КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Оптимизация вычислений

УДК 519.85

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ, И.Э. ШУЛИНОК

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача построения шара минимального объема с заданным центром, описанного вокруг пересечения одинаково ориентированных эллипсоидов. Приводятся условия, при выполнении которых применение двойственного подхода к квадратичной поставновке данной задачи позволяет найти ее точное решение.

Постановка задачи. Пусть задан набор одинаково ориентированных эллипсоидов (т. е. эллипсоидов, направления полуосей которых совпадают)

$$E_i = \{x : (x - d_i)^T A_i (x - d_i) \le 1\},\ i = \overline{1, m},$$

где d_i – центр эллипсоида, A_i – положительно определенная симметричная матрица. Требуется найти шар минимального радиуса с фиксированным центром в некоторой заданной точке, содержащий пересечение данного набора эллипсоидов $\{E_i, i = \overline{1, m}\}$.

Без ограничения общности далее будем предполагать, что центр искомого описанного шара находится в начале координат, матрицы A_i – диагональные ($A_i = diag(a_{ij}, j = 1, \ldots, n)$, где $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Тогда рассматриваемая задача может быть представлена в виде следующей задачи математического программирования:

$$f^* = \min(-x^T x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$x^T A_i x + b_i^T x + c_i \le 0,\ i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

где $b_i = -2A_i d_i$, $c_i = d_i^T A_i d_i - 1$, $i = \overline{1, m}$.

В этой задаче минимальное значение целевой функции f^* равно квадрату радиуса искомого шара со знаком минус. Вопрос, рассматривающийся в данной работе – в каких случаях можно гарантировать решение данной многоэкстремальной задачи за полиномиальное время? Один из возможных ответов можно получить, исследовав, когда двойственный подход [1 – 3] дает точную оценку оптимального значения целевой функции задачи (1) – (2).

Вспомогательный результат. Для проведения этих исследований воспользуемся предложенным в [4] достаточным условием точности двойственной оценки для квадратичной экстремальной задачи общего вида

$$f^* = \min f_0(x) \qquad (3)$$

при ограничениях

$$f_i(x) \le 0\,,\ i \in I^{LE}, \qquad (4)$$

$$f_i(x) = 0\,,\ i \in I^{EQ}, \qquad (5)$$

где $f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i,\, i \in \{0\} \cup I^{LE} \cup I^{EQ}$ – произвольные квадратичные функции в пространстве R^n.

Чтобы сформулировать это условие, необходимо ввести следующие обозначения:

- $L(x,u) = x^T A(u) x + b^T(u) x + c(u)$ – функция Ланранжа задачи (3) – (5), где $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i,\ b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i,\ c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\ ,\ m = |I^{LE}| + |I^{EQ}|$;
- D $(\bar{D})$ – множество двойственных переменных $u \in R^m$, при которых матрица $A(u)$ положительно (неотрицательно) определена;
- $U^+ = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LE}\}$;
- $\psi^* = \sup\limits_{u \in D \cap U^+} (\psi(u) = \inf\limits_{x \in R^n} L(x,u)) \le f^*$ – двойственная оценка квадратичной экстремальной задачи (3) – (4) [1];
- x^* и u^* – вектора, в которых достигаются значения f^* и ψ^* соответственно.

Пусть для каждого $u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ определено множество индексов $J(u) = \{\, j : \lambda_j(u) = 0,\, j \in \{1,...,n\}\}$, где $\lambda_j(u)$, $j = \overline{1,n}$, – собственные числа матрицы $A(u)$ функции Лагранжа задачи (3)–(5). И пусть $\xi_j(u)$, $j = \overline{1,n}$, – собственные вектора, соответствующие собственным числам $\lambda_j(u)$, $j = \overline{1,n}$. В этих обозначениях справедлива

Теорема [4]**.** Если существуют такой вектор p и такое положительное число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+\ \ \exists j \in J(u) \text{ такое, что } \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p) \ne 0\,, \qquad (6)$$

то $\psi^* = f^*$. Причем, если условие (6) выполняется при $p = 0$, то вектор $x^* = x(u^*) = -A^{-1}(u^*) b(u^*)/2$ является решением задачи (3) – (5).

Достаточное условие получения точной оценки для задачи (1) – (2). Используя приведенную теорему о достаточном условии точности двойственной оценки, исследуем некоторые случаи, когда для рассматриваемой в данной работе задачи (1) – (2) двойственный подход гарантирует нахождение оптимального значения ее целевой функции, т. е. $\psi^* = f^*$.

