КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

М.Ф. СЕМЕНЮТА

ЧАСТИННІ ВИПАДКИ ЗАДАЧІ ГРАЦІОЗНОСТІ ГРАФІВ

Розглядаються частинні випадки задач з розробки модифікацій конструктивних методів породження граціозних дерев та використанню цих дерев у побудові граціозних одноциклічних графів. Знайдено новий метод побудови граціозного дерева з ізоморфних дерев менших порядків. Отримано умови існування одноциклічних графів, конструкції яких пов'язані з граціозними деревами певного виду.

Вступ. Наприкінці 1960-х років у радіоастрономії набула популярності проблема, пов'язана з оптимальним плануванням радіоантен для сканування видимих областей небосхилів. Вона сприяла появі теорії розміток графа, яка розпочала свій розвиток з математичної задачі розкладу повного графа на копії певного графа. Вперше в 1963 році ця задача сформульована Г. Рингелем, відома як гіпотеза Рингеля, і полягає в наступному: для кожного додатнього числа q існує розклад повного графа K_{2q+1} на ізоморфні дерева з q ребрами. Для її вирішення в 1967 році А. Роса ввів α- та β-оцінки графа. С. Голомб у 1972 році, незалежно, пропонує поняття граціозної розмітки [1], яке тотожнє до β-оцінки. Гіпотеза Рінгеля – Котціг – Роса, що всі дерева граціозні, надихає на створення методів побудови граціозних дерев. Як з'ясувалося, складність доведення гіпотези пов'язана з тим, що не в кожному граціозному дереві висячій вершині можна поставити у відповідність мітку 0. Інакше, всі граціозні дерева породжувалися б індуктивно з дерев менших порядків. Тому виникли більш складні методи генерації граціозних дерев, перший з них розроблено в 1973 році [2]. Він покладений в основу інших методів, описаних в роботах [3 – 8].

А. Роса, довівши теорему про те, що, якщо G граціозний граф розміру q, то граф K_{2q+1} допускає G-розклад, поширює проблему побудови граціозної розмітки на різні типи графів. Він також доводить необхідну умову існування граціозної розмітки графа G: якщо G – ейлерів граф з $q \equiv 1$ або 2(mod4), то G не допускає граціозної розмітки. Цей критерій дозволяє відкинути певні сімейства графів з дослідження на граціозність.

В задачі граціозності розглядається питання про можливість адаптації методів побудови граціозних дерев на інші класи графів. У даній роботі запропоновано новий спосіб побудови граціозного дерева на основі модифікації відомих методів. Також розглянуто задачу граціозності для певного типу одноциклічних графів.

Постановка проблеми. Будемо розглядати скінчені неорієнтовані графи без петель і кратних ребер. Під порядком графа розуміємо число його вершин, а під розміром – число ребер.

Граф $G' = (V', E')$ називають підграфом графа $G = (V, E)$, якщо $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Максимальний зв'язний підграф графа G – компонента зв'язності або просто компонента графа G. Якщо G – зв'язний граф, то mG – граф з m компонентами, кожна з яких ізоморфна G. Також можна сказати, що $mG = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$ – диз'юнктивне об'єднання графів G_i, кожний з яких – це копія графа G.

Маршрутом у графі вважається послідовність ребер та вершин, у якій вершини чергуються з ребрами, послідовність починається з вершини і закінчується вершиною і кожні два сусідні елементи цієї послідовності інцидентні. Довжина маршруту дорівнює кількості ребер у ньому. Маршрут називають ланцюгом, якщо всі його ребра різні. Ланцюг простий, якщо всі його вершини (а, отже, і ребра) різні. Під відстанню між двома вершинами в графі розуміємо довжину найкоротшого простого ланцюга, який з'єднує їх. У статті використовуються стандартні позначення, зокрема, P_n – простий ланцюг.

Ін'єктивну функцію f: $V \to \{0, 1, 2, \quad , q\}$ називають граціозною розміткою графа $G = (V, E)$ розміру q, якщо вона індукує таку реберну розмітку f^*: $E \to \{1, 2, 3, \ldots, q\}$, що f^* – бієкція і $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ для будь-яких суміжних вершин u, $v \in V(G)$. Граф G – граціозний, якщо він допускає граціозну розмітку f. У випадку граціозного дерева функція f – бієктивна.

В роботі досліджується клас задач, які в загальному вигляді можна сформулювати так: 1) розробити модифікації конструктивних методів породження граціозних дерев; 2) використати породжені граціозні дерева в побудові граціозних одноциклічних графів.

В наступних розділах розглянуті частинні випадки наведеного класу задач.

Метод а-побудови та його модифікації. Наведемо два конструктивних методи формування граціозних дерев, основаних на методі Δ-побудови [9, 10].

Перший з них пов'язаний з розв'язанням частинного випадку задачі другого класу, яка розглядається в наступному розділі. Опишемо його більш детально.

Означення 1 [9, 10]. Нехай S, T – дерева, а u, v – вершини графів S, T, відповідно. Розглянемо дерево, отримане приєднанням однієї копії T до кожної вершини S, крім u, за допомогою ототожнення вершини v в окремій копії T з вершиною S. Позначають отримане дерево $S\Delta_{+1}T$ і його побудову називають Δ_{+1}-побудовою.

Очевидно, що $|V(S\Delta_{+1}T)| = (|V(S)|-1)\cdot|V(T)| +1$ і дерева $S\Delta_{+1}T$, $T\Delta_{+1}S$ не ізоморфні в загальному випадку.

Теорема 1 [9]. Якщо дерева S і T мають граціозні розмітки f, g з $f(u) = p_S - 1$ і $g(v) = 0$, де $u\in V(S)$, $v\in V(T)$ і p_S – порядок S, то $S\Delta_{+1}T$ – граціозне дерево.

Вершини u і v приймаємо за корені дерев S, T, де $u\in V(S)$, $v\in V(T)$. Опишемо процес побудови граціозної розмітки дерева $S\Delta_{+1}T$, що задовольняє умові теореми 1, і назвемо його Δ_{+1}-граціозною побудовою.

Припустимо, що дерева S, T мають p_S, p_T вершин, відповідно. Тоді граф $S\Delta_{+1}T$ містить p_S-1 копій T. Побудуємо p_S-1 допоміжних розміток $g_0, g_1, \ldots, g_{p_S-2}$ для T, здійснюючи розбиття його множини вершин, на дві підмножини A, B таким чином, що корінь v належить A і, приймаючи

$$g_i(x)=\begin{cases} i\cdot p_T+g(x), \text{якщо } x\in A,\\ (p_s-i-2)p_T+g(x), \text{якщо } x\in B.\end{cases}$$

Підмножини A і B обираємо так, щоб $A\cup B = V(T)$ і кожне ребро T з'єднує вершини з різних підмножин, тобто розглядаємо дерево T як двочастковий граф.

Отримаємо p_S-1 ізоморфних копій дерева T з g_i розмітками. Легко показати, що всі вершинні мітки різні, всі реберні мітки різні. Множинами $\cup V_{g_i}$, $\cup E_{g_i}$, використаних вершинних і реберних міток, є

$$\cup V_{g_i} = \{0, 1, \ldots, (p_S-1)p_T-1\},$$

$$\cup E_{g_i} = \{1, \ldots, (p_S-1)p_T-1\}\backslash\{p_T, 2p_T, \ldots, (p_s-2)p_T\} =$$

$$= \{1, \ldots, (p_S-1)p_T\}\backslash\{p_T, 2p_T, \ldots, (p_s-1)p_T\}.$$

В дереві $S\Delta_{+1}T$ кожній вершині x копії дерева S, відмінній від u, ставиться у відповідність мітка $g_{f(x)}$, а вершині u – мітка $(p_S-1)p_T$. В результаті для дерева $S\Delta_{+1}T$ використовуються правильні вершинні мітки, тобто вершинні мітки, що задовольняють умові граціозності.

Розглянемо мітки ребер $S\Delta_{+1}T$ – це копії ребер дерева S. Кожна вершина x із копії S отримує мітку $f(x)p_T$, тому представлена розмітка дерева $S\Delta_{+1}T$, присвоює мітки p_T, $2p_T$, …, $(p_s - 1)p_T$ ребрам копії S. Отже, описана розмітка $S\Delta_{+1}T$, – граціозна і $S\Delta_{+1}T$ – граціозне дерево.

Метод Δ_+-побудови узагальнює, введений раніше в [3, 4], метод побудови дерева, яке містить n ізоморфних копій дерева T порядку p. Автори [3, 4] у підграф з диз'юнктивного об'єднання копій T вводять, в одному випадку нову вершину, яка з'єднується ребром з кожною копією вершини v в T, в іншому випадку ізоморфні образи вершини v ототожнюються. Перше з нових дерев позначають $T_v^n(p)$, друге – $T_v^n(p)^*$, і вони граціозні, якщо T граціозне дерево. У даній статті створено новий спосіб побудови граціозного дерева, в основу якого покладено комбінацію ідеї знаходження граціозного дерева $T_v^n(p)$ [3] з Δ-побудовою. Опишемо цей спосіб.

Нехай T – граціозне дерево порядку p і f – така його граціозна розмітка, що $v \in V(T)$ є вершиною з найбільшою міткою, тобто $f(v) = p - 1$. Розглянемо ліс: $nT = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$, де T_i – ізоморфні копії дерева T, $i = 1,2, …, n$, вершина v_i дерева T_i – ізоморфний образ v з T. Побудуємо дерево, яке позначимо T^*, додавши до графа nT, ребра v_1v_2, v_1v_3, …, v_1v_n. Таким чином, $T^* = \bigcup_{i=1}^{n} T_i + v_1v_2 + v_1v_3 + \ldots + v_1v_n$.

Можна сказати, що побудова T^* є модифікацією методу Δ-побудови з накладанням додаткових умов на певну вершину v. В наступній теоремі з'ясовані умови граціозності T^*, а при її доведенні отримано формулу знаходження вершинних міток для граціозної розмітки T^*.

Теорема 2. Якщо T – граціозне дерево порядку p, то $T^* = \bigcup_{i=1}^{n} T_i + v_1v_2 + v_1v_3 + \ldots + v_1v_n$ – також граціозне дерево.

Доведення. Якщо $p = 1$, то $T = P_1$, а T^* є зіркою, тому T^* – граціозне дерево. Розглянемо $p \geq 2$. Позначимо $d(u)$ – відстань від вершини v до вершини u дерева T порядку p. Інакше кажучи, $d(u)$ реалізує двочастковість дерева. Припустимо, що функція f – граціозна розмітка T з $f(v) = p - 1$. Нехай вершини u_s^i, $v_i \in V(T^*)$ є ізоморфними образами вершин u_s, $v \in V(T)$, відповідно, і $u_s^i \neq v_i$ для будь-яких $i = 1,2, …, n$, $s \in \{1, 2, …, p\}$. Задамо вершинну розмітку φ дерева T^* наступним чином:

$$\varphi(u_s^i) = \begin{cases} i \cdot p - 1 - f(u_s), & \text{якщо } d(u_s) \text{ парне в } T, \\ (n + 1 - i)p - 1 - f(u_s), & \text{якщо } d(u_s) \text{ непарне в } T, \end{cases}$$

$$\varphi(v_i) = (i - 1)p.$$

Покажемо, що φ буде ін'єктивною функцією. Доведення проведемо від супротивного.

Розглянемо випадок, коли $d(u_m)$ і $d(u_k)$ мають різну парність, $u_m, u_k \in V(T)$.

1. Припустимо, що $\varphi(u_m^i) = \varphi(u_k^i)$. Тоді

$$ip - 1 - f(u_m) = (n + 1 - i)\, p - 1 - f(u_k) \Rightarrow |f(u_k) - f(u_m)| = p|n + 1 - 2i|.$$

Так як $|f(u_k) - f(u_m)| < p$, то $n + 1 - 2 = 0$, а отже $|f(u_k) - f(u_m)| = 0$, приходимо до протиріччя.

2. Припустимо, що $\varphi(u_m^i) = \varphi(u_k^j)$. Тоді

$$ip - 1 - f(u_m) = (n + 1 - j)p - 1 - f(u_k) \Rightarrow |f(u_k) - f(u_m)| = p|n + 1 - i - j|.$$

Аналогічно $n + 1 - i - j = 0$ і $|f(u_k) - f(u_m)| = 0$, прийшли до протиріччя.

Наступний випадок, коли $d(u_m)$ і $d(u_k)$ мають однакову парність, доводиться аналогічно.

Отже φ – ін'єктивна функція з множини вершин $V(T^*)$ в множину чисел $\{0, 1, 2, \ldots, np - 1\}$.

Якщо $u_m^i u_k^i$ – ребро підграфа T_i дерева T^*, то $d(u_m)$ і $d(u_k)$ мають різну парність. Знаходимо мітку цього ребра:

$$|\varphi(u_m^i) - \varphi(u_k^i)| = |ip - 1 - f(u_m) - (n + 1 - i)p + 1 + f(u_k)| = |(n + 1 - 2i)p + f(u_m) - f(u_k)|.$$

Маємо множину міток ребер підграфа $\bigcup_{i=1}^{n} T_i$ дерева T^*:

$$\{1, 2, \ldots, p - 1, p + 1, p + 2, \ldots, 2p - 1, 2p + 1, 2p + 2, \ldots, np - 1\} =$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, np - 1\} \backslash \{p, 2p, 3p, \ldots, (n - 1)p\},$$

яка складається з різних чисел.

Для ребер $v_1v_2, v_1v_3, \ldots, v_1v_n$ мітки отримуємо наступним чином:

$$|\varphi(v_1) - \varphi(v_i)| = |0 - (i - 1)p| = (i - 1)p,$$

де $i = 2, 3, \ldots, n$.

Мітки всіх ребер дерева T^* різні. Таким чином, встановлена взаємно однозначна відповідність між множиною ребер $E(T^*)$ і множиною чисел $\{1, 2, \ldots, p - 1, p, p + 1, \ldots, 2p - 1, 2p, 2p + 1, \ldots, np - 1\}$.

Отже, розмітка φ – граціозна і T^* є граціозним графом. Теорему доведено.

Метод побудови граціозного дерева T^* назвемо модифікованою граціозною побудовою.

Про граціозність одноциклічного графа. Будемо використовувати метод формування граціозних одноциклічних графів з граціозних дерев, отриманих з допомогою Δ_{+1}-побудови. Розглянемо дерево $S\Delta_{+1}T$ порядку p і доведемо наступну теорему.

Теорема 3. Нехай S, T граціозні дерева порядку p_S і p_T ($p_S \cdot p_T > 2$), відповідно, такі: 1) корінь u – висяча вершина в дереві $S\Delta_{+1}T$ або 2) висяча вершина дерева T має найбільшу мітку в його граціозній розмітці, тоді існує така вершина $w \in V(S\Delta_{+1}T)$, де $w \neq u$, що одноциклічний граф $G = S\Delta_{+1}T + uw$ буде граціозним.

Доведення. За умовою, дерево $S\Delta_{+1}T$ – граціозне і, згідно з Δ_{+1}-побудовою, дерева S і T мають граціозні розмітки f, g з $f(u) = p_S - 1$ і $g(v) = 0$, де $u \in V(S)$, $v \in V(T)$. Якщо вершина u – висяча в $S\Delta_{+1}T$, то за теоремою 7 [11] існує така вершина $w \in V(S\Delta_{+1}T)$, що граф $G = S\Delta_{+1}T + uw$ буде граціозним.

Розглянемо випадок, коли для граціозного дерева $S\Delta_{+1}T$ порядку p вершина u не є висячою. За теоремою 1, дерева S і T мають граціозні розмітки, які позначимо f, g і $f(u) = p_S - 1$, $g(v) = 0$, де $u \in V(S)$, $v \in V(T)$, p_S – порядок S. Виходячи з Δ_{+1}-граціозної побудови, вершина u буде суміжною з вершиною x, якій відповідає мітка 0 в $S\Delta_{+1}T$, тобто з копією вершини v, для якої $f(x) = 0$. Існує вершина $w \in V(T)$ з міткою 1 і $w \Rightarrow A$, тобто $g_0(w) = 1$ (або як w беремо вершину з міткою 1 + $(i + 2 - p_S)p_T$, якщо $w \Rightarrow B$). Припустимо, що z – висяча вершина дерева T, яка має найбільшу мітку, тоді z суміжна з коренем v. Таким чином, $g(z) = p_T - 1$ і ребру $vz \in E(T)$ відповідає мітка $p_T - 1$. Так як $z \Rightarrow B$ в T, то $g_0(z) = (p_S - 1)p_T - 1 = p - 2$. Отже, в дереві $S\Delta_{+1}T$ вершина z отримує мітку $p - 2$, і ребро vz – мітку $p - 2$.

Нехай φ – вершинна розмітка графа G. Задамо φ наступним чином, $\varphi(x) = g_i(x)$ для всіх вершин x i-ої копії дерева T, крім z, $i = 0, 1, \ldots, p_S - 2$ і $\varphi(z) = q = p$. Якщо x – вершина дерева S, то $\varphi(x) = g_{f(x)}(v)$. Для вершини w маємо $\varphi(w) = g_0(w) = 1$, де $w \Rightarrow A$ ($\varphi(w) = g_{p_S - 2}(w) = 1$, де $w \Rightarrow B$).

Розмітка φ, породжує реберну розмітку, що кожному ребру ставить у відповідність абсолютну величину різниці міток інцидентних йому вершин. При розмітці φ, мітки всіх ребер графа $G = S\Delta_{+1}T + uw$ з множини $E(G) \setminus \{vz, uw\}$ збігаються з мітками цих ребер в дереві $S\Delta_{+1}T$ і утворюють множину $\{1, 2, \ldots, \ldots, p - 1\} \setminus \{p - 2\}$. У графі G ребра vz, uw отримають мітки p і $p - 2$, відповідно. Так як мітки всіх вершин і ребер при розмітці φ одноциклічного графа $G = S\Delta_{+1}T + uw$ задовольняють умові граціозності, то він є граціозним. Теорему доведено.

Висновок. В результаті проведеного дослідження створено новий метод побудови граціозного дерева з ізоморфних дерев менших порядків. Запропоновано ідею отримання граціозних одноциклічних графів, породжених деревом певної конструкції. Надалі планується розглянути можливості адаптації методів побудови граціозних дерев на інші класи графів.

М.Ф. Семенюта

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ ГРАЦИОЗНОСТИ ГРАФОВ

Рассматриваются частные случаи задач по разработке модификаций конструктивных методов порождения грациозных деревьев и использованию этих деревьев в построении грациозных одноциклических графов. Найден новый метод построения грациозного дерева из изоморфных деревьев меньших порядков. Получены условия существования одноциклических графов, конструкции которых связаны с грациозными деревьями определенного вида.
M.F. Semenyuta

SPECIAL CASES OF THE GRAPH GRACEFULNESS PROBLEM

For some special cases, we consider the problem of developing modifications of constructive methods for obtaining graceful trees and of applying these trees to construct graceful single-cycle graphs. New method to construct a graceful tree from isomorphic trees of smaller order is found. Existence conditions are obtained for one-cycle graphs, whose constructions are connected with graceful trees of a certain type.

1. *Golomb S.W.* How to number a graph // Graph Theory and Computing (ed. R.C. Read), Academic Press, New York, 1972. – P. 23 – 37.
2. *Stanton R.A.*, *Zanke C.R.* Labeling of balanced trees // Proceedings of the Forth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton. – 1973. – P. 479 – 495.
3. *Koh K.M.*, *Rogers D.G.*, *Tan T.* On graceful trees // Nanta Math. – 1977. – Vol.10, Issue 2. – P. 207 – 211.
4. *Koh K.M.*, *Rogers D.G.*, *Tan T.* Two theorems on graceful trees // Discrete Math. – 1979. – Vol. 26. – P. 141 – 148.
5. *Jin D.J.*, *Lee S.H.*, *Liu H.L.*, *Liu S.Z.*, *Lu X.G.*, *Zhang D.* The radical product of graceul trees // Comput. Math. Appl. – 1993. – Vol. 26, Issue 10. – P. 89 – 93.
6. *Liu S.Z.*, *Jin D.J.*, *Lee S.H.*, *Liu H.L.*, *Lu X.G.*, *Zhang D.*The joint sum of graceful trees // Comput. Math. Appl. – 1993. – Vol. 26, Issue 10. – P. 83 – 87.
7. *Burzio M.*, *Ferrarese G.* The subdivision of a graceful tree is a graceful tree // Discrete Math. – 1998. – Vol. 181, Issue 1 – 3. – P. 275 – 281.
8. *Edwards M.*, *Howard L.* A Survey of graceful trees // Atlantic Electronic Journal of Mathematics. – 2006. – Vol. 1, Issue 1. – P. 5 – 30.
9. *Stanton R.*, *Zarnke C.* Labeling of balanced trees // Proc. 4th Southeast Conf. Combin., Graph Theory, Comput. – 1973. – P. 479 – 495.
10. *Burzio M.*, *Ferrarese G.* The subdivision graph of a graceful tree is a graceful tree // Discrete Math. – 1998. – Vol. 181. – P. 275 – 281.
11. *Семенюта М.Ф.* Грациозность одноциклических графов // Теорія оптимальних рішень. – 2015. – С. 10 – 15.

Одержано 15.05.2015

Про автора:

Семенюта Марина Фролівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Кіровоградської льотної академії НАУ.