PACS: 02.10.De, 02.30.Tb, 45.20.–d, 45.50.–j

С.В. Терехов

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА. V. ПОЛЕ ГИПЕРДВОЙНЫХ КВАТЕРНИОНОВ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина

Статья поступила в редакцию 20 июня 2017 года

Исследовано кватернионное поле гиперкомплексных структур Гамильтона–Гиббса с различными калибровками, накладываемыми на скалярную и векторную части потенциала. Показано, что при воздействии на неподвижную локальную область внешнего поля с нулевой скалярной частью могут наблюдаться те или иные поля, связанные с различным поведением векторного потенциала. Например, отсутствие субстанционального градиента кватернионного поля приводит к наложению на потенциалы калибровки Лоренца и появлению электромагнитного поля Максвелла. Найдена связь особенностей кватернионного дифференциального исчисления с физическими характеристиками для гипераналитической плотности энергии кватернионного поля. Установлено, что произведение двух гипераналитических кватернионов не описывается гипераналитической функцией, если дефект кватернионной производной отличен от нуля. Показано, что помимо стандартных сил (например, силы Лоренца) на «заряд» в кватернионном поле действуют дополнительные силы.

Ключевые слова: локальная область, кватернион, гипераналитичность, плотность распределения «зарядов», плотность «тока», скалярный и векторный потенциалы

1. Введение: виды кватернионов

В течение последних пятидесяти лет наблюдается устойчивая тенденция к возрождению применения в геометрии и физике функций вида $\Phi = \varphi + \gamma \dfrac{\mathbf{A}}{c}$ [1–12], где скалярная $\mathrm{Sc}(\Phi) = \varphi$ и векторная $\mathrm{Ve}(\Phi) = \mathbf{A}$ части могут зависеть, например, от пространственно-временных аргументов $\mathbf{r}$ и t; c – характерная скорость, а квадрат «цвета» кватерниона равен

$$\gamma^2 = \begin{cases} -1 - \textit{гиперкомплексные}, \\ \;\;0 - \textit{гипердуальные}, \\ +1 - \textit{гипердвойные}. \end{cases} \qquad (1)$$

«Цветность» (1) однотипных кватернионов проявляется при их перемножении, так как произведение векторных составляющих определяется формулой

$$\lambda\mathbf{A}\gamma\mathbf{B} = \gamma^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \gamma[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]). \qquad (2)$$

Кватернионные теории позволяют записать известные физические и математические соотношения в простой и наглядной форме [1,2,5–12]. Например, гипердуальные кватернионы используют для описания винтовых движений [1]; условия сопряженной гипераналитичности градиента псевдокватернионов [6] полностью соответствуют уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме и т.д. Это указывает на возможность решения других проблем и задач с помощью гиперкомплексного исчисления.

Одной из таких задач является отыскание и исследование уравнений тех полей [9], которые описываются кватернионами другой «цветности». Математическая сторона проблемы связана с давними попытками аксиоматизации теоретической физики и внедрением в ее основы геометрико-алгебраических идей. С физической стороны признание корпускулярно-волнового дуализма де Бройля [13] и попытка Максвелла записать уравнения электромагнитного поля в виде гипераналитичности кватернионной функции [14, с. 489] (см. также работы автора [6,8,9]) указывают на то, что такие попытки небезосновательны.

Для описания состояний вещества и поля необходимо исследовать кватернионные функции разной «цветности»; сравнить уравнения гипераналитичности и гипергармоничности с уравнениями феноменологических моделей по материальным полям; выяснить соответствие между особенностями кватернионного исчисления и их физическим содержанием. Вначале исследуем условия гипераналитичности и гипергармоничности кватернионов Гамильтона–Гиббса, введенных в работе [15].