Функция Лагранжа задачи (1) – (2) равна $L(x,u) = x^T A(u)x + b^T(u)x + c(u)$, где

$$A(u) = diag(-1+\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij},\ j=1,...,n),\ b(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i,\ c(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i c_i.$$

Все собственные векторы матрицы $A(u)$ направлены по координатным осям и не зависят от двойственных переменных, а собственные числа равны $\lambda_j(u) = -1+\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}$, $j=\overline{1,n}$. Тогда для задачи (1) – (2)

$$(\bar{D} \setminus D) \cap U^+ = \left\{ u : \min_{j=1,...,n}(-1+\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}) = 0; u \geq 0 \right\}.$$

Путем подстановки в неравенство условия (6) при $p=0$ соответствующих значений параметров задачи (1) – (2) имеем

$$\xi_j^T(u) b(u) = e_j^T \left(\sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right) \neq 0,$$

где $\xi_j(u) = e_j$, $j=\overline{1,n}$, – собственные векторы матрицы $A(u)$, e_j – n-мерный вектор, j-ая компонента которого равна единице, а остальные равны нулю.

Таким образом, условие (6) при $p=0$ для задачи (1) – (2) примет вид

$$\forall u \in \left\{ u : \min_{j=1,...,n}(-1+\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}) = 0; u \geq 0 \right\}\ \exists j \in J(u) \text{ такое, что } e_j^T \left(\sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right) \neq 0. \quad (7)$$

Пусть для некоторого $\tilde{u} \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ равно нулю $\tilde{j}$-е собственное число матрицы $A(u)$: $\min_{j=1,...,n}(-1+\sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i a_{ij}) = -1+\sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i a_{i\tilde{j}} = 0$. Один из способов удовлетворить условие (7) – потребовать, чтобы $e_{\tilde{j}}^T \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i b_i \right) \neq 0$ было независимо от значения вектора $\tilde{u}$. Другими словами, чтобы $\tilde{j}$-я координата конической комбинации векторов $\{b_i, i=\overline{1,m}\}$ никогда не принимала бы значение ноль. Это возможно, когда $\tilde{j}$-е координаты всех векторов b_i, $i=\overline{1,m}$, одного знака (поскольку $\tilde{u} \geq 0$). Таким образом, обобщая сказанное на все $\tilde{j} \in \{1,...,n\}$, получаем, что условие (7) при $p=0$ выполняется, если все векторы $b_i, i=\overline{1,m}$, расположены в одном открытом ортанте. Кроме того, также рассмотрим случай, когда среди этих $b_{i\tilde{j}}$ найдется $\tilde{i}$, такое что $b_{\tilde{i}\tilde{j}} = 0$. Тогда достаточно в нулевом векторе p заменить $\tilde{j}$-ю компоненту на $p_{\tilde{j}} = sign(\max_{i=1,...,m} b_{i\tilde{j}})$, чтобы выполнилось условие (6) теоремы (в случае, когда $\forall i \in \{1,...,m\}$ $b_{i\tilde{j}} = 0$, $p_{\tilde{j}}$ можно присвоить любое значение, кроме нуля).

Принимая во внимание, что вектор b_i и вектор, задающий центр эллипсоида E_i, противоположно направлены ($b_i = -2A_i d_i = -2(a_{i1}d_{i1}\ a_{i2}d_{i2}...a_{in}d_{in})^T$), получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Если центры всех эллипсоидов расположены в одном закрытом ортанте, то двойственная оценка задачи (1) – (2) точная. Если же они расположены в одном открытом ортанте, то также получаем и точку решения задачи $x^* = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$.

Частный случай задачи (1) – (2) для гомотетичных эллипсоидов. Рассмотрим задачу построения шара минимального объема с заданным центром, описанного вокруг пересечения гомотетичных эллипсоидов (т. е. с одинаковыми с точностью до положительного множителя матрицами в соответствующих им квадратичных формах). Соответствующая ей задача (1) – (2) упростится:

$$f^* = \min(-x^T x) \tag{8}$$

при ограничениях

$$x^T A_1 x + b_i^T x + c_i \le 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Здесь, как и в задаче (1) – (2), без ограничения общности, предполагается, что центр описанного шара находится в центре координат, $A_1 = diag(a_j, j = 1,\dots,n)$ – диагональная матрица.

Функция Лагранжа задачи (8)–(9) равна $L(x,u) = x^T A(u)x + b^T(u)x + c(u)$, где $A(u) = diag(-1 + a_j \sum_{i=1}^{m} u_i, j = 1,...,n)$, $b(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$, $c(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i c_i$. Собственные векторы матрицы $A(u)$ направлены по координатным осям и не зависят от двойственных переменных, а собственные числа $\lambda_j(u) = -1 + a_j \sum_{i=1}^{m} u_i$, $j = \overline{1,n}$.

