КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ДВУХ НАЗНАЧЕНИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСАМИ РЕБЕР

Предложена математическая модель задачи нахождения двух альтернативных назначений. Исследованы свойства задачи на существования целочисленного решения. Предложен эффективный алгоритм решения задач для частного случая коэффициентов целевой функции. Показана, что в общем случае рассмотренная задача также может быть решена эффективно.

© Ф.А. Шарифов, 2015

Введение. Выбор n работников для выполнения n видов работ на определенный период времени, осуществляется оптимальным образом, путем решения задачи о назначениях. Например, при создании нового предприятия, требуется определить число и состав его подразделений. Во время выполнения работ на длительный срок часто случается, что внутри одного подразделения один работник временно заменяет другого и такая замена сопряжена с некоторыми затратами. Кроме этого, для улучшения деятельности предприятия, время от времени требуется проверить качество выполняемых работ. Работник, выполняющий данную работу, не может проверить ее качество одновременно. Обычно затраты на проверку качества выполненной работы с работником, не выполняющим данную работу, отличаются от затрат на ее выполнения. Таким образом, возникает задача нахождения двух альтернативных назначений при выполнении и проверке качества n-видов работ так, чтобы минимизировать суммарные затраты.

Известно, что множество допустимых решений задачи о назначениях включает в себя произвольное совершенное паросочетание двудольного графа, для которого количество вершин каждого доля одинаковая. Поэтому данную, задачу также можно сформулировать в терминах задачи о совершенных паросочетаниях на заданном двудольном графе: в двудольном графе требуется найти по ребрам два непересекающихся паросочетания, таких, что при вычислении их веса нужно учитывать различные веса для каждого ребра. Таким образом, по одному паросочетанию определяется назначение работников для выполнения заданных работ, а по другому назначению – для осуществления проверки качества выполненных работ. Поэтому рассмотренная задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $G=(V,U,E)$ неориентированный двудольный граф с двумя весами $p_e \ge 0$ и $q_e \ge 0$ на ребрах $e \in E$, где $|U|=|V|=n.$ В этих обозначениях рассмотренная задача нахождения двух альтернативных назначений может быть сформулирована следующим образом:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad j=1,\ldots,n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad i=1,\ldots,n, \tag{3}$$

$$x_{ij} + y_{ij} \le 1, \quad i, j = 1,\ldots,n, \tag{4}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad y_{ij} \ge 0, \quad i, j = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad y_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Сначала покажем, что в случае, когда разница весов p_e и q_e для произвольного ребра $e \in E,$ есть алгебраическая сумма весов его концевых вершин, решение задачи нахождения двух альтернативных назначений сводится к задаче нахождения потока минимальной стоимости на сети на двудольном графе $G=(V,U,E).$

***Утверждение* 1.** Если $p_{ij} - q_{ij} = u_i + v_j,$ для некоторых чисел u_i $v_j,$ то задача (1) – (5) имеет целочисленное (0, 1) оптимальное решение.

Доказательство. Понятно, что из условия $p_{ij} - q_{ij} = u_i + v_j,$ следует существование числа c_{ij} и $u_i^1, u_i^2, v_j^1, v_j^2$ для которых $p_{ij} = c_{ij} + u_i^1 + v_j^1$ и $q_{ij} = c_{ij} + u_i^2 + v_j^2$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_{ij} \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 2, \qquad j=1,\ldots,n, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 2, \qquad i = 1,...,n, \tag{9}$$

$$1 \geq z_{ij} \geq 0, \qquad i, j = 1,...,n. \tag{10}$$

Не трудно видеть, что оптимальное значение задачи (1) – (6) на постоянную величину

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^1 + \sum_{j=1}^{n} v_j^1 + \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{j=1}^{n} v_j^2$$

отличается от оптимального значения (7) что, доказывает утверждению.

