$; $k_2 = 3.10176$, $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 0.547608$, $\alpha = 3$. Пусть, в этой задаче $u \in \mathcal{U}$ – неизвестно, а $f_0 = T(r_1)$.

В таблице указано количество итераций, необходимых для достижения значения при точности окончания итерационного процесса ε.

Для приведенных исходных данных задача решена с помощью градиентных методов, где на каждом шаге определения (n + 1)-го приближения решения прямая и сопряженная задачи решены с помощью МКЭ с использованием кусочно-квадратичных функций путем минимизации соответствующего функционала энергии. Погрешность $O(h^2)$ в норме пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, h – самая большая из длин всех конечных элементов.

ТАБЛИЦА

N_1	20		50		50		30	
N_2	20		50		30		50	
ε	10^{-5}	10^{-10}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-5}	10^{-10}
$u_0 = 1$	27	59	23	67	25	59	27	64
$u_0 = 10$	49	80	46	71	43	74	41	83
$u_0 = 100$	184	192	172	209	160	200	163	190

Выводы. На основе теории оптимального управления проведено исследование управления термоупругим состоянием полого длинного цилиндра. Рассмотрена задача идентификации термического смещения. Решены модельные примеры.

А.А. Аралова

ПРО ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ДОВГОГО З ПОРОЖНИНОЮ ЦИЛІНДРА

Розглянуто деякі питання оптимального керування термопружним станом довгого з порожниною циліндра. Запропоновано алгоритм чисельної ідентифікації термічного опору. Представлені результати розв'язання модельного прикладу.

A.A. Aralova

ON SOME PROBLEMS OF IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF THE THERMOELASTIC STATE OF A LONG HOLLOW CYLINDER

Problems of optimal control of the thermoelastic state of a long hollow cylinder are considered. An algorithm for the numerical identification of thermal resistance is proposed. The results of solving a model example are presented.

1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. Киев: Наук. думка, 2009. 640 с.
2. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация параметров задачи о напряженно-деформированном состоянии многокомпонентного упругого тела с включением. *Прикладная механика*. 2010. Т. 46. № 4. С. 14 – 24.
3. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. 400 p.
4. *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 2001. 606 с.
5. *Аралова А.А., Дейнека В.С.* Численное решение обратных краевых задач осесимметричного термоупругого деформирования длинного толстого полого цилиндра. *Компьютерная математика*. 2011. № 1. – С. 3 – 12.
6. *Аралова А.А., Дейнека В.С.* Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого цилиндра. Доповіді Національної академії наук України. 2012. № 5. С. 38 – 42.
7. *Аралова А.А.* Численное решение обратных задач термоупругости для составного цилиндра. *КиСА*. 2014. № 5. С. 164 –172.
8. *Коваленко А.Д.* Термоупрогость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
9. *Мотовилевец И.А., Козлов В.И.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. *Термоупругость*. Киев: Наук. думка, 1987. 264 с.
10. *Сьярле Р.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
11. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.

Получено 05.05.2017

Об авторе:

Аралова Альбина Андреевна,
кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: aaaralova@gmail.com