Для этой задачи

$$(\bar{D} \setminus D) \cap U^+ = \left\{ u : \min_{j=1,...,n} (-1 + a_j \sum_{i=1}^{m} u_i) = 0; u \ge 0 \right\} =$$

$$= \left\{ u : (-1 + \left(\min_{j=1,...,n} a_j \right) \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \ge 0 \right\} = \left\{ u : (-1 + a_{j\min} \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \ge 0 \right\}.$$

Для данной задачи множество индексов $J(u)$ для всех $u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ одинаково и состоит из единственного элемента $j\min$, соответствующего минимальному собственному числу матрицы A_1. Тогда условие (6) при $p = 0$ для задачи (8) – (9) имеет вид

$$\forall u \in \left\{ u : (-1 + a_{j\min} \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \geq 0 \right\} \quad \xi_{j\min}^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) = (\sum_{i=1}^{m} u_i b_i)_{j\min} \neq 0,$$

которое гарантировано выполняется, если $j\min$-е компоненты всех векторов $b_i, i = \overline{1,m}$, одного знака.

В случае, когда среди $b_{ij\min}$ найдется $\tilde{i}$, такое что $b_{\tilde{i}j\min} = 0$, достаточно в нулевом векторе p заменить $j\min$-ю компоненту на $p_{j\min} = sign(\max_{i=1,\ldots,m} b_{ij\min})$, чтобы выполнилось условие (6) теоремы.

Утверждение 2. Если координаты центров всех эллипсоидов, сответствующие минимальному собственному числу, имеют один знак или равны нулю, то двойственная оценка задачи (8) – (9) точная. Если же они строго одного знака, то также получаем и точку решения задачи $x^* = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$.

Частный случай задачи (1) – (2) для шаров. В работе [5] рассмотрен еще один частный случай задачи (1) – (2) – построение шара минимального объема с заданным центром, описанного вокруг пересечения шаров:

$$f^* = \min(-x^T x) \qquad (10)$$

при ограничениях

$$x^T x + b_i^T x + c_i \leq 0, \; i = \overline{1,m}. \qquad (11)$$

В задаче (8) – (9) матрица $A(u) = diag(-1 + \sum_{i=1}^{m} u_i, j = 1,\ldots,n)$ функции Лагранжа имеют собственные вектора, направленные по координатным осям, и все ее собственные числа одинаковы: $\lambda_j(u) = -1 + \sum_{i=1}^{m} u_i$, $j = \overline{1,n}$. Условие (6) при $p = 0$ для задачи (10) – (11) имеет вид

$$\forall u \in \left\{ u : (-1 + \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \geq 0 \right\} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \neq 0,$$

что означает $0 \notin \mathrm{int}(co\{b_i, i = 1,\ldots,m\})$. В случае, когда центр координат лежит на границе $co\{b_i, i = 1,\ldots,m\}$, достаточно принять $p = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$ при $u > 0$, чтобы выполнилось условие (6) теоремы.

Утверждение 3 [5]. Если $0 \notin \mathrm{int}(co\{b_i, i = 1,\ldots,m\})$, то двойственная оценка задачи (10) – (11) точная. Если же $0 \notin co\{b_i, i = 1,\ldots,m\}$, то кроме точной двойственной оценки также получаем и точку решения задачи (10) – (11) $x^* = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$.

Отметим, что достаточное условие точности двойственной оценки для квадратичной экстремальной задачи общего вида, сформулированное в виде вышеприведенной теоремы, можно применять и для исследования других задач.

Например, с помощью этой теоремы в работе [4] были выделены случаи, когда двойственный подход позволяет получить оптимальное значение целевой функции и точку глобального экстремума одной специальной задачи невыпуклой оптимизации, которая встречается при синтезе управления, минимизирующего область локализации инвариантного множества семейства нелинейных систем.

О.А. Березовський, І.Е. Шулінок

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОЇСТОГО ПІДХОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ
ОДНІЄЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Розглядається задача побудови кулі мінімального об'єму з заданим центром, описаної навколо перетину однаково орієнтованих еліпсоїдів. Наведено умови, при виконанні яких застосування двоїстого підходу до квадратичної постановки даної задачі дозволяє знайти її точний розв'язок.

O.A. Berezovskyi, I.E. Shulinok

THE USE OF DUALITY APPROACH FOR SOLVING ONE GEOMETRICAL PROBLEM

The problem of constructing a ball with minimum volume and fixed center, which is described around the intersection of identically oriented ellipsoids, is considered. The conditions, under which the use of dual approach for solving the quadratic formulation of this problem allows us to find its exact solution, are given.

1. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. К.: Наук. думка, 1989. 208 с.
2. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Dordrecht, Kluwer, 1998. 394 p.
3. *Березовский О.А.* О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. № 1. С. 33 – 39.
4. *Berezovskyi O.A.* On Solving of a Special Optimization Problem Connected with Determination of Invariant Sets of Dynamical Systems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2015. 47 (5). P. 69 – 77.
5. *Березовский О.А.* Критерии точности SDP-релаксаций квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. № 6. С. 95 – 101.

Получено 26.07.2016

Об авторах:

Березовский Олег Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Шулинок Ирина Эдуардовна,
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.