

<https://doi.org/10.15407/ufm.19.04.379>

PACS numbers: 05.45.Df, 05.70.Ln, 46.35.+z, 62.20.F-, 62.20.fq, 62.30.+d, 81.40.Lm, 83.50.-v, 83.60.-a

**Л.Б. ЗУЕВ, С.А. БАРАННИКОВА, А.Г. ЛУНЕВ**

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,  
просп. Академический, 2/4; 634055 Томск, Россия

## **УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ**

Рассматривается основная характеристика развития локализованного пластического течения, — упругопластический инвариант деформации, — на примере деформации девятнадцати различных металлов. Показано, что распределение экспериментально получаемых значений инварианта подчиняется нормальному закону распределения. Рассматривается природа инварианта и её следствия, которые описывают наиболее важные закономерности развития локализованного пластического течения. Установлено, что из уравнения инварианта могут быть получены основные характеристики автоволновых процессов развития локализованной пластичности, например, скорость и дисперсия автоволн. Могут быть рассчитаны соотношения между масштабами развития локализованной пластичности, а также зависимость длины автоволны от структурных параметров материала. Установлена связь измеряемой величины инварианта с положением исследуемого металла в Периодической системе элементов (Менделеева).

**Ключевые слова:** металл, деформация, пластичность, структура, локализация, упрочнение, автоволны, дислокации.

### **Введение: автоволны локализации деформации**

Развитию физической теории пластичности только за последние сто лет были посвящены тысячи статей. Тем не менее, эта проблема до сих пор остаётся далёкой от полной ясности. Причина такого положения состоит, прежде всего, в чрезвычайной сложности процессов, лежащих в основе пластического формоизменения, и здесь особенно важна принципиальная нелинейность связи напряжения течения с деформацией даже при умеренных значениях последней. Кроме того, существенна также способность материала «помнить» обо всех испытанных воздействиях, которые испытала деформируемая среда. Такая память обеспечивается за счёт необратимого создания в материале дефектной структуры и субструктуры.

Многие экспериментальные результаты, полученные в последние годы, привели к пониманию того, что, вероятно, наиболее существенной стороной проблемы пластического течения является его склонность к локализации, проявляющаяся на всех этапах процесса [1–6]. При внимательном взгляде на локализацию становится ясно, что это явление переводит первоначально структурно-однородную среду в совокупность чередующихся деформируемых и недеформируемых объёмов, которые при деформации могут двигаться или оставаться неподвижными [1]. Такое расслоение деформируемого материала на активные и пассивные объёмы можно интерпретировать как процесс самоорганизации деформируемой среды [7] или, в соответствии с идеей авторов работы [8], структурообразования в ней при пластическом течении.

Долгое время прогресс в понимании физической природы пластичности определялся, главным образом, теорией дислокаций, в основе которой лежит представление о дискретности специфических подвижных носителей сдвиговой деформации. Однако использование дислокационного подхода даёт хорошие результаты лишь при малых плотностях дислокаций, пока их движение не коррелировано друг с другом, и они образуют хаотический ансамбль слабо взаимодействующих дефектов, как это можно считать при описании микропластичности или расчётах предела текучести. При больших плотностях дефектов, соответствующих конечным деформациям, такое представление несправедливо, а для описания пластичности требуются другие приёмы.

Целью настоящей работы является выявление универсальных закономерностей развитого пластического течения твёрдых тел, которые присущи, в частности, металлам, и не зависят или слабо зависят от их природы и структуры, а также условий и режимов деформирования. В первую очередь, заметим, что в наших работах (например, [1–4]) установлено, что пластическое течение деформируемой среды на всех стадиях деформационного процесса всегда протекает закономерно локализованным образом. Локализация пластического течения реализуется в форме автоволновых процессов, которые спонтанно генерируются деформируемой средой на каждой стадии деформации [1, 4]. Вообще говоря, автоволновые процессы служат стандартными механизмами для реализации эффектов самоорганизации активных сред [9, 10]. Как выяснилось, в случае пластической деформации наблюдаемые картины макролокализации, — паттерны (patterns), — являются проекциями автоволн пластического течения на поверхность образцов [1]. Форма паттернов однозначно определяется действующим на разных стадиях пластического течения законом деформационного упрочнения, то есть зависимостью коэффициента деформационного упрочнения от деформации  $\theta(\epsilon)$ . Введение понятий о

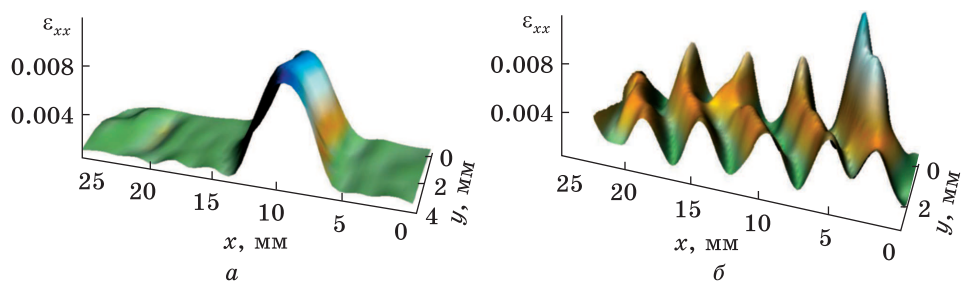


Рис. 1. Паттерны, соответствующие автоволне переключения на площадке текущей (а) и фазовой автоволне на стадии линейного деформационного упрочнения (б), в монокристаллах высокомарганцевистой аустенитной стали с ориентацией оси растяжения [377]

Fig. 1. Patterns corresponding to the switching autowave on the yield plateau (a) and phase autowave on the strain hardening stage (b) for high-manganese austenite steel single crystals with a [377] orientation of tension axe

паттернах, автоволнах локализованного пластического течения и вообще об обязательности локализации пластической деформации оказалось полезным для понимания природы физических процессов, определяющих развитие пластичности [11, 12].

Экспериментально автоволны локализации пластического течения наблюдались с помощью методик фотографической или цифровой спекл-фотографии [1, 13], позволяющих визуализировать паттерны локализованного пластического течения, экспериментально определять поле векторов смещения в деформируемом образце и рассчитывать пространственно-временные распределения компонент тензора пластической дисторсии. Позднее существование автоволновых процессов развития локализованной пластичности независимо было подтверждено другими исследователями [14–17], в том числе с использованием других экспериментальных методик [18, 19].

Представление о том, что локализация пластического течения есть процесс макроскопической самоорганизации структуры деформируемой среды, хорошо согласуется с многочисленными экспериментальными данными, согласно которым при пластической деформации формируются дислокационные ансамбли разной структурной сложности [20, 21], по своему масштабу относящиеся к дислокационной подсистеме деформируемых кристаллов.

На макроскопическом масштабном уровне в металлах и сплавах, находящихся в разных структурных состояниях (моно- и поликристаллы), экспериментально наблюдались автоволны переключения, фазовые автоволны, стационарные диссипативные структуры и коллапс автоволн [4]. Как удалось установить в ходе многочисленных экспериментов, паттерны во время деформации закономерным образом меняют свою конфигурацию в соответствии с действующим при

деформации законом деформационного упрочнения. Так, например, на стадии площадки текучести обычно наблюдается движение полосы Людерса, которую в рамках автоволновой модели рассматривается как автоволна переключения (рис. 1, а) [2, 9]. На стадии линейного деформационного упрочнения, на которой  $\sigma \propto \varepsilon$  и  $\theta = d\sigma/d\varepsilon = \text{const}$ , вдоль оси образца с постоянной скоростью движется эквидистантная совокупность зон локализации пластической деформации. Подобная картина, показанная на рис. 1, б, отвечает фазовой автоволне локализованной пластичности [1, 2].

### **Упругопластический инвариант деформации**

Фазовые автоволны локализованного пластического течения, возникающие на стадиях линейного деформационного упрочнения, представляют собой наиболее интересный объект для изучения процесса автоволновой пластической деформации. Они количественно характеризуются своими длиной  $\lambda \approx (1-2) \cdot 10^{-2}$  м и скоростью распространения  $10^{-5} \leq V_{aw} \leq 10^{-4}$  м/с [1]. Как показано на рис. 2, эти характеристики могут быть получены при построении и обработке так называемых  $X-t$  диаграмм ( $X$  — координата очага локализованной пластичности в образце,  $t$  — время). Такая методика, предложенная в [1], позволяет непосредственно измерить длину  $\lambda$  и период  $T$  фазовой автоволны локализованной пластичности и вычислить скорость её распространения  $V_{aw} = \lambda/T$ . Обычно необходимые характеристики фазовых волн могут быть определены этим методом с достаточной для дальнейшего количественного анализа точностью.

### **Обнаружение упругопластического инварианта деформации**

Из названных величин можно образовать общий кинетический параметр, который характеризует процесс развития локализованного пластического течения  $\lambda V_{aw}$ . Он имеет размерность коэффициента переноса (например, кинематической вязкости или собственно диффузии [22–25]) —  $[L^2T^{-1}]$ . Одновременно для упругих процессов в среде, которые зависят от межплоскостных расстояний  $\chi \approx 10^{-10}$  м и скоростей распространения поперечных упругих волн  $V_t \approx 3 \cdot 10^3$  м/с [26, 27], можно ввести аналогичную характеристику  $\chi V_t$  с той же размерностью. Заметим здесь, что, как показано в [1], величины  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$  являются коэффициентами дифференциальных автоволновых уравнений, описывающих скорость эволюции пластической деформации  $\dot{\varepsilon}$  и скорость релаксации упругого поля  $\dot{\sigma}$ , соответственно, в ходе развития автоволнового процесса деформации.