2. Условия гипераналитичности и гипергармоничности полевых кватернионов Гамильтона–Гиббса

Согласно формуле (10) из [16] гипердвойные кватернионные функции (кватернионы Гамильтона–Гиббса) удовлетворяют системе безразмерных уравнений гипераналитичности (далее по тексту положим скорость $c = 1$):

$$\Diamond\Phi = 0 : \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0, \\ \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial\tau} + \mathrm{grad}\varphi - \mathrm{rot}\mathbf{A} = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\Diamond = \dfrac{\partial}{\partial\tau} + \gamma\nabla$ – оператор «тетра»; $\tau = t/l$, t – время в пространственных единицах измерения, l – характерная длина; $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$ – оператор «набла», $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)/l$ – радиус-вектор, определяющий положение точки с координатами x, y и z; $\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A}$; $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$; $\mathrm{rot}\mathbf{A} = [\nabla\times\mathbf{A}]$.

Так как кватернион $\Phi(\tau, \mathbf{r})$ зависит от действительных переменных τ и $\mathbf{r}$, его аргументами являются гиперкомплексные структуры $R = \tau + \gamma\mathbf{r}$ и $R^* = \tau - \gamma\mathbf{r}$, т.е. $\Phi = \Phi(R, R^*)$. Отметим тот факт, что при выполнении условий (3) выполняется также равенство $\Diamond^*\Phi^* = 0$ и не обращаются в нуль локальные кватернионные производные $\Diamond^*\Phi \neq 0$, $\Diamond\Phi^* \neq 0$.

Для *неподвижной* локальной области (скорость перемещения ее центра масс u = 0, см. формулу (9) из [16]) условия (3) определяют независимость кватерниона $\Phi(R,R^*)$ от комплексно-сопряженной структуры R^*. Кроме того, неоднозначность физического определения скалярного $\varphi(R,R^*)$ и векторного $\mathbf{A}(R,R^*)$ потенциалов гиперкомплексной функции $\Phi(R,R^*)$ связана с тем, что физически измеримые функции (например, напряженности материальных полей) определяются частными производными от потенциалов. Поэтому при решении физических задач на потенциалы полей накладывают дополнительные ограничения, которые определяют их калибровку. Если на неподвижную локальную область оказывает воздействие внешнее поле с напряженностью $E^* = 0 - \gamma\mathbf{E}$, то во всей системе, состоящей из таких целл, будет отсутствовать субстанциональный градиент кватернионного поля при выполнении условий (формула вида (25) из [16]):

$$D\Phi = 0 \Leftrightarrow \Diamond\Phi = E^* : \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0, \\ \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial\tau} + \operatorname{grad}\varphi - \operatorname{rot}\mathbf{A} = -\mathbf{E}. \end{cases} \tag{4}$$

1. *Калибровка Лоренца* [17, с. 228] соответствует первому уравнению системы (4). Введем в рассмотрение два типа поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\tau} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{5}$$

$$\mathbf{E}_2 = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{6}$$

Применение операции дивергенции к уравнениям (5) и (6) с учетом первого выражения (4) приводит к уравнениям

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_1 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} - \Delta\varphi = -\Box\varphi, \tag{7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_2 = 0, \tag{8}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $\Box = \Delta - \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}$ – оператор Даламбера. Действуя оператором ротора на (5), получим

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial \tau}. \tag{9}$$

Вычислив частную производную по времени от (5) и применив к первому уравнению системы (4) оператор «набла», найдем выражение

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}_2 = \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial \tau} + \Box\mathbf{A}. \tag{10}$$

Сравнение уравнений (5)–(10) с теорией электромагнитного поля Максвелла (см., например, [17, п. 4.12]) показывает, что векторная функция $\mathbf{E}_1$ описывает «электрическое» поле, а $\mathbf{E}_2$ − «магнитное». При этом выполняются равенства

$$\Box\varphi = -4\pi\rho, \tag{11}$$

$$\Box\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}. \tag{12}$$

Здесь ρ − скалярная функция плотности распределения «заряда», а $\mathbf{j}$ − векторная функция плотности «тока». После введения гиперкомплексной плотности распределения «заряда»

$$Q = \rho + \gamma\mathbf{j} \tag{13}$$

соотношения (11) и (12) можно записать в кватернионном виде

$$\Box\Phi = -4\pi Q. \tag{14}$$

В области гипераналитичности (см. условия (3)) кватерниона (13) наблюдается локальный закон сохранения плотности распределения «заряда» ρ, а плотность «тока» удовлетворяет уравнению, которое имеет вид второго уравнения системы (3).