По теории потоковых задач на сетях, матрица ограничений (8), (9) – вполне унимодулярная. Поэтому, согласно утверждению 1, получаем, что в случае, когда условия утверждения выполняются для весов p_{ij} и q_{ij}, стандартная линейная релаксация задачи (1) – (6) имеет целочисленное решение. Для решения подобных потоковых задач предложены ряд строго полиномиальные алгоритмы [1, 2]. Однако, с учетом специфики задачи (7) – (10), легко можно показать, что трудоемкость алгоритма минимальных цепей [3] составляет $O(n^3)$ для ее решения. Здесь, следует также отметить, что за $O(n^2)$ время можно проверить выполнимости условий утверждения.

С помощью известных алгоритмов (см. [4]), находится произвольное допустимое решение задачи (7) – (10), и доказывается, что оно является оптимальным решением (7) – (10), при $c_{ij} = p_{ij} - p$ или $c_{ij} = p_{ij} - q_{ij}$. Другими словами, нужно определить текущие значения двойственных переменных u_i, v_j (значения потенциалов для вершин из U и V), и проверить выполнимость условий утверждения для всех $(i, j) \in E$.

Теперь вернемся к задаче (1) – (6). Сначала рассмотрим пример задачи (1) – (6) для иллюстрации, что оптимальное значение задачи (1) – (6) может быть сколь угодно большим от оптимального значения линейной релаксации (1) – (5). Пусть матрицы

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{Vmatrix}$$

содержат заданные веса p_{ij} и q_{ij} ребер графа G, при $n = 3$. Если положить $x_{ij}^* = 1/2$ и $y_{ij}^* = 1/2$ для всех нулевых элементов матрицы P и Q, соответственно, получим оптимальное решение задачи (1) – (5) с оптимальным значением 0 целевой функции (1). Легко проверить, что оптимальное значение задачи нахождения двух альтернативных назначений (1) – (6) равно 6. Этот пример показывает, что не всегда линейная релаксация задачи (1) – (6) имеет целочисленное 0,1 оптимальное решение. Кроме этого, рассмотренный пример также демонстрирует, что пробел двойственности может быть сколь угодно большим числом. Для этого достаточно, в матрицах P и Q числа 6 заменить на $\Delta \to \infty$.

Пусть $(x_{ij}^*, y_{ij}^*; (i, j) \in E)$ оптимальное решение задачи (1) – (5) – линейная релаксация задачи (1) – (6).

Теорема 1. В графе G, если существуют, непересекающихся по ребрам совершенные паросочетания M_x и M_y, такие, что $M_x \subseteq E_x = \{(i, j); x_{ij}^* > 0,$ $(i, j) \in E\}$ и $M_y \subseteq E_y = \{(i, j); y_{ij}^* > 0, (i, j) \in E\}$, тогда векторы инцидентности паросочетаний M_x и M_y являются оптимальным решением задачи (1) – (6).

Доказательство. Обозначим 0, 1 – векторы инцидентности паросочетаний M_x и M_y, как $x(M_x)$ и $y(M_y)$, соответственно. Пусть z_{ij}, u_i^1, v_j^1, u_i^2, v_j^2 – оптимальные значения переменных двойственной задачи к (1) – (5). Согласно условиям оптимальности второй теоремы линейного программирования

$$p_{ij} + z_{ij} = u_i^1 + v_j^1 \ \text{ и } \ q_{sr} + z_{sr} = u_s^2 + v_r^2,$$

так как $x_{ij}^* > 0$ и $y_{sr}^* > 0$, для ребер (i, j) и (s, r) паросочетаний M_x и M_y, а также

$$p_{ij} + z_{ij} \ge u_i^1 + v_j^1 \ \text{ и } \ q_{ij} + z_{ij} \ge u_i^2 + v_j^2,$$

для ребер, не являющихся ребрами паросочетаний M_x и M_y. По условиям теоремы, паросочетания M_x и M_y не содержат общие ребра. Поэтому векторы инцидентности $x(M_x)$ и $y(M_y)$ – допустимое решение задач (1) – (5). Из определения паросочетаний M_x и M_y следует, что их векторы инцидентности $x(M_x)$, $y(M_y)$ совместно с оптимальными значениями z_{ij}, u_i^1, v_j^1, u_i^2, v_j^2 переменных двойственной задачи к (1) – (5), удовлетворяют условиям оптимальности второй теоремы линейного программирования. Это означает, что $(x(M_x), \ y(M_y))$ – оптимальное решение (1) – (5), значит и задачи (1) – (6).