Рис. 2. Оценка длины автоволны и периода колебаний в ней с помощью  $X-t$  диаграммы по перемещению максимумов локальных удлинений со временем нагружения на стадии линейного деформационного упрочнения в монокристалле хромоникелевой стали с ориентацией оси растяжения [111]

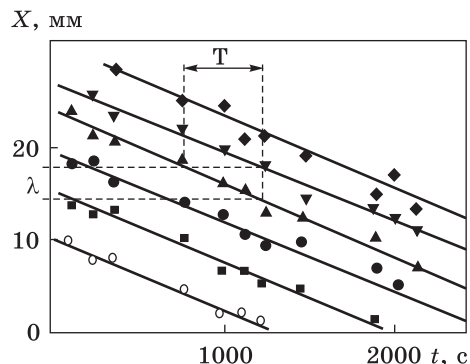


Fig. 2. The estimation of the autowave length and the oscillation period in it using the  $X-t$  diagram *via* the displacement of local elongation maxima with loading time at the stage of linear strain hardening in a single crystal of nickel–chromium steel with an [111] stretching axis orientation

Как было замечено в работах [1–4], отношение этих характеристик образует безразмерное соотношение,

$$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} = \hat{Z} \approx \text{const}, \quad (1)$$

причём, по мере увеличения числа исследованных материалов  $\hat{Z} \rightarrow 1/2$ . Природа соотношения (1), указывающего на взаимосвязь упругих и пластических процессов деформации, а первый взгляд выглядела загадочной, и попытка её объяснения определила цель настоящей работы. Достижение этой цели осуществлялось, во-первых, экспериментальной проверкой общности соотношения (1) и, во-вторых, разработкой его физической интерпретации.

### Экспериментальное обоснование инварианта

Чтобы проверить универсальность отношения (1), были обобщены и статистически проанализированы данные об отношении  $(\lambda V_{aw})/(\chi V_t)$ , полученные нами в разное время [1–4, 11–13] при исследованиях локализованного пластического течения для случаев линейного деформационного упрочнения в моно- и поликристаллах металлов.

Кроме того, был расширен круг исследованных материалов и проанализировано выполнение равенства (1) в разных материалах с разными механизмами деформации. Таким образом, в настоящей работе учтены данные о локализованном пластическом течении при линейном деформационном упрочнении, которые удалось получить для следующих девятнадцати металлов и сплавов на их основе: Mg, Al, Ti, V, Fe ( $\alpha$ -,  $\gamma$ -модификации), Co, Ni, Cu, Zn, Zr, Nb, Mo, Cd, In, Sn, Hf, Ta, Pb. Таким образом, экспериментальными исследованиями были охвачены моно- и поликристаллические материалы, деформи-

рующиеся как дислокационным скольжением, так и в некоторых случаях двойникованием [1]. По этой причине можно ожидать, что полученные данные о величинах отношений  $(\lambda V_{aw})/(\chi V_t)$  окажутся достаточно общими, по крайней мере, для металлов.

На диаграммах деформации  $\sigma(\varepsilon)$  всех исследованных металлов имеются участки линейного деформационного упрочнения, на которых регистрировались фазовые автоволны локализованного пластического течения и определялись их характеристики  $\lambda$  и  $V_{aw}$ . Для всех исследованных материалов были найдены значения  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$ , а также значения отношения  $(\lambda V_{aw})/(\chi V_t)$ , которые сведены в табл. 1. При статистической обработке полученных результатов было найдено среднее значение отношения  $\langle(\lambda V_{aw})/(\chi V_t)\rangle$ , его дисперсия  $\sigma^2 = 0,21$  и вычислена средняя квадратичная ошибка среднего результата  $\pm\sqrt{\sigma^2/n}$  [28].

Как показали вычисления, для всех девятнадцати исследованных металлов отношения  $(\lambda V_{aw})/(\chi V_t)$  отличаются друг от друга незначительно, а их среднее значение составляет  $\langle(\lambda V_{aw})/(\chi V_t)\rangle = \langle Z \rangle = 0,48 \pm 0,1 \approx 1/2$ . Выполнение соотношения (1) для разных металлов и механизмов деформации является указанием на его универсальность. В общем смысле упругопластический инвариант (1) формализует связь двух волновых процессов, играющих важные роли в развитии пластической деформации среды. Так упругие волны, распространяющиеся со скоростью  $V_t$ , ответственны за быстрые процессы распада и рождения концентраторов упругих напряжений в материале, а автоволны с характерной скоростью  $V_{aw}$  контролируют медленное перераспределение очагов локализации пластической деформации в среде.

В общем случае соотношение (1), называемое *упругопластическим инвариантом деформации*, количественно связывает характеристики упругих волн ( $\chi$  и  $V_t$ ) с характеристиками автоволн локализации пластического течения ( $\lambda$  и  $V_{aw}$ ), объединяя тем самым упругую ( $\varepsilon \ll 1$ ) и пластическую ( $\varepsilon \approx 1$ ) деформации, одновременно развиваю-

Таблица 1. Исследованные металлы и значения упругопластического инварианта  
Table 1. The studied metals and values of the elastic-plastic invariant

$\times 10^7$ $\text{м}^2/\text{с}$	Металлы																		
	Cu	Zn	Al	Zr	Ti	V	Nb	$\alpha$ -Fe	$\gamma$ -Fe	Ni	Co	Mo	Sn	Mg	Cd	In	Pb	Ta	Hf
$\lambda V_{aw}$	3,6	3,7	7,9	3,7	2,5	2,8	1,8	2,55	2,2	2,1	3,0	1,2	2,4	9,9	0,9	2,6	3,2	1,1	1,0
$\chi V_t$	4,8	11,9	7,5	11,9	7,9	6,2	5,3	4,7	6,5	6,0	6,0	7,4	5,3	15,8	3,5	2,2	2,0	4,7	4,2
$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t}$	0,75	0,3	1,1	0,3	0,3	0,45	0,33	0,54	0,34	0,35	0,5	0,2	0,65	0,63	0,2	1,2	1,6	0,2	0,24

щиеся в твёрдом теле. Произведение  $\chi V_t$  характеризует перераспределение упругих напряжений со скоростью  $V_t$ , а  $\lambda V_t$  выполняет эту же роль для перестройки паттернов локализованного пластического течения со скоростью  $V_{aw}$ .

### Инвариант и физические характеристики металлов

Интересно проанализировать связь инварианта (1) с другими (кроме  $\chi$  и  $V_t$ ) решётчными характеристиками деформируемой среды. В качестве первого шага можно использовать известное приближение для скорости распространения упругой волны  $V_t^2 \approx G/\rho_0 \approx \chi^2 f_D^2$ , где  $G \approx \chi^{-1} d^2 W/du^2$  — упругий модуль,  $W$  — межчастичный потенциал,  $u$  — малое смещение,  $\rho_0$  — плотность деформируемой среды, а  $f_D$  — дебаевская частота [26]. В этом случае можно записать

$$(\lambda V_{aw}) \approx \hat{Z} \frac{d^2 W/du^2}{\omega_D \chi \rho_0} \approx \hat{Z} \frac{d^2 W/du^2}{\xi_1},$$

где  $\xi_1 = f_D \chi \rho_0 = V_t \rho_0$  является акустическим сопротивлением деформируемой среды [26].

Далее, записанный в форме  $\lambda/V_t \approx \hat{Z} \chi/V_{aw} \approx \hat{Z} \vartheta \approx 10^{-5}$  с инвариант (1) указывает на равенство характерных времён развития упругих и пластических актов деформации  $\vartheta$ . Полагая, что пластическая деформация развивается термически активированным образом [27], запишем, что  $\vartheta \approx f_D^{-1} \exp(U/(k_B T))$ . Если при 300 К  $k_B T \approx 1/40$  эВ, то энергия активации  $U \approx 0,5$  эВ, что характерно для многих актов пластического течения [27].

Наконец, записав правую часть уравнения (1) как  $\hat{Z} \chi V_t = \hat{Z} \chi^2 f_D$  и применив известное соотношение  $k_B \theta_B = h f_D \approx h (V_t/\chi)$ , где  $h$  — посто-

Таблица 2. Оценка величины  $\lambda V_{aw}$  по решётчным характеристикам металлов  
Table 2. Estimation of  $\lambda V_{aw}$  value via the metal lattice characteristics

Металл	$\chi$	$\theta_D$	$(\lambda V_{aw})^{(calc)}$	$(\lambda V_{aw})^{(exp)}$	$\frac{(\lambda V_{aw})^{(calc)}}{(\lambda V_{aw})^{(exp)}}$
	$\times 10^{10}$ М	К	$\times 10^7$ М <sup>2</sup> /с	$\times 10^7$ М <sup>2</sup> /с	
Ni	2,03	375	1,6	2,1	0,8
Cu	2,08	315	1,4	3,6	0,4
Al	2,33	394	2,2	2,6	0,8
Mo	2,22	380	1,9	1,2	1,6
Co	2,18	385	1,9	1,3	1,5
Sn	3,75	170	2,5	2,4	1,0
$\alpha$ -Fe	2,02	420	1,8	2,55	0,7
In	2,72	129	0,95	2,6	0,4
Zn	2,077	234	1,0	3,7	0,3
Cd	2,34	120	0,65	0,9	0,7
Mg	2,45	318	1,9	9,9	0,2

янная Планка, а  $\theta_D$  — дебаевский параметр (дебаевская температура), получим

$$(\lambda V_{aw}) \approx \hat{Z} \chi V_i \approx \hat{Z} \chi^2 \frac{k_B \theta_D}{h} \approx \hat{Z} \frac{k_B}{h} \chi^2 \theta_D(T). \quad (2)$$

Это соотношение позволяет ввести в инвариантное уравнение температурную зависимость характеристик локализованного пластического течения ( $\lambda$ ,  $V_{aw}$  или их произведения  $\lambda V_{aw}$ ) через известную температурную зависимость дебаевского параметра  $\theta_D(T)$  [26]. Уравнение (2) качественно правильно описывает экспериментально наблюдаемый температурный ход автоволновых характеристик (см. табл. 2) [1].

Таким образом, общность упругопластического инварианта деформации (1) для разных механизмов деформации металлов и его связь с решёточными характеристиками позволяют рассматривать его далее в качестве базового соотношения при построении модели развития локализованного пластического течения.