Отметим, что (11) и (12) являются волновыми уравнениями для потенциалов кватернионного поля [17, с. 228]. Таким образом, модель Максвелла является следствием отсутствия субстанционального градиента [16] кватернионного поля $\Phi(\mathrm{R},\mathrm{R}^*)$ при действии на локальную область внешнего поля специфического вида (формула вида (25) из [16]), наложения на потенциалы калибровки Лоренца при ее естественном возникновении в условиях (3) и (4).

2. *Калибровка Кулона* описывает соленоидальное векторное поле $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{W}$, [17, п. 4.10]), для которого выполняется равенство

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0. \tag{15}$$

Из первого уравнения (4) следует, что поле Кулона характеризуется стационарным скалярным потенциалом φ, для которого (11) принимает вид уравнения Пуассона [18, с. 56] (в единицах системы СГС):

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{16}$$

Отметим, что при выполнении условий (3) применение операции дивергенции (div) ко второму уравнению системы переводит его в уравнение Лапласа.

3. *Калибровка Лапласа* ([17, п. 4.11]) задается соотношениями

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0 , \quad \mathrm{rot}\mathbf{A} = 0 , \tag{17}$$

а уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{18}$$

описывает локальную область, в которой отсутствуют «заряды» и «магнитное» поле, а также наблюдается стационарный потенциал φ, порождающий «электрическое» поле. Последнее не достигает экстремального значения в областях, где выполняется уравнение Лапласа (18), и концентрируется в тех точках, где $\Delta\varphi < 0$ [19].

4. *Калибровка вида* $\mathbf{A} = \mathrm{grad}\psi$ ($\mathrm{div}\mathbf{A} \neq 0$) описывает потенциальное (безвихревое) векторное поле **A**, так как выполняется тождество $\mathbf{A} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\psi) \equiv 0$ [17, с. 179]. При этом из второго уравнения системы (3) следует, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \varphi = f(\tau) ,$$

где $f(\tau)$ – произвольная функция безразмерного времени. Подстановка этого равенства в первое уравнение системы (3) преобразовывает его в неоднородное уравнение Даламбера

$$\Box\psi = -f'(\tau) .$$

Кватернион $\Phi(\mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$, удовлетворяющий уравнению Даламбера:

$$\Box\Phi(\mathrm{R}, \mathrm{R}^*) = 0 , \tag{19}$$

будем называть *гипергармоническим*. С точки зрения теории Максвелла гипергармоническая функция определяет локальные области, в которых отсутствуют «заряды» и «токи». В этих целлах скалярный и векторный потенциалы задаются периодическими во времени и по пространству функциями, которые могут формировать в синергетических системах периодические структуры Тьюринга [20].

3. Кватернион плотности энергии в неподвижной целле

Произведение плотности распределения «заряда» (13) $Q(\mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ на гиперкомплексный потенциал $\Phi(\mathrm{R}, \mathrm{R}^*)$ задает плотность энергии поля $W = Q\Phi$, при этом ее скалярная и векторная части равны

$$\mathrm{Sc}(W) = w = \rho\varphi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} , \tag{20}$$

$$\mathrm{Ve}(W) = \mathbf{W} = \rho\mathbf{A} + \varphi\mathbf{j} - [\mathbf{j} \times \mathbf{A}] . \tag{21}$$

Согласно формуле (47) из [16] гипераналитичность кватернионов Q и Φ ($\Diamond Q = 0$, $\Diamond\Phi = 0$, см. условия (3)) не определяет гипераналитичность функции W, т.е.

$$\Diamond W = \Diamond\left(Q\Phi\right) = \left\{\left(\Diamond Q\right)\Phi + Q\left(\Diamond\Phi\right) + Q_{\Delta}\left(W\right)\right\}\Big|_{\Diamond Q=0,\Diamond\Phi=0} = Q_{\Delta}\left(W\right), \quad (22)$$