Скажем, что цикл покрывает вершину w, если он проходит через w. По этой теореме, нужно найти допустимое решение $(x_{ij}, y_{ij} : (i, j) \in E)$ задачи (1) – (5) с минимальным значением

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_{ij} \qquad (11)$$

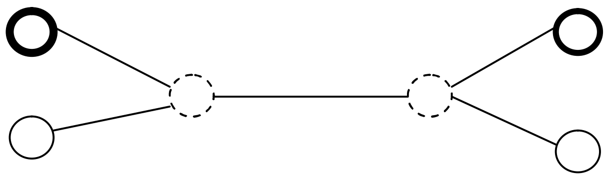
при следующих условиях.

1. Ребра (i, j), для которых $x_{lj} > 0$ и/или $y_{lj} > 0$ образуют один или несколько циклов, покрываюшие все вершины $i \in U$ и $j \in V$.

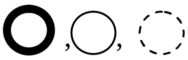
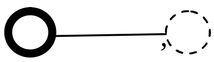
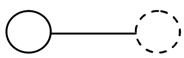
2. Среди этих циклов существуют такие, что на их ребрах, ребра (i, j) с $x_{lj} > 0$ $(y_{lj} > 0)$, чередуются ребрами (i, j) с $y_{lj} > 0$ $(x_{lj} > 0)$.

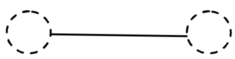
Для этого, покажем, что задача (1) – (6) эквивалентна задаче нахождения двух продуктовых потоков минимальной суммарной стоимости на сети, представленной почти двудольным графом [5].

Пусть графы $G(p) = (U(p), V(p), E(p))$ и $G(q) = (U(q), V(q), E(q))$ – копии графа G, с весами ребер p_{ij}, q_{ij}, соответственно. Каждое ребро графов $G(p)$, $G(q)$ соединяется с ребром графа G, способом, указанным на рисунке.



На этом рисунке, вершины графов $G(p)$, $G(q)$ и G указаны как

 : их ребра как , 

и , соответственно.

РИСУНОК

В построенной сети каждое ребро заменяется дугой с единичной пропускной способностью. К этой сети добавляются новые вершины s_1 и s_2 как источники, а также r_1 и r_2 в качестве стоков. Все вершины $i \in U(p)$ и $j \in V(p)$ графа $G(p)$ соединяются источником s_1 и стоком r_1 дугами (s_1, i) и (j, r_1) с единичными пропускными способностями. Аналогичным образом, все вершины $i \in U(q)$ и $j \in V(q)$ графа $G(q)$ соединяются вершинами s_2 и r_2 дугами (s_2, i) и (j, r_2) с единичными пропускными способностями. Данным способом построенная многополюсная сеть Ω имеет $3n + 4$ вершин и $3m + 4n$ ребер.

Таким образом, получаем, что нужно найти максимальные потоки из s_1 в r_1 и из s_2 в r_2 на построенной сети Ω [5]. По теореме 1, требуемые максимальные потоки можно определить путем решения задачи нахождения циклов минимальной стоимости, покрывающих все вершины $i \in U$ и $j \in V$. Другими словами, в этой задаче поток из источников s_1 и s_2 может быть отправлен к произвольному стоку r_1 или r_2. С учетом, что величина максимального потока, отправленного из каждого источника ровна n, задача нахождения циклов минимальной стоимости, покрываюших все вершины, эквивалентна к задаче нахождения потока минимальной стоимости с величиной $2n$ на многополюсной сети Ω.. Путем добавления нового источника и стока, эта задача стандартным способом легко сводится к такой же задаче на сети Ω с одним источником и стоком, решение которой также может быть определено с помощью алгоритма минимальных цепей.

Теперь отметим, что алгоритм минимальных цепей на каждой итерации находит кратчайший путь между источником истоком, и на этом пути величина потока определяется как максимальный возможный поток. Так как сеть Ω содержит только дуги с единичной пропускной способностью, алгоритм минимальных цепей определяет допустимое решение $(x_{ij}, y_{ij} : (i, j) \in E)$ задачи (1) – (5), удовлетворяюшее условиям 1 и 2, с минимальным значением (11) за $2n$ итерации. С учетом, что на каждой итерации кратчайший путь можно определить за $O(n^2)$ время [3], то трудоемкость алгоритма минимальных цепей составляет $O(n^3)$.

Выводы. Допустим, что MP, MQ – оптимальные решения задач назначения на графах $G(p)$, $G(q)$, соответственно. После удаления ребер $(i, j)MP(MQ)$ из графа $G(p)(G(q))$ – можно найти паросочетание $Not(MP)$ $(Not(MQ))$ минимальной стоимости в этом графе. Следующие утверждения очевидны.

1. Если $M_x \cap MQ = O$ отсюда легко следует, что $M_x = Not(MQ)$ и $M_y = MQ$.

2. Если $MP \cap M_y = O$ отсюда легко следует, что $M_y = Not(MP)$ и $M_x = MP$.

3. Если $MP \cap MQ = O$, то получаем, что $M_x = MP$ и $M_y = MQ$.

С учетом утвержений 1, 2 и 3 алгоритм типа дихотомии, может быть использован также эффективно, при решении практических задач (1) – (6) , в случаях, когда веса $p_e \geq 0$ и $q_e \geq 0$ сильно отличаются друг от друга для каждого ребра $e \in E$.

Ф.А. Шарифов

ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕНИЯ ДВОХ ПРИЗНАЧЕНЬ З РІЗНИМИ ВАГАМИ РЕБЕР

Запропоновано математичну модель задачі знаходження альтернативних призначень. Досліджено властивості задачі щодо існування цілочислового розв'язку. Запропоновано ефективний алгоритм розв'язуванння задач для окремого випадку коефіцієнтів цільової функції. Показано, що в загальному випадку розглянута задача також може бути ефективно розв'язана.

F.A. Sharifov

TWO ASSIGNMENTS PROBLEM FOR DIFFERENT COSTS OF EDGES

A mathematical model of the problem of finding two alternative assignments is proposed. The properties of the problem on the existence of an integer solution are investigated. An efficient algorithm for solving the problems with the objective function that has the coefficients of particular form is proposed. It is shown that the problem can be solved effectively in general case.

1. *Vygen J.* On dual minimum cost flow algorithms // Math. Methods, Operations Research – 2002. – 56. – P. 101 – 126.
2. *Orlin J.B.* A faster strongly polynomial minimum cost flow algorithms // Operations Research. – 1993. – (41). – P. 338 – 350.
3. *Cook W.J., Cunningham W.H., Pulleyblank W., Schrijver S.* Combinatorial optimization. Jonh Wiley, Sons. INC New-York, 1998. – 355 p.
4. *Kleinschmidt P., Schannath H.* A strongly polynomial algorithm for the transportation problem. // Math. Prog. – 1995. – 68. – P. 1 – 13.
5. *Minoux M.* Discrete Cost Multicommodity Network Optimization Problems and Exact Solution Methods // Annals of Operation Research. – 2001. – 106. – P. 19 – 46.

Получено 22.10.2015

Об авторе:

Шарифов Фирдовси Ахун-оглы,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.