## Распределение значений инварианта

Для интерпретации природы соотношения (1) принципиален вопрос о законе распределения экспериментально полученной выборки величин  $\hat{Z}$  в ряду исследованных материалов. Для его разрешения, как обычно, в качестве гипотезы было принято, что величины  $\hat{Z}$  распределены по нормальному закону, то есть, корреляции их хода в экспериментально установленных пределах с поведением какой-либо характеристики материала нет. Гипотеза о нормальности распределения проверялась графическим методом [28], для чего данные, приведённые в табл. 1, были расположены в виде вариационного ряда  $\hat{Z}_1 < \hat{Z}_2 < \hat{Z}_3 < \dots < \hat{Z}_i < \dots < \hat{Z}_{n-1} < \hat{Z}_{n=19}$ . Члены этого ряда в ходе статистического анализа служат аргументами для отыскания табличных численных значений квантилей нормального распределения  $-\infty < Q < \infty$ , соответствующих величинам  $i/(n + 1)$ . Распределение является нормальным, если квантили  $Q$  меняются линейно при изменении  $\hat{Z}$  [28].

Как следует из рис. 3, а, зависимость  $Q(\hat{Z})$  в координатах  $Q-\hat{Z}$ , действительно имеет линейный характер, который, однако, нарушается для индия и свинца ( $\hat{Z}_{In} = 0,96$  и  $\hat{Z}_{Pb} = 1,3$ ). Для проверки возможности отнести эти значения к промахам и исключить их из дальнейших расчётов был применён статистический анализ с использованием критериев [28]

$$v_n = \frac{|\langle \hat{Z} \rangle - \hat{Z}_{In}|}{\sqrt{\sigma^2}} = 1,92 \quad \text{и} \quad v_n = \frac{|\langle \hat{Z} \rangle - \hat{Z}_{Pb}|}{\sqrt{\sigma^2}} = 3,28; \quad (3)$$

здесь  $\hat{Z}_{In} = 0,96$  и  $\hat{Z}_{Pb} = 1,3$  — максимальные для исследуемой выборки значения. На возможность исключения данных из дальнейшего анализа указывает невыполнение неравенства  $v_n < v_{max}$ . Из статисти-



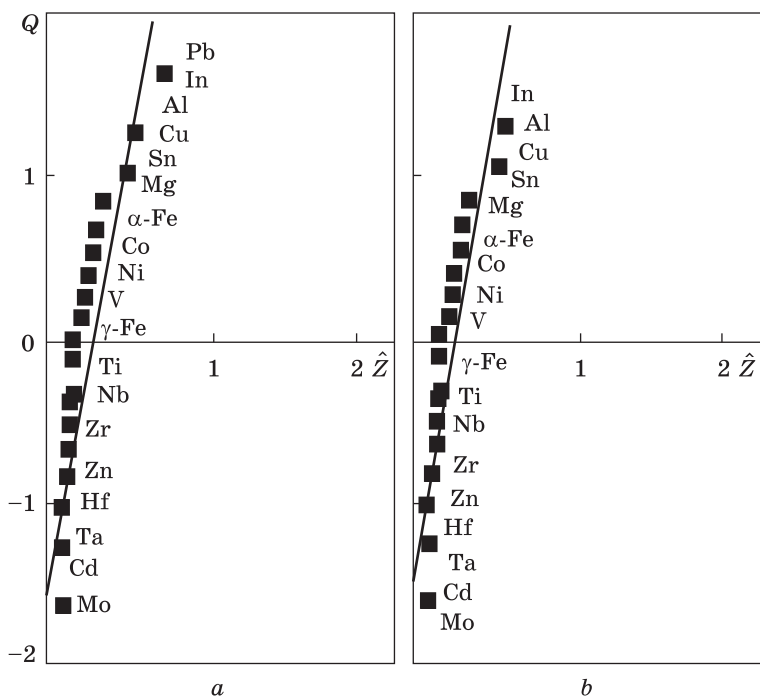


Рис. 3. Зависимость  $Q(\hat{Z})$  для всех данных (а) и после исключения промаха для Pb (б); коэффициент корреляции величин  $Q$  и  $\hat{Z}$  составляет  $\cong 0,98$

Fig. 3. The  $Q(\hat{Z})$  dependences for all data (a) and after excluding of error for Pb (b); correlation coefficient for  $Q$  and  $\hat{Z}$  values is  $\cong 0.98$

ческих таблиц, приведённых в [28], следует, что лишь для свинца  $v_n < v_{\max} = 3,259$ , так что только значение  $\hat{Z}_{Pb} = 1,3$  можно исключить из выборки, как показано на рис. 3, б.

После исключения промаха  $\hat{Z}_{Pb} = 1,3$  новое среднее значение инварианта составит  $\langle \hat{Z} \rangle_{n=18} = 0,43 \pm 0,1$  при коэффициенте корреляции величин  $Q$  и  $\hat{Z} \sim 0,98 \approx 1$ . По-видимому, с учётом достигаемой в экспериментах точности, вполне допустимо принять, что  $\langle \hat{Z} \rangle_{n=19} \approx \langle \hat{Z} \rangle_{n=18} \approx \langle \hat{Z} \rangle \approx 1/2$ . Таким образом, проведённый анализ подтвердил, что колебания величины упругопластического инварианта в пределах  $0,2 \leq \hat{Z} \leq 1,3$  вызваны только экспериментальными погрешностями [1]. Таким образом, упругопластический инвариант деформации приобретает качество правила, универсально пригодного для описания и прогнозирования процессов пластического течения металлов независимо от их природы и действующих микромеханизмов пластичности.

Как было показано в работах [4, 12, 29, 30], упругопластический инвариант деформации может рассматриваться как основное уравнение автоволновой теории пластичности твёрдых тел. В этом качестве он имеет ряд следствий, которые объясняют закономерности

развития локализованного пластического течения и устанавливают связь автоволновой теории пластичности с теорией дислокаций. Кроме того, поскольку дебаевский параметр зависит от температуры  $\theta_D(T)$  (см. (2)) [26], в принципе, может быть использована для предсказания вида температурной зависимости характеристики пластичности ( $\lambda V_{aw}$ ).

### Упругопластический инвариант и периодическая система элементов

Как было сказано выше, экспериментальные исследования локализации пластического течения были выполнены на девятнадцати разных металлах, расположенных в 3-м, 4-м, 5-м и 6-м периодах периодической системы элементов и приведённых в табл. 3. Известно, что номер периода совпадает с числом электронных оболочек, расположенных в нём атомов, а номер группы определяется числом валентных электронов [31, 32]. Это создаёт возможность поиска корреляций между электронной структурой исследованных металлов и величиной упругопластического инварианта  $(\lambda V_{aw})/(\chi V_t) = \hat{Z}$  или входящих в него величин  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$ .

Анализ массива данных, полученных для стадий линейного деформационного упрочнения для этих металлов, позволил прийти к выводу о том, что величины  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$  осциллируют относительно среднего значения по мере роста атомного номера элемента  $Z$  в пределах  $12_{Mg} \leq Z \leq 82_{Pb}$ , как показано на рис. 4. Эти осцилляции коррелируют с аналогичным поведением при росте  $Z$ -ряда других независимо

Таблица 3. Упругопластический инвариант деформации для металлов, принадлежащих периодам 3–6 периодической системы элементов

Table 3. The elastic-plastic strain invariant for metals belonging to 3–6 periods of the periodic table

Период	Ряд	Металл								$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} = \hat{Z}$	
		Группа периодической системы элементов									
		I	II	III	IV	V	VI	VIII			
3	III		$_{12}Mg$	$_{13}Al$						$\langle \hat{Z} \rangle_3 = 0,57 \pm 0,63$	
4	IV				$_{22}Ti$	$_{23}V$		$_{26}Fe$	$_{27}Co$	$_{28}Ni$	$\langle \hat{Z} \rangle_4 = 0,50 \pm 0,15$
	V	$_{29}Cu$	$_{30}Zn$								
5	VI				$_{40}Zr$	$_{41}Nb$	$_{42}Mo$				$\langle \hat{Z} \rangle_5 = 0,48 \pm 0,15$
	VII		$_{48}Cd$	$_{49}In$	$_{50}Sn$						
6	VIII				$_{72}Hf$	$_{73}Ta$					$\langle \hat{Z} \rangle_6 = 0,69 \pm 0,45$
	IX				$_{82}Pb$						
$m$ [32]		1	2	3	4	5	6	8	9	10	

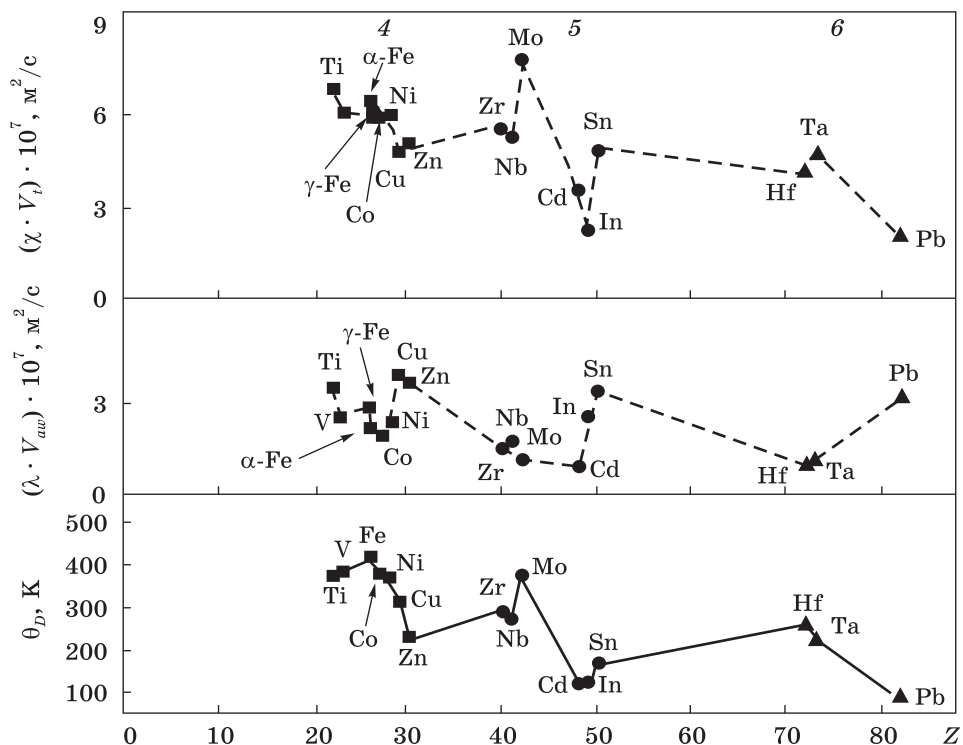


Рис. 4. Периодичность зависимостей величин  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$  (■), а также температуры Дебая  $\theta_D$  (●) от атомного номера элементов  $Z$  (4, 5 и 6 — номера периодов)

Fig. 4. The periodicity of dependences of the  $\lambda V_{aw}$  and  $\chi V_t$  values (■) as well as  $\theta_D$  Debye temperature (●) on the atomic number of  $Z$  elements (4, 5, and 6 are the period numbers)

определяемых решёточных характеристик, таких, например, как атомный объём, межатомное расстояние, сжимаемость, коэффициент термического расширения, плотность, температура плавления, упругие модули, потенциал ионизации и некоторые другие [31]. В нашем случае эта закономерность проиллюстрирована показанными на рис. 4 графиками зависимостей  $\lambda V_{aw}-Z$ ,  $\chi V_t-Z$ , а также для сравнения  $\theta_D-Z$  для характеристического параметра Дебая  $\theta_D$  [26].