где дефект кватернионной производной по [16] равен

$$Q_{\Delta}\left(W\right) = \mathbf{j}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A} + \gamma\left\{\left[\left(-\nabla\varphi + \left[\mathbf{A}\times\nabla\right]\right)\times\mathbf{j}\right]\right\}. \quad (23)$$

С учетом правила (4) из [15] и формулы (2) из [16] равенство (23) принимает вид

$$Q_{\Delta}\left(W\right) = \mathbf{j}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A} + \gamma\left\{\left[\mathbf{j}\times\nabla\varphi\right] + \left[\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\mathbf{j}\right] + \mathbf{Z}\right\}, \quad (24)$$

где вектор $\mathbf{Z} = \left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\mathbf{j} - \mathbf{A}\mathrm{div}\mathbf{j}$. Следовательно, целла с «зарядом» Q в кватернионном поле Φ обладает гиперкомплексным градиентом плотности энергии $\Diamond W\big|_{\Delta Q=0,\Diamond\Phi=0} = g + \gamma\mathbf{G}$:

$$\mathrm{Sc}\left(\Diamond W\right)\Big|_{\Diamond Q=0,\Diamond\Phi=0} = g = \mathbf{j}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}, \quad (25)$$

$$\mathrm{Ve}\left(\Diamond W\right)\Big|_{\Diamond Q=0,\Diamond\Phi=0} = \mathbf{G} = \left[\mathbf{j}\times\nabla\varphi\right] + \left[\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\mathbf{j}\right] + \mathbf{Z}. \quad (26)$$

Используя формулу (18), определение (24) из [15], формулы (42)–(46) из [16] и условия (3), запишем первое слагаемое в (24) в виде

$$g = \frac{1}{8}\left\{\left\langle\left(Q,\Diamond,\Phi^*\right)\right\rangle + \left\langle\left(Q,\Diamond^*,\Phi\right)\right\rangle + \left\langle\left(Q^*,\Diamond,\Phi\right)\right\rangle + \left\langle\left(Q^*,\Diamond^*,\Phi^*\right)\right\rangle\right\} =$$
$$= \frac{1}{8}\left\{\left(Q\Diamond^* + Q^*\Diamond\right)\Phi + \left(Q\Diamond + Q^*\Diamond^*\right)\Phi^* - \left(\left(\Diamond^*\Phi\right)^* + \left(\Diamond\Phi^*\right)^* Q\right)\right\}. \quad (27)$$

Согласно формулам (18) из [15] и (37) из [16] слагаемое из (24)

$$\gamma\left[\mathbf{j}\times\nabla\varphi\right] = \frac{1}{4}\left\{\left[\left(\Diamond\Phi\right),Q\right] + \left[\left(\Diamond\Phi^*\right),Q\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(\Diamond\Phi^*\right),Q\right] = \frac{1}{4}\left\{\left(\Diamond\Phi^*\right)Q - \left(\Diamond\Phi^*\right)^* Q^*\right\}. \quad (28)$$

Третье слагаемое (24) по формулам (18) из [15] и (39) из [16] равно

$$\gamma\left[\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\mathbf{j}\right] = -\frac{1}{4}\left\{\left[\left(\Diamond Q\right),\Phi\right] + \left[\left(\Diamond Q^*\right),\Phi\right]\right\} =$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\left(\Diamond Q^*\right),\Phi\right] = \frac{1}{4}\left\{\left(\Diamond Q^*\right)^*\Phi^* - \left(\Diamond Q^*\right)\Phi\right\}. \quad (29)$$

Величина (с учетом определения (23) из [15])

$$\gamma\mathbf{Z} = \frac{1}{2}\left[\left(\Phi,\Diamond,Q\right)\right] = \frac{1}{2}\left\{\left(\Phi\Diamond\right)Q - \Phi\left(\Diamond Q\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\Phi\Diamond\right)Q \quad (30)$$

представляет собой произведение числа на локальную гиперкомплексную производную по направлению кватерниона потенциала Φ от кватерниона плотности распределения «заряда» Q. Формулы (27)–(30) демонстрируют связь особенностей дифференциального исчисления кватернионов и физических свойств локальной области при отсутствии гиперкомплексных градиентов плотности распределения «заряда» Q и потенциала поля Φ.

При условии гипераналитичности функций Q и Φ дефект гиперкомплексной производной от плотности энергии W равен нулю ($Q_\Delta(W) = 0$), например в таких случаях.

1. Если выражение (30) равно нулю ($\mathbf{Z} = 0$). Рассмотрим некоторые частные случаи обращения вектора $\mathbf{Z}$ в нуль:

а) $\mathbf{Z} = 0: \begin{cases} \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{j} = 0 \end{cases}$ – в локальной области наблюдается стационарное распределение плотности «зарядов», при наличии внешнего «электрического» поля (см. систему (4)) его напряженность противоположна по направлению градиенту скалярного потенциала кватернионного поля φ, дефект кватернионной производной (24) равен нулю, и кватернион плотности энергии описывается гипераналитичной функцией;

б) $\mathbf{Z} = 0: \begin{cases} \mathbf{A} \neq 0 \\ \mathbf{j} = 0 \end{cases}$ – при наличии внешнего поля стационарное распределение плотности «зарядов» поддерживается «электрическим» и «магнитным» полями, дефект кватернионной производной (24) равен нулю, и кватернион плотности энергии описывается гипераналитичной функцией;

в) $\mathbf{Z} = 0: \begin{cases} \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{j} \neq 0 \end{cases}$ – при наличии внешнего поля ему противодействует градиент стационарного скалярного потенциала, дефект кватернионной производной (24) отличен от нуля, и кватернион плотности энергии не описывается гипераналитичной функцией;

г) $\mathbf{Z} = 0: \begin{cases} \mathbf{A} \neq 0 \\ \mathbf{j} \neq 0 \end{cases}$ – выполняется равенство $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{j} = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{j}$ и пусть плотность «тока» $\mathbf{j}$ перпендикулярна «магнитному» полю (6) ($\mathbf{j} \perp \mathbf{E}_2$, величина (27) обращается в нуль). Тогда по теореме 5 из [16] компланарность векторов $\mathbf{j}$, $\mathbf{A}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j}$ (или $\mathbf{j}$, $\mathbf{A}$ и $\nabla\varphi$, или $\mathbf{j}$, $\nabla\varphi$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j}$, или $\mathbf{A}$, $\nabla\varphi$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j}$) определяет обращение в нуль формулы (26), т.е. перпендикулярность соответствующих векторов к полю $\mathbf{G}$. В этом случае дефект кватернионной производной (24) равен нулю и кватернион плотности энергии описывается гипераналитичной функцией.

2. Если выражение (30) не равно нулю ($\mathbf{Z} \neq 0$) и плотность «тока» $\mathbf{j}$ перпендикулярна «магнитному» полю (6) ($\mathbf{j} \perp \mathbf{E}_2$, величина (27) обращается в нуль), то объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{j}$, $\mathbf{A}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j}$ (или $\mathbf{j}$, $\mathbf{A}$ и $\nabla\varphi$, или $\mathbf{j}$, $\nabla\varphi$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j}$, или $\mathbf{A}$, $\nabla\varphi$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j}$), в случае нулевого дефекта кватернионной производной будет равен

$$\mathbf{j}\cdot[\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\mathbf{j}]=\mathbf{j}\cdot\mathbf{Z}, \tag{31}$$

или

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{j}\times\nabla\varphi]=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}, \tag{32}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{j}\cdot[\mathbf{j}\times\nabla\varphi]=\mathrm{rot}\mathbf{j}\cdot\mathbf{Z}, \tag{33}$$

$$\nabla\varphi\cdot[\mathbf{A}\times\mathrm{rot}\mathbf{j}]=\nabla\varphi\cdot\mathbf{Z}. \tag{34}$$

Отличие объемов параллелепипедов (31)–(34) от правых частей указанных соотношений указывает на наличие кватернионного градиента плотности энергии, т.е. на то, что функция W не является гипераналитичной. Таким образом, произведение двух гипераналитичных функций не является гипераналитичным, если дефект кватернионной производной отличен от нуля.

4. Субстанциональное уравнение сохранения плотности распределения «заряда». Силы в кватернионном поле

Если плотность распределения «заряда» (13) описывается гипераналитичной функцией, то выполняются условия вида (3):

$$\Diamond Q=0:\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial\tau}+\mathrm{div}\mathbf{j}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\mathbf{j}}{\partial\tau}+\mathrm{grad}\rho-\mathrm{rot}\mathbf{j}=0.\end{cases} \tag{35}$$

Если центр масс локальной области движется со скоростью $\mathbf{u}$, но остаются неизменными условия (35), то первое уравнение (35) можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}+\mathrm{div}\mathbf{J}=-\rho\mathrm{div}\mathbf{u}. \tag{36}$$

Здесь $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\mathbf{u}\cdot\nabla$ − субстанциональная производная по времени, $\mathbf{J}=\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}$ − субстанциональная плотность «тока», равная разности векторов истинной плотности «тока» $\mathbf{j}$ и конвективной компоненты $\rho\mathbf{u}$. Для несжимаемой среды ($\mathrm{div}\mathbf{u}=0$) субстанциональное уравнение сохранения плотности распределения «заряда» (36) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}+\mathrm{div}\mathbf{J}=0. \tag{37}$$

Если в среде отсутствует «ток» ($\mathbf{j}=0$), но присутствует конвективное перемещение «заряда», то субстанциональная плотность «заряда»

$$\mathbf{J}=-\rho\mathbf{u}. \tag{38}$$

Силу, действующую на движущийся «заряд» в кватернионном поле вида (4), определим формулой ($Q=\rho+\gamma\mathbf{J}$):

$$F = QE = -Q\Diamond\Phi = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \gamma\left(\rho\mathbf{E} - \left[\mathbf{J}\times\mathbf{E}\right]\right), \tag{39}$$

где скалярная часть кватерниона (39) определяет скорость диссипации энергии

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}, \tag{40}$$

а векторная – силу, действующую на «заряд»:

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} - \left[\mathbf{J}\times\mathbf{E}\right]. \tag{41}$$

Из формулы (40) следует, что рассеяние энергии локальной областью не происходит при отсутствии внутри нее «тока» ($\mathbf{J} = 0$), а при его наличии – при перпендикулярности плотности «тока» $\mathbf{J}$ вектору напряженности внешнего поля $\mathbf{E}$ ($\mathbf{J}\perp\mathbf{E}$). При коллинеарности плотности «тока» $\mathbf{J}$ вектору напряженности «электрического» поля $\mathbf{E}_1$ ($\mathbf{J} \parallel \mathbf{E}$) из правой части равенства (41) исчезает вычитаемое $\left[\mathbf{J}\times\mathbf{E}_1\right]$. В этом случае указанные величины связаны соотношением

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}_1, \tag{42}$$

где σ – коэффициент пропорциональности. Если стационарное векторное поле $\mathbf{A}$ не изменяется от точки к точке локальной области, то выражение (42) отображает закон Ома, записанный в дифференциальной форме [22, с. 14], а коэффициент σ – электропроводность среды.

С учетом введенных определений и при выполнении (42) равенство (41) запишется в виде

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E}_1 + \rho\left[\mathbf{u}\times\mathbf{E}_2\right] + \rho\mathbf{E}_2 - \left[\mathbf{j}\times\mathbf{E}_2\right]. \tag{43}$$

Если выполняется равенство

$$\rho\mathbf{E}_2 - \left[\mathbf{j}\times\mathbf{E}_2\right] = 0, \tag{44}$$

то соотношение (43) является стандартным выражением для силы, действующей на «заряд» в «электрическом» и «магнитном» полях, причем второе слагаемое описывает силу Лоренца

$$\mathbf{F}_1 = \rho\left[\mathbf{u}\times\mathbf{E}_2\right]. \tag{45}$$

Таким образом, стандартное выражение для силы, действующей на «заряд» в «электрическом» и «магнитном» полях, возникает тогда, когда происходит конвективное перераспределение «заряда», выполняется дифференциальный закон Ома и справедливо выражение (44).

4. Заключение

Условия гипераналитичности кватернионных функций в некоторой локальной области позволяют откалибровать полевые потенциалы (первое уравнение условий задает полевые потенциалы) и приводят к уравнениям моделей Максвелла, Кулона, Пуассона и Лапласа. Исследование гипераналитичности произведения двух гипераналитичных кватернионов Гамильтона–Гиббса позволило связать некоммутативность и неассоциативность дифференциального гиперисчисления с физическими величинами системы. Следует отметить, что помимо стандартных сил (например, сила Лоренца) в кватернионном поле на «заряд» действуют дополнительные силы. Таким образом, применение гиперкомплексного исчисления к описанию физических объектов позволяет получить не только известные из эксперимента и теории соотношения, но и установить целый ряд новых связей между характеристиками системы.

1. *Ф.М. Диментберг*, Винтовое счисление и его приложения в механике, Наука, Москва (1965).
2. *В.Н. Березин*, *Ю.А. Курочкин*, *Е.А. Толкачев*, Кватернионы в релятивистской физике, Наука, Минск (1989).
3. *P.S. Bisht*, *O.P. Negi*, *B.S. Rajput*, Prog. Theor. Phys. **85**, 157 (1991).
4. *А.О. Ватульян*, Соросовский образовательный журнал № 5, 117 (1999).
5. *A.P. Yefremov*, Gravitaion & Cosmology **7**, № 4, 273 (2001).
6. *С.В. Терехов*, Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки № 2, 287 (2002).
7. *А.П. Ефремов*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **1**, 111 (2004).
8. *С.В. Терехов*, Вестник Новгородского государственного университета № 26, 56 (2004).
9. *С.В. Терехов*, Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки № 2, 162 (2008).
10. *А.А. Элиович*, *В.И. Санюк*, Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика № 2 (1), 79 (2010).
11. *Ю.Н. Челноков*, Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением, Физматлит, Москва (2011).
12. *В.И. Крылов*, *С.Н. Яшкин*, Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка № 6, 3 (2016).
13. *Л. де Бройль*, Революция в физике. Новая физика и кванты, Госатомиздат, Москва (1963).
14. *Дж.К. Максвелл*, Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, Гостехтеоретиздат, Москва (1952).
15. *С.В. Терехов*, ФТВД **25**, № 1–2, 5 (2015).
16. *С.В. Терехов*, ФТВД **26**, № 1–2, 106 (2016).
17. *А.И. Борисенко*, *И.Е. Тарапов*, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, Высшая школа, Москва (1966).
18. *А.В. Астахов*, *Ю.М. Широков*, Электромагнитное поле, Наука, Москва (1980).
19. *Ф.М. Морс*, *Г. Фешбах*, Методы теоретической физики, Т. 1, Изд-во иностр. лит., Москва (1958).
20. *С.В. Терехов*, ФТВД **22**, № 1, 33 (2012).
21. *С.В. Терехов*, ФТВД **25**, № 3–4, 112 (2015).
22. *А.А. Власов*, Макроскопическая электродинамика, Физматлит, Москва (2005).

S.V. Terekhov

PHYSICAL AND GEOMETRICAL DESCRIPTIONS OF HYPERSPACE. V. FIELD OF HYPERDOUBLE QUATERNIONS

The quaternion field of hypercomplex structures of Hamilton-Gibbs is investigational with different calibrations applied to scalar and vectorial part of potential. It is shown that when affecting an immobile local area of the external field characterized by a zero scalar part, one or another fields related to different behavior of vectorial potential can be observed. For example, absence of substantive gradient of the quaternion field results in Lorenz calibration imposed on potentials and appearance of the Maxwell electromagnetic field. Relation of the features of quaternion differential calculation to physical descriptions for the hyperanalytical density of the energy of quaternion field is found. It is established that the product of two hyperanalytical quaternions is not described by a hyperanalytical function, if the defect of quaternion derivative is distinct from zero. It is shown that beside standard forces (e.g., Lorenz force), additional forces affect a «charge» in the quaternion field.

Keywords: local area, quaternion, hyperanalyticity, density of distribution of «charges», density of «current», scalar and vectorial potentials