Симбатный ход зависимостей  $\lambda V_{aw}(Z)$  и  $\chi V_t(Z)$  с ростом атомного номера  $Z$  прямо указывает на связь упругих и пластических свойств деформируемой среды, контролируемых произведениями  $\chi V_t$  и  $\lambda V_{aw}$ , с этой величиной. Оценённые на основании проведённых экспериментов усреднённые значения инварианта  $\hat{Z} = (\lambda V_{aw})/(\chi V_t)$  для каждого из периодов оказались несколько отличными друг от друга, как следует из правого столбца табл. 3.

Для ответа на вопрос о статистической значимости или незначимости различия величин  $\langle \hat{Z} \rangle$  производилось попарное сравнение сред-

них значений инварианта, полученных для 3-го, 4-го, 5-го и 6-го периодов Периодической системы с помощью вычисления статистического  $t$ -критерия [28]

$$t = \frac{\langle \hat{Z} \rangle_i - \langle \hat{Z} \rangle_j}{\sqrt{s^2}} \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_i + n_j}}. \quad (4)$$

Необходимая для расчёта  $t$ -критерия обобщённая дисперсия  $s^2$  для каждой пары значений  $\langle \hat{Z} \rangle_i$  и  $\langle \hat{Z} \rangle_j$  вычислялась по формуле [28]

$$s^2 = \frac{(n_i - 1)s_i^2 + (n_j - 1)s_j^2}{n_i + n_j - 2}. \quad (5)$$

В соотношениях (2) и (3)  $i$  и  $j$  — номера сравниваемых периодов, а  $n$  — числа измерений в каждом из них. Значения частных дисперсий  $s_i^2$  и  $s_j^2$  для каждого периода вычислялись стандартным образом по формуле [28]

$$s_i^2 = \frac{\sum (\hat{Z} - \langle \hat{Z} \rangle_i)^2}{n - 1}. \quad (6)$$

Статистический анализ с использованием  $t$ -критерия (4) для сравниваемых пар показал, что различие величин  $\langle \hat{Z} \rangle_3$ ,  $\langle \hat{Z} \rangle_4$ ,  $\langle \hat{Z} \rangle_5$  и  $\langle \hat{Z} \rangle_6$  статистически незначимо, то есть, с вероятностью  $\cong 0,85$ – $0,9$  они принадлежат одной генеральной совокупности [28]. Усредняя на этом основании величины  $\hat{Z}$  по всем исследованным металлам, мы приходим к приведённой выше оценке  $\langle \hat{Z} \rangle = 0,48 \pm 0,1 \approx 1/2$ . Таким образом, величина упругопластического инварианта не зависит от номера периода, в котором исследуемый металл располагается в периодической системе элементов.

Важен и интересен вопрос о поведении характеризующего пространство автоволн локализованной пластичности произведения  $\lambda V_{aw}$  внутри периодов. Для ответа на него проанализируем зависимость  $\lambda V_{aw}$  от числа электронов, приходящихся на элементарную ячейку металла  $m$ . Для большинства металлов, кроме переходных,  $m$  совпадает с номером группы в периодической системе элементов [32]. Указания на существование подобной зависимости были получены ранее [33].

Статистически значимый ответ на этот вопрос возможен при использовании данных только для 4-го и 5-го периодов, для которых экспериментально изучено поведение наибольшего числа металлов. Оказалось, что в пределах 4-го (Ti, V,  $\alpha$ -Fe,  $\gamma$ -Fe, Co, Ni, Cu, Zn) и 5-го (Zr, Nb, Mo, Cd, In, Sn) периодов Периодической системы элементов выполняется зависимость  $\ln(\lambda V_{aw}) \propto m^{-1}$ , или  $\lambda V_{aw} \propto \exp(m^*/m)$ , где  $m^* = \text{const}$ . Коэффициенты корреляции величин  $\ln(\lambda V_{aw})$  и  $1/m$ , составляют  $\xi_4 = 0,76$  и  $\xi_5 = -0,32$  (слабая корреляция) для 4-го и 5-го периодов, соответственно. Графики для названных периодов показа-

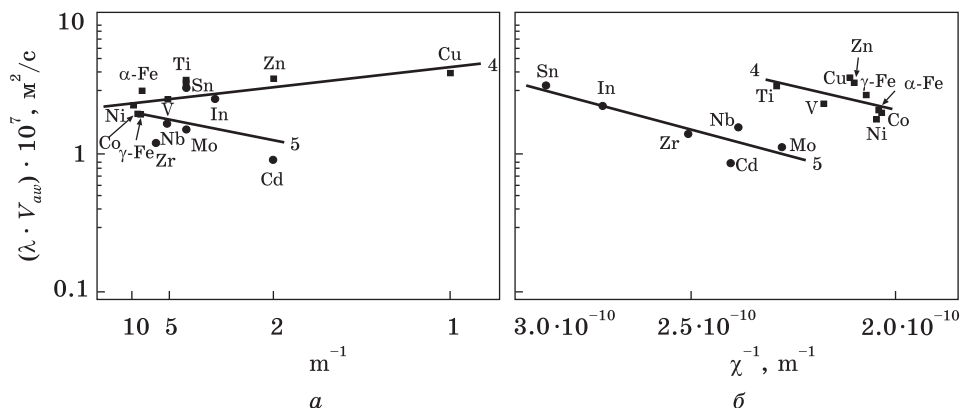


Рис. 5. Зависимости величины  $\lambda V_{aw}$  для 4 и 5-го периодов от числа электронов, приходящихся на элементарную ячейку металла  $m$  (а) и от межплоскостного расстояния  $\chi$  (б)

Fig. 5. The dependences of  $\lambda V_{aw}$  value for the 4-th and 5-th periods on electron number per elementary cell of the metal  $m$  (а) and on the interplanar spacing  $\chi$  (б)

ны на рис. 5, а. Из них следует, что в отличие от данных работы [33] в настоящем исследовании удалось наблюдать разделение подобной зависимости по периодам системы элементов, что ранее не отмечалось.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при пластическом течении металлов упругопластический инвариант деформации  $\hat{Z}$  не зависит от положения элемента в периодической системе элементов, в то время как характеристики  $\lambda V_{aw}$  на стадии линейного деформационного упрочнения коррелируют с характеристиками электронной структуры соответствующих металлов. Корреляция проявляется как изменение макроскопических характеристик распространения автоволны локализованной пластичности на стадии линейного деформационного упрочнения в зависимости от числа валентных электронов. Ранее эта зависимость была объяснена вкладом электронного газа в торможение дислокаций [1, 33], поскольку величина  $m$  связана с плотностью и вязкостью электронного газа. Полученные данные прямо указывают, что механизм вклада электронного газа в торможение дислокаций является более сложным, чем это предусматривается традиционными теориями этого эффекта [34].

В то же время, оказалось, что для металлов 4 и 5-го периодов величина  $\ln(\lambda V_{aw})$  коррелирует с величиной, обратной межплоскостному расстоянию, то есть,  $\chi^{-1}$ , как это следует из рис. 5, б. Очевидно, что в этом случае  $\ln(\lambda V_{aw}) \propto \chi^{-1}$  или  $\ln(\lambda V_{aw}) \propto \exp(\chi^*/\chi)$ , а коэффициенты корреляции величин  $\ln(\lambda V_{aw})$  и  $\chi^{-1}$  составляют  $\xi_4 = -0,53$  и  $\xi_5 = -0,89$  соответственно. Что касается величины  $\chi^*$ , то она близка к межплоскостным расстояниям, отвечающим максимальной интен-

сивности рентгеновских рефлексов, для калия и рубидия, с которых начинаются 4-й и 5-й периоды соответственно: для 4-го периода  $3,64 \cdot 10^{-10} = \chi^* \approx \chi_K = 3,75 \cdot 10^{-10}$  м, а для 5-го —  $4,52 \cdot 10^{-10} = \chi^* \approx \chi_{Rb} = 4,33 \cdot 10^{-10}$  м [35]. Ясно, что установленная корреляция может служить основой для прогнозирования закономерностей пластического течения металлов по их решёточным характеристикам.

Приведённые рассуждения наводят на мысль о том, что именно решёточные свойства, связанные с характеристиками развития локализованной пластичности, определяют пластическую деформируемость твёрдых тел. Поэтому вопрос о природе упругопластического инварианта особенно важен.

## Природа упругопластического инварианта

Рассмотрим теперь два варианта интерпретации упругопластического инварианта деформации. Первый из них основан на том, что инвариант (1) может быть представлен как приблизительное равенство  $\lambda V_{av} \approx \chi V_t$ . Это может быть использовано для простого объяснения природы соотношения (1).

Во втором варианте объяснения учтём развиваемую в последние годы точку зрения [8], согласно которой локализация пластической деформации есть результат самоорганизации (структурообразования) в активной деформируемой среде, состоящей из нелинейных элементов [36, 37]. Как известно, признаком наличия процессов самоорганизации в открытой термодинамической системе, какой является деформируемый образец, служит уменьшение её энтропии [38]. В работе [39] показано, что такое условие реализуется при формировании автоволн локализованного пластического течения. Поэтому использование энтропии для выяснения природы процессов локализации пластической деформации кажется обоснованным и перспективным.

## Упругопластический инвариант как следствие принципа Онзагера

В основе пластического течения твёрдых тел лежит согласованная пространственно-временная трансформация полей напряжений  $\sigma(x, y, t)$  и пластических деформаций  $\varepsilon(x, y, t)$  [1]. При формоизменении релаксация упругих напряжений вызывает деформацию, а изменение деформации в свою очередь инициирует перестройку поля напряжений. Кинетика этих взаимосвязанных процессов контролируется входящими в инвариант (1) скоростью  $V_t$  для упругого поля и скоростью  $V_{av}$  для поля пластических деформаций.

Полагая теперь, что процессы трансформации деформационных полей имеют в основе смещения частиц среды, рассмотрим связь

упругих (обратимых) и пластических (необратимых) смещений при малом отклонении деформируемой системы от равновесия, вблизи которого скорости смещений при трансформациях полей деформаций и напряжений с точностью до малых первого порядка можно считать линейными по градиентам пластических и упругих деформаций. В таком случае по аналогии с [40] для скоростей можно принять, что  $\dot{u}_{pl}^{(p)} \approx D_{\varepsilon\varepsilon} \nabla \varepsilon_{pl}$  и  $\dot{u}_{el}^{(p)} \approx D_{\sigma\sigma} \nabla \varepsilon_{el}$ . Легко видеть, что в этих уравнениях выполняется правило размерностей, а именно,  $[LT^{-1}] = [(L^2T^{-1})L^{-1}]$ .

Из-за существенной нелинейности связи деформации и напряжения, следующей из формы кривой течения  $\sigma(\varepsilon)$ , необходимо учесть также возникновение дополнительных скоростей  $\dot{u}_{el}^{(ad)} \approx D_{\varepsilon\sigma} \nabla \varepsilon_{pl}$  и  $\dot{u}_{pl}^{(ad)} \approx D_{\sigma\varepsilon} \nabla \varepsilon_{el}$ . В результате система уравнений для пластической и упругой составляющей скоростей смещений приобретает по аналогии с [40] вид

$$\begin{cases} \dot{u}_{pl} = D_{\varepsilon\varepsilon} \nabla \varepsilon + D_{\varepsilon\sigma} \nabla \varepsilon_{el}, \\ \dot{u}_{el} = D_{\sigma\varepsilon} \nabla \varepsilon_{el} + D_{\sigma\sigma} \nabla \varepsilon. \end{cases} \quad (7)$$

Пусть коэффициенты уравнений этой системы, описывающей все связи между упругими и пластическими смещениями, образуют матрицу

$$D = \begin{pmatrix} D_{\varepsilon\varepsilon} & D_{\varepsilon\sigma} \\ D_{\sigma\varepsilon} & D_{\sigma\sigma} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

в которой, согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера [40], недиагональные компоненты должны быть равны, то есть,  $D_{\sigma\varepsilon} = D_{\varepsilon\sigma}$ . Из соображений размерности разумно принять, что  $D_{\varepsilon\sigma} \equiv \lambda V_{aw}$ , а  $D_{\sigma\varepsilon} \equiv \chi V_t$ . В этом случае природа инварианта (1) сразу же объясняется условием  $D_{\sigma\varepsilon} = D_{\varepsilon\sigma}$ . Диагональные компоненты матрицы (8)  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $D_{\sigma\sigma}$  служат коэффициентами автоволновых уравнений локализованной пластичности [1, 4] и не обязаны быть равными. Так, в [1] было показано, что  $D_{\varepsilon\varepsilon} \ll D_{\sigma\sigma}$ . По этой причине удобно обсуждать поведение недиагональных и диагональных элементов матрицы (8) по отдельности.

### Масштабный и кинетический факторы

В уравнении (1) длины  $\chi$  и  $\lambda \gg \chi$  суть пространственные масштабы трансформации полей упругой и пластической деформации, а скорости  $V_t$  и  $V_{aw} \ll V_t$  характеризуют кинетику такой трансформации. При записи уравнения инварианта (1) в форме

$$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} = \frac{\lambda}{\chi} \frac{V_{aw}}{V_t} = \frac{\lambda/\chi}{V_t/V_{aw}} = \hat{Z} < 1, \quad (9)$$

последний преобразуется в отношение масштабного  $\lambda/\chi \gg 1$  и кинетического  $V_t/V_{aw} \gg 1$  факторов деформируемой среды. Первый можно интерпретировать как число возможных мест зарождения автоволны

локализованной пластической деформации. Второй характеризует выбор деформируемой системой скорости автоволны из спектра её возможных значений твёрдом теле  $0 \leq V_{aw} \leq V_t$ . Тогда отношения  $\lambda/\chi$  и  $V_t/V_{aw}$  имеет смысл рассматривать как термодинамические вероятности, характеризующие процессы перераспределения упругих и пластических смещений в деформируемой среде [38, 40]. Это предположение делает возможной численную оценку инварианта  $\hat{Z}$  по уравнению (9) путём расчёта изменения энтропии системы при самопроизвольном формировании автоволн локализованного пластического течения. В силу аддитивности энтропии запишем её общее изменение при генерации автоволны как сумму масштабного и кинетического вкладов

$$\Delta S = \Delta S_{scale} + \Delta S_{kin} < 0. \quad (10)$$

Условие  $\Delta S < 0$  отражает уменьшение энтропии при формировании автоволн локализации пластического течения. Для его выполнения необходимо, чтобы хотя бы одно слагаемое в уравнении (10) было отрицательным.

Применив формулу Больцмана для масштабного вклада, имеем

$$\Delta S_{scale} = k_B \ln \frac{\lambda}{\chi} > 0, \quad (11)$$

так как  $\lambda/\chi \gg 1$ ; здесь  $k_B$  — постоянная Больцмана. Полагая, как сказано выше, что кинетический вклад отрицателен, получаем

$$\Delta S_{kin} = -k_B \ln \frac{V_t}{V_{aw}} = k_B \ln \frac{V_{aw}}{V_t} < 0. \quad (12)$$

Знаки величин  $\Delta S_{scale} > 0$  и  $\Delta S_{kin} < 0$  в уравнениях (11) и (12) подчёркивают различие вкладов масштабного и кинетического факторов в развитие локализованной пластической деформации. В общем, из уравнений (10)–(12) следует

$$\ln \frac{\lambda}{\chi} - \ln \frac{V_t}{V_{aw}} = \Delta S/k_B < 0 \quad (13)$$

и, соответственно

$$\hat{Z} = \frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} = \frac{\lambda/\chi}{V_t/V_{aw}} = \exp(\Delta S/k_B). \quad (14)$$

Окончательно,

$$\hat{Z} = \exp(\Delta S/k_B) \approx 1/2, \quad (15)$$

откуда  $\Delta S = k_B \ln(1/2) \approx -0,7k_B$  в расчёте на элементарный релаксационный акт, ответственный за пластическое течение металла [41].

### Общий взгляд на природу упругопластического инварианта

Оценки величины упругопластического инварианта деформации для разных металлов и действующих механизмов пластической деформации показали, что он справедлив на стадии линейного деформацион-



ного упрочнения. Иначе говоря, его можно рассматривать как общую закономерность процесса деформации металлов в таких условиях. Этот взгляд на природу упругопластического инварианта согласуется с представлением о том, что пластическая деформация является процессом самоорганизации дефектной структуры, деформируемой среды, который сопровождается понижением её энтропии. Самоорганизация проявляется как возникновение деформационной (дефектной) структуры деформируемой среды в ходе процесса пластического течения.

### **Упругопластический инвариант и автоволновая пластичность**

Задача о генерации автоволн локализованной пластичности в деформируемой среде может рассматриваться как часть общей проблематики самоорганизации открытых систем физической [7, 43], химической [43] или биологической [45] природы. При обсуждении этих вопросов Кадомцев [46] предложил плодотворную концепцию, согласно которой: *«В сложных и системах со сложно организованной структурой возможно расслоение единой системы на две тесно связанные друг с другом подсистемы. Одну из них мы можем называть динамической или силовой, а вторую можно назвать информационной или управляющей подсистемой. Те структурные элементы, которые могут сильно влиять на динамику системы сравнительно малыми возмущениями (сигналами), естественно выделить в структуру управления. Таким образом, сложные системы сами собой могут расслаиваться на два уровня иерархии»*. Эта концепция, лежащая в русле современных представлений о самоорганизации активных сред [47], перспективна, в том числе для объяснения автоволновой природы пластического течения.

Развиваемая в наших работах [1, 12, 29, 30, 48–50] модель локализованной пластичности базируется на учёте конкуренции автокаталитического и демпфирующего факторов [44, 46]. Поэтому при введении модели, в первую очередь, следует определить специфику сигнальной и динамической подсистем в пластически деформируемой реальной среде. Для этой цели перечислим практически очевидные обязательные требования к этим подсистемам:

(1) структура подсистемы должны определяться явлениями, контролирующими процесс пластического течения;

(2) между подсистемами должно существовать физическое взаимодействие такой мощности, чтобы явления в одной подсистеме вызвали отклик в другой;

(3) механизм причинной взаимосвязи между явлениями, протекающими в каждой подсистеме, должен быть строго определён и должен допускать возможность проверки и количественной оценки в условиях пластического течения.

Перечисленные выше требования удалось выполнить в рамках предложенной в наших работах [1, 12, 29, 30, 48–50] *двухкомпонентной модели развития локализованной пластичности*, которая использует представления о взаимодействии упругой и пластической компонент деформации. Фактически модель оперирует факторами  $\lambda V_{av}$  и  $\chi V_t$ , отношение которых составляет упругопластический инвариант. Кинетику деформационного акта в этой модели определяет мозаика деформированных областей в деформируемой среде, отдельные элементы которой напряжены в различной степени. Мозаика деформационного поля сопряжена с системой концентраторов напряжений разного масштаба, которые могут находиться в ждущем или активном (релаксирующем) состояниях. Релаксация (распад) концентратора в такой модели рассматривается как акт пластического течения.

В рамках этой модели подсистемы определены таким образом:

(1) *динамическая* подсистема есть совокупность дислокационных сдвигов, двойников и других элементарных актов пластической деформации, непосредственно вызывающих пластическое формоизменение [20, 21, 44];

(2) *сигнальная* подсистема есть совокупность упругих импульсов акустической эмиссии, порождаемых актами пластичности [51] и затем инициирующих такие акты в других объёмах деформируемого тела [52].

Конкретный сценарий функционирования двухкомпонентной модели представляется следующим образом. Каждый релаксационный акт в динамической подсистеме сопровождается эмиссией акустического импульса. Такой импульс поглощается другим концентратором и инициирует его релаксацию, что равносильно событию в динамической подсистеме. Состояние деформируемой среды характерно тем, что в системе концентраторов упругих напряжений блуждают случайные упругие импульсы, наложение которых на статические поля концентраторов повышает вероятность реализации релаксационных актов пластической деформации. Конкретизируя природу таких событий, можно заключить, что двухкомпонентная модель объединяет эффекты акустоэмиссии и акустопластичности, изучаемые обычно по отдельности.

В общем случае, реализация такого механизма взаимодействия становится возможной, благодаря нелинейности деформируемой среды. Нелинейность предполагает возможность резонансной связи между факторами, определяющими поведение среды [37, 53] за счёт соответствующих гармоник.

Если при распаде концентратора напряжений генерируется акустический сигнал, содержащий гармонику определённой частоты, то в спектре принимающего концентратора аналогичной структуры

имеется возможность поглощения такой гармоникой с соответствующим усилением эффекта.

Таким образом, смысл упругопластического инварианта деформации состоит в том, что в ходе процесса пластического течения пластическая и упругая деформации не только связаны формально через кривую пластического течения  $\sigma(\varepsilon)$ , но и причинно определяют развитие друг друга. Знание природы такой связи существенно для построения модели развития локализованного пластического течения и понимания его закономерностей, поскольку многие из них могут рассматриваться как следствия упругопластического инварианта деформации. При таких условиях упругопластический инвариант начинает играть роль основного уравнения автоволновой механики развития локализованной на макроскопическом уровне пластичности металлов [1, 4].

### Следствия из упругопластического инварианта

В пользу вывода о важной роли упругопластического инварианта деформации в описании этого явления говорит то обстоятельство, что из уравнения инварианта (1) можно получить следствия [1, 4, 11, 12, 29, 30], которые не только позволяют понять природу многих важных закономерностей развития локализованной пластичности, но и описывают их количественно. Проанализируем далее выводы соответствующих соотношений с этой точки зрения.

### Скорость распространения автоволн локализованной пластичности

Если уравнение (1) продифференцировать по деформации  $\varepsilon$

$$\lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon} + V_{aw} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \hat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \hat{Z}V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon}. \quad (16)$$

и записать результат относительно  $V_{aw}$ , то получим

$$V_{aw} = \left(\frac{d\lambda}{d\varepsilon}\right)^{-1} \left(\hat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \hat{Z}V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon} - \lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon}\right). \quad (17)$$

Межплоскостное расстояние  $\chi$  не зависит от пластической деформации, так что  $\hat{Z}V_t d\chi/d\varepsilon = 0$ , и

$$V_{aw} = \hat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\lambda} - \lambda \frac{dV_{aw}}{d\lambda}. \quad (18)$$

Преобразование уравнения (18) приводит к соотношению

$$V_{aw} = \hat{Z}\chi \frac{dV_t}{d\lambda} - \chi \frac{dV_{aw}}{d\lambda} \frac{\lambda}{\chi} \approx V_0 + \frac{\Xi}{\theta}, \quad (19)$$

аналогичному ранее экспериментально полученной зависимости  $V_{aw} \propto$

$\propto \theta^{-1}$  [1], если согласно [42], выразить коэффициент деформационного упрочнения как отношение структурных параметров  $\lambda$  и  $\chi \ll \lambda$ , то есть, как  $\theta \approx \chi/\lambda$ .

### Дисперсия автоволн локализованной пластичности

Запишем уравнение инварианта (1) в форме

$$V_{aw} = \frac{\Theta}{\lambda} = \frac{\Theta}{2\pi} k, \quad (20)$$

где  $\Theta = \hat{Z}\chi V_t$ . Если  $V_{aw} = d\lambda/dT = d\omega/dk$ , то  $d\omega = (\Theta/2\pi) k dk$ . Тогда

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \frac{\Theta}{2\pi} \int_0^{k-k_0} k dk, \quad (21)$$

и закон дисперсии автоволн локализованного пластического течения приобретает квадратичную форму

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{\Theta}{4\pi} (k - k_0)^2, \quad (22)$$

где  $\Theta/4\pi \equiv \alpha$  — величина, использованная в экспериментально установленном уравнении дисперсии автоволн локализованной пластичности [54].

В этом случае возможны также количественные оценки соответствующих коэффициентов. Так, придав уравнению (22) форму

$$V_{aw} \approx \hat{Z}\chi^2 \frac{k_B \theta_D}{h} \frac{1}{\lambda} \approx \hat{Z}\chi^2 \frac{k_B \theta_D}{h} k \approx \zeta k, \quad (23)$$

можно вычислить коэффициент  $\zeta = \hat{Z}\chi^2 k_B \theta_D / h \approx \hat{Z}\chi^2 \omega_D$ , используя величины  $\chi$  и значения дебаевского параметра  $\theta_D^{(Fe)} = 420$  К и  $\theta_D^{(Al)} = 394$  К [26], причём,  $\zeta^{(Fe)} \approx 3,7 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с, а  $\zeta^{(Al)} \approx 4,45 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. Это удовлетворительно согласуется с приведёнными в книге [1] значениями  $\zeta^{(Fe)} = (1,0 \pm 0,08) \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с и  $\zeta^{(Al)} = (12,9 \pm 0,15) \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с, оценёнными из экспериментальных данных о зависимости  $V_{aw}(k)$ .

### Влияние структуры деформируемого материала

Запишем уравнение инварианта (1) в форме

$$\lambda = \hat{Z}\chi \frac{V_t}{V_{aw}}. \quad (24)$$

Так как скорости  $V_t$  и  $V_{aw}$  зависят от размера зерна  $\delta$  [55], то дифференцирование соотношения (24) по  $\delta$  даёт

$$\frac{d\lambda}{d\delta} = \hat{Z}\chi \frac{d}{d\delta} \left( \frac{V_t}{V_{aw}} \right) = \hat{Z}\chi \left( \frac{V_{aw} dV_t/d\delta - V_t dV_{aw}/d\delta}{V_{aw}^2} \right), \quad (25)$$

откуда следует

$$d\lambda = \hat{Z}\chi \left( \frac{dV_t}{d\delta} \frac{1}{V_{aw}} - V_t \frac{dV_{aw}}{d\delta} \frac{1}{V_{aw}^2} \right) d\delta = (a_1\lambda - a_2\lambda^2) d\delta, \quad (26)$$

где  $a_1 = \frac{1}{V_t} \frac{dV_t}{d\delta} = \frac{d \ln V_t}{d\delta}$  и  $a_2 = \frac{1}{\hat{Z}\chi V_t} \frac{dV_{aw}}{d\delta}$ , поскольку  $V_{aw} = \hat{Z}\chi V_t \frac{1}{\lambda}$ . Решением дифференциального уравнения (26) есть логистическая функция [56]

$$\lambda(\delta) = \lambda_0 + \frac{a_1/a_2}{1 + C \exp(-a_1\delta)}, \quad (27)$$

где  $\lambda_0 = \text{const}$ , а  $C$  — константа интегрирования. Зависимость (27) экспериментально получена в работах, выполненных для алюминия [57, 58] в интервале размеров зерна  $5 \cdot 10^{-3} \leq \delta \leq 15$  мм.

### Масштабный эффект для автоволн

Положим, что экспериментальное определение длины автоволны производится в образцах разной длины  $L$ . В этом случае

$$\frac{d}{dL} (\lambda V_{aw}) = \frac{d\lambda}{dL} V_{aw} + \lambda \frac{dV_{aw}}{dL} = \hat{Z} \frac{d}{dL} \chi V_t = 0 \quad (28)$$

и

$$\frac{d\lambda}{dL} = -\frac{\lambda}{V_{aw}} \frac{dV_{aw}}{dL}. \quad (29)$$

При условиях  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$  и  $dV_{aw}/dL \approx V_{aw}/L$  имеем  $d\lambda/dL \approx (\lambda_0/V_{aw}) (V_{aw}/L)$  и  $d\lambda \propto dL/L$ , то есть,  $\lambda \propto \ln L$ , как было установлено экспериментально ранее [1].

### Автоволновое уравнение локализованной пластичности

Запишем уравнение инварианта (1) в виде

$$\chi/\lambda = \hat{Z}(V_{aw}/V_t) \quad (30)$$

и примем, что  $\varepsilon \approx \lambda/\chi \gg 1$  — пластическая деформация. Действуя оператором  $\partial/\partial t = D_{\varepsilon\varepsilon} \partial^2/\partial x^2$  на левую и правую части уравнения (30), получаем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \hat{Z} D_{\varepsilon\varepsilon} \left( -V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + V_{aw}^{-1} \frac{\partial^2 V_t}{\partial x^2} \right) = \hat{Z} D_{\varepsilon\varepsilon} \left[ -V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (V_t/V_{aw})}{\partial x^2} \right]. \quad (31)$$

Скорость распространения ультразвука слабо зависит от деформации, так что в уравнении (31)  $V_t \approx \text{const}$ . Так как  $V_t/V_{aw} \approx \hat{Z}^{-1} \lambda/\chi \approx \varepsilon$ , то

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\hat{Z} D_{\varepsilon\varepsilon} V_t \frac{\partial^2 V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} + D_{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}. \quad (32)$$

Это соотношение эквивалентно дифференциальному уравнению реакционно-диффузионного типа для скорости деформации, введённому в работе [1].

### Уравнение дислокационной кинетики Тейлора–Орвана

Важнейшая проблема развиваемого автоволнового подхода к пластическому течению состоит в поиске его связи с теорией дислокаций [59–61], которая успешно используется для построения моделей процессов деформации и разрушения кристаллов с дефектами. Основные модели теории дислокаций обычно базируются на использовании уравнения Тейлора–Орвана [59]

$$\dot{\varepsilon} = b\rho_m V_d, \quad (33)$$

связывающего скорость пластической деформации  $\dot{\varepsilon}$  с характеристиками дислокационного ансамбля — вектором Бюргера дислокаций  $b$ , плотностью подвижных дислокаций  $\rho_m$  и скоростью их движения  $V_d$ . Сравнивая уравнения (32) и (33), можно показать, что первый член в правой части уравнения (32)  $-\hat{Z}D_{\varepsilon\varepsilon}V_t(\partial^2V_{aw}^{-1}/\partial x^2)$  аналогичен выражению уравнению (33). Действительно, пусть  $V_t \approx \chi\omega_D \approx b\omega_D$ , а  $D_{\varepsilon\varepsilon} = \hat{Z}D_{\sigma\sigma} = \hat{Z}\chi V_t$ . Примем также, что  $\partial^2V_{aw}^{-1}/\partial x^2 \approx V_{aw}^{-1}/x^2$ . Тогда при хаотическом распределении дислокации  $x^2 \approx l^{-2} \approx \rho_m$ , где  $l$  — пробег дислокаций. Следовательно,

$$-\hat{Z}D_{\varepsilon\varepsilon}V_t \frac{\partial^2V_{aw}^{-1}}{\partial x^2} \approx -\hat{Z}^2\chi V_t^2 b\omega_D \frac{V_{aw}^{-1}}{x^2} \approx -\hat{Z}^2 b V_t \frac{V_t/V_{aw}}{l^2} \approx -\hat{Z}^2 V^{*-1} b\rho_m V_t. \quad (34)$$

Полагая, что  $V_d \propto V_t \approx V_d$ , запишем  $V_t \approx V_d\Psi^{-1}$ , так что

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\hat{Z}^2}{V^*\Psi} b\rho_m V_d + D_{\varepsilon\varepsilon}\partial^2\varepsilon/\partial x^2 = ab\rho_m V_d + D_{\varepsilon\varepsilon}\partial^2\varepsilon/\partial x^2. \quad (35)$$

Связь автоволновой модели с уравнением дислокационной кинетики была установлена ранее в работе [62] на основании экспериментальных данных.

Уравнение (35) отличается от уравнения Тейлора–Орвана (33) наличием в правой части члена  $D_{\varepsilon\varepsilon}\partial^2\varepsilon/\partial x^2$ , ответственного за макроскопическое перераспределение деформации в объёме. Это значит, что уравнение Тейлора–Орвана должно рассматриваться как частный случай более общего уравнения (35), включающего как *гидродинамическую*  $f(\varepsilon, \sigma) = b\rho_m V_d \propto V_d$  [63], так и *диффузионно подобную*  $D_{\varepsilon\varepsilon}\partial^2\varepsilon/\partial x^2 \propto \partial^2\varepsilon/\partial x^2$  [1, 4] компоненты деформационного потока.

Таким образом, удаётся показать, что автоволновая модель пластического течения и теория дислокаций являются взаимно дополнительными. При малых плотностях дислокаций использование дислокационного уравнения Тейлора–Орвана (33) позволяет получить правильные результаты. Однако при больших деформациях и соот-

ветствующих им больших плотностях дефектов, когда проявляются нелинейные свойства дислокаций [64, 65], необходимо применять уравнения (32) и (35).

### О связи дислокационного и мезоскопического масштабов

Как показано в [1], кинетика процессов развития локализованной деформации определяется системой автоволновых уравнений для взаимосвязанных скоростей изменения пластической деформации и упругих напряжений

$$\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon) + D_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon'', \quad (36)$$

$$\dot{\sigma} = g(\sigma) + D_{\sigma\sigma}\sigma'' \quad (37)$$

соответственно. Такого типа параболические дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка были введены Колмогоровым, Петровским и Пискуновым [66] путём добавления нелинейных  $N$ -образных функций  $f(\varepsilon)$  и  $g(\sigma)$  в правую часть хорошо известного уравнения Фурье. Эта операция приводит к появлению периодических решений этого уравнения. Уравнения типа (36) и (37) обычно используются сейчас для описания автоволновых процессов в системах разного сорта [67]. Заметим, что уравнение (36) является следствием упругопластического инварианта, и в этом качестве было выведено выше как уравнение (35). Что касается уравнения (37), то его возможный вывод из уравнения Эйлера для потока вязкой жидкости был предложен в работе [4].

Анализ коэффициентов  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  и  $D_{\sigma\sigma}$  в уравнениях (36) и (37) основан на том, что коэффициент  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  связан с плотностью подвижных дислокаций, а коэффициент  $D_{\sigma\sigma}$  определяется распределением напряжений. На основании анализа размерностей для этих коэффициентов можно записать

$$D_{\sigma\sigma} \approx \sqrt{F/\rho_0}, \quad (38)$$

где  $F$  — сила натяжения образца при испытании,  $\rho_0$  — плотность материала, и

$$D_{\varepsilon\varepsilon} \approx \frac{d}{dt} \rho_m^{-1}. \quad (39)$$

Из уравнения (38) следует, что типичная величина  $D_{\sigma\sigma} \approx 1 \text{ м}^2/\text{с}$ . Величина  $D_{\varepsilon\varepsilon}$  по уравнению (39), определяется менее точно, поскольку имеющиеся в литературе данные о плотности подвижных дислокаций на разных стадиях процесса пластического течения в значительной степени противоречивы. Однако на основании экспериментальных данных [59, 60], можно полагать, что  $10^{-8} \leq D_{\varepsilon\varepsilon} \leq 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , так что  $D_{\varepsilon\varepsilon} \ll D_{\sigma\sigma}$ . Выполнение этого неравенства обязательно для генерации автоволн в активных средах [68].

Как было показано в [4], коэффициент  $D_{\sigma\sigma}$  описывает связанное со случайными блужданиями перераспределение напряжений в объё-

ме образца, а коэффициент  $D_{\text{сс}}$  определяется перестройкой дислокационной субструктуры. В таком случае  $D_{\text{сс}}$  естественно считать характеристикой макроуровня пластического течения, а  $D_{\text{сс}}$  отнести к кинетике развития деформации на мезоуровне. Воспользовавшись диффузионным приближением, представим коэффициенты  $D_{\text{сс}}$  и  $D_{\text{σσ}}$  в общем виде как произведения длины свободного пробега  $R$  и скорости  $V$ , то есть  $D = RV$ . Здесь  $R$  есть размер области неоднородности в деформируемой системе, а  $V$  — скорость перераспределения деформаций или напряжений в ней. Так как коэффициент  $D_{\text{σσ}}$  связан с перераспределением напряжений, то характерная скорость этого процесса есть скорость поперечного звука  $V_t$ , то есть,  $V = V_t \approx 10^3$  м/с. В этом случае  $R \equiv l_{\sigma} = D_{\text{σσ}}/V_t \approx 10^{-3}$  м, что можно отождествить с мезоскопическим масштабом неоднородности пластической деформации. Для дислокационного коэффициента  $D_{\text{сс}} \approx 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с можно положить  $V \approx V_d \approx 10$  м/с [59, 61], так что в этом случае  $R \equiv l_{\epsilon} \approx D_{\text{сс}}/V_d \approx 10^{-9}$  м  $\approx nb$ , где  $n \approx 2-5$ , что, очевидно, отвечает микроскопическому (дислокационному) масштабу пластического течения.

Этот анализ устанавливает иерархию структурных уровней пластической деформации, которая состоит в том, что коэффициенты  $D_{\text{сс}}$  и  $D_{\text{σσ}}$ , характеризующие мезоскопический и макроскопический масштабы автоволновых структур, соответственно, содержат длины, характеризующие нижележащий структурный уровень пластического течения. В таком случае уравнение

$$D_{\text{сс}} \approx l_d V_d \quad (40)$$

связывает коэффициент  $D_{\text{сс}}$  для мезоскопического масштаба с дислокационной характеристикой  $l_d$ , а уравнение

$$D_{\text{σσ}} \approx \lambda V_t \quad (41)$$

выполняет ту же роль для макро- и мезоскопического масштабов.

Соотношения (40) и (41) непосредственно связывают характеристики масштабные уровней пластической деформации таким образом, что в транспортный коэффициент в качестве множителя входит масштаб нижележащего уровня. Таким образом, пространственный

Таблица 4. Параметры автоволновых процессов локализации деформации  
Table 4. Parameters of the autowave processes of the strain localization

Состав (масс.%)	Структура	$V_{\text{ав}} \cdot 10^5$ , м/с	$D_{\text{сс}} \cdot 10^7$ , м <sup>2</sup> /с	$R \cdot 10^9$ , м
Fe-0,1% C-2% Mn	Поли-	4,5	8,1	5,3
Cu-10% Ni-6% Sn	Моно-	6,5	7,6	5,2
NiTi (эквивалентный)	Моно-	1,0	0,8	0,6
Ni <sub>3</sub> Mn (упорядоченный)	Поли-	10,0	13,5	6,8
γ-Fe <sub>t</sub>	Моно-	3,5	7,8	4,3
γ-Fe <sub>t</sub> -0,5% N	Моно-	2,7	2,0	1,0



масштаб нижележащего уровня определяет кинетику процессов на вышележащем через соответствующий диффузионный коэффициент автоволновых уравнений (36) и (37).

Результаты вычислений по формулам (40) и (41) представлены в табл. 4. При этих расчётах коэффициент  $D_{\text{эс}}$  оценивался из экспериментальных данных по смещению фронтов деформации  $\delta x$  за время  $t$ , то есть как  $D_{\text{эс}} \approx (\delta x)^2/t$ . Полученные таким образом величины  $D_{\text{эс}}$  использованы для вычисления масштабного множителя  $R$ .

При обсуждении соотношения масштабов примем во внимание также, что для автоволн в активных средах характерно наличие минимального размера системы  $\Lambda_{\text{min}}$ , допускающего реализацию такого процесса. Из равенства периода колебаний  $\vartheta_{\text{ос}} \approx 2\pi\omega^{-1}$  и характерного времени диффузии  $\vartheta_D \approx \Lambda_{\text{min}}^2/2D$  следует

$$\Lambda_{\text{min}} \approx (2D\vartheta_{\text{ос}})^{1/2} \approx (4\pi D/\omega)^{1/2}, \quad (42)$$

где  $D$  — транспортный коэффициент. Используя для оценки  $\Lambda_{\text{min}}$  характеристики самых медленных автоволновых процессов деформации  $D \equiv D_{\text{эс}} \approx 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$  и  $\omega \approx 10^3 \text{ Гц}$ , можно получить оценку снизу  $\Lambda_{\text{min}} \approx 10^{-2} \text{ м}$ , близкую к экспериментально наблюдаемой длине образца  $\Lambda_{\text{min}}^{(\text{exp})} \leq 10^{-2} \text{ м}$ , при которой не регистрируются волновые процессы локализации деформации.

### Плотность подвижных дислокаций при деформации

Запишем инвариант (1) как  $\lambda V_{\text{ав}} = \hat{Z}\chi V_t$ , и, используя соотношения (38) и (39), получим

$$\frac{d}{dt}(\rho_m^{-1}) \approx \hat{Z}\sqrt{F/\rho_0} = \Omega, \quad (43)$$

или

$$\frac{d}{dt}(\rho_m^{-1}) \approx -\rho_m^{-2} \frac{d\rho_m}{dt} = \Omega. \quad (44)$$

Отсюда следует, что

$$\rho_m^{-2} d\rho_m = -\Omega dt, \quad (45)$$

то есть  $\rho_{md} \propto -t^{-1}$  или  $\rho_{md} \propto \varepsilon^{-1}$ , так, как при активном деформировании. Такой же результат для больших деформаций был получен ранее Гилманом [69].

### О происхождении автоволн локализованной пластичности

Использование упругопластического инварианта позволяет понять общую причину возникновения автоволн локализованной пластической деформации. В соответствии с уравнением Тейлора–Орована (33), задаваемое испытательной машиной условие  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$  может быть выполнено только при постоянстве дислокационного потока

$\rho_m V_d = \text{const}$ , которое обеспечивается достаточно высокими плотностью подвижных дислокаций и скоростью их движения. Это условие может нарушаться вследствие деформационного упрочнения, снижения плотности подвижных дислокаций при росте деформации или падения их скорости при уменьшении эффективного напряжения с  $\sigma$  до  $\sigma - Gb\rho_{tot}^{1/2}$  [59] ( $\rho_{tot}$  — общая плотность дислокаций). В этом случае условие  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$  может быть обеспечено только включением диффузионно-подобного механизма деформации, связанного с членом  $D_{\varepsilon\varepsilon''}$  в уравнении (7) и порождающего новый очаг локализованного пластического течения на расстоянии  $\sim\lambda$  от исходного. Можно полагать, что именно здесь кроется причина генерации макроскопических автоволн локализованного пластического течения на любой стадии деформационного процесса [70].

### Коэффициент деформационного упрочнения

Используем полученные из инварианта (1) соотношения для скорости автоволны (19) и её дисперсии (22). На их основании можно записать равенство

$$\theta = \frac{\Xi}{2\pi\alpha} \lambda = \frac{\Xi}{2\pi\hat{Z}\chi V_t} \lambda \approx \pi^{-1} \frac{\Xi}{V_t} \frac{\lambda}{\chi}. \quad (46)$$

Расчёт по уравнению (46) приводит к коэффициенту деформационного упрочнения  $\theta \approx 3 \cdot 10^{-3}$ , что близко к экспериментально наблюдаемым значениям этой величины на стадии линейного деформационного упрочнения [21, 59].

### Упругопластический инвариант и соотношение Холла–Петча

Известно, что показатели механических характеристик поликристаллических материалов (предел текучести, временное сопротивление, напряжение течения) зависят от такого структурного параметра среды, как размер зерна [55]. Длина автоволны локализованной деформации связана с размером зерна логистическим уравнением (27). По этим причинам следует проверить выполнение инварианта (1) в разных диапазонах размеров зерна. Эту задачу можно решить, проводя

Таблица 5. Инвариантное соотношение (1) для двух диапазонов размеров зёрен в Al  
Table 5. Invariant relation (1) for two ranges of the grain sizes

Диапазон размеров зёрен, м	$\chi V_t \cdot 10^7, \text{ м}^2/\text{с}$	$\lambda V_{aw} \cdot 10^7, \text{ м}^2/\text{с}$	$\frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t}$
$5 \cdot 10^{-6} \leq \delta \leq 10^{-4}$	5,13	2,61	$\sim 0,5$
$10^{-4} \leq \delta \leq 5 \cdot 10^{-3}$	6,17	3,12	$\sim 0,5$

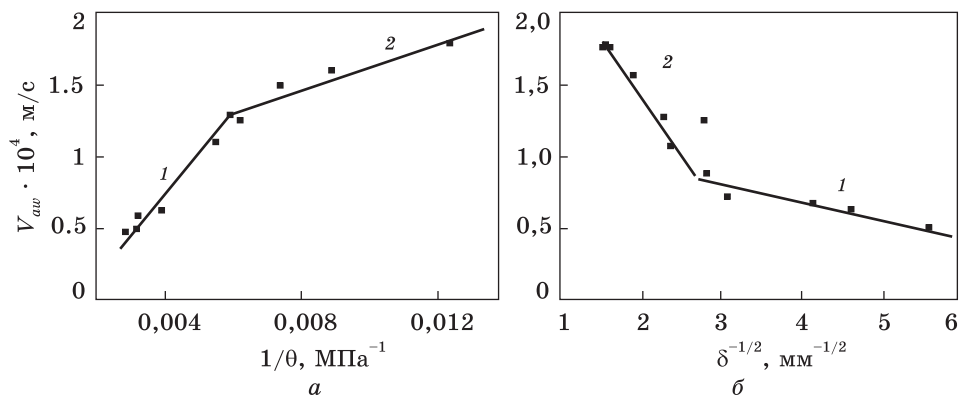


Рис. 6. Зависимость скорости распространения автоволн в поликристаллическом Al от коэффициента деформационного упрочнения (а) и от размера зерна (б), где диапазон размеров зёрен  $5 \cdot 10^{-6} \leq \delta \leq 1,5 \cdot 10^{-4}$  м (1) и  $1,5 \cdot 10^{-4} \leq \delta \leq 10^{-2}$  м (2)

Fig. 6. The dependences of autowave propagation velocity in the polycrystalline Al on the strain hardening coefficient (a) and on the grain size (b), where the grain size ranges are  $5 \cdot 10^{-6} \leq \delta \leq 1,5 \cdot 10^{-4}$  m (1) and  $1,5 \cdot 10^{-4} \leq \delta \leq 10^{-2}$  m (2)

испытания поликристаллического алюминия, в котором методом рекристаллизации после деформации можно вырастить зерна размером  $10^{-6} \leq \delta \leq 10^{-2}$  м. Результаты такой проверки, приведённые в табл. 5, указывают на применимость упругопластического инварианта для описания развития локализованной пластичности в этих условиях.

Из работы [58] известно, что при переходе через граничный размер зерна  $\delta \approx 10^{-4}$  м скорость распространения ультразвука заметно падает из-за рассеяния ультразвука на границах зёрен [55]. Резуль-

Таблица 6. Граничный размер зерна для механических свойств Al  
Table 6. The boundary grain size for mechanical properties of Al

№	Характеристика	Критический размер зерна $\delta_c$ , м $\cdot 10^{-4}$
1	Временное сопротивление $\sigma_B$	1,5
2	Разрыв зависимости Холла-Петча $\sigma_f = \sigma_0 + k_f \delta^{-1/2}$	1,0
3	Исчезновение линейных участков зависимости $\sigma(\epsilon)$	$\approx 0,5$
4	Изменения коэффициентов зависимости скорости автоволн от коэффициента деформационного упрочнения $V_{aw} = V_0 + \Xi/\theta$	1,0–1,5
5	Пересечение зависимостей $V_{ph}(\delta)$ и $V_{gr}(\delta)$	0,1–0,15
6	Скорость распространения ультразвука	0,1
7	Минимум на дисперсионной кривой $\omega(k)$	1,0–1,5
8	Зависимость длины автоволны от размера зерна $\lambda(\delta)$	2,5
9	Инвариантное соотношение	1,0

таты вычислений величин  $\lambda V_{av}$  для двух диапазонов размеров зёрен, приведённые в табл. 5, указывают на справедливость инвариантного соотношения в таких условиях.

Полученные результаты исследований локализации пластического течения в поликристаллах алюминия с разным размером зерна, сведённые в табл. 6, указывают на существовании граничного размера зерна  $\delta_b \approx 0,1$  мм, при котором, по-видимому, меняются механизмы деформационного упрочнения. Эти данные частично проиллюстрированы на рис. 6.

### **Связь упругой и пластической компонент деформации**

Обратим внимание на то обстоятельство, что обычно при анализе соотношения между упругой  $\varepsilon_{el}$  и пластической  $\varepsilon_{pl}$  компонентами общей деформации  $\varepsilon_{tot}$  принимается считающееся очевидным [71] условие  $\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} \approx \varepsilon_{pl}$ , поскольку  $\varepsilon_{pl} \gg \varepsilon_{el}$ . Однако из смысла инварианта (1) явно следует, что взаимосвязь упругой и пластической компонент общей деформации не сводится к этой общепринятой формуле, но является гораздо более сложной. Причиной сложности может быть склонность упругой деформации к локализации, рассмотренная в работе [72]. Согласно развиваемым представлениям, упругая деформация выступает в качестве управляющего кинетикой пластического течения фактором. В частности, именно поведением упругого поля деформации объясняется формирование макроскопического масштаба локализации пластической деформации в деформируемых объектах [73].

### **Обобщение упругопластического инварианта**

Важная роль упругопластического инварианта деформации, выясненная на основании анализа следствий из него, сделала желательной проверку его выполнения при деформации других материалов. Для этого данные о величине инварианта, полученные для стадий линейного деформационного упрочнения, дополнены характеристиками паттернов локализованной пластичности, наблюдавшихся при деформации других материалов и при других условиях.

Фазовые автоволны, состоящие из 2–3 синхронно движущихся очагов активной деформации, наблюдались, в частности, на стадии лёгкого скольжения в монокристаллах Cu, Ni,  $\alpha$ -Fe,  $\gamma$ -Fe, Zn и Sn [1].

Деформация монокристалла никелида титана (TiNi) эквивалентного состава осуществляется, как известно [74], за счёт фазового превращения. Экспериментальная оценка параметров наблюдающейся в

этом случае фазовой автоволны локализованной пластичности также привела к величине  $\hat{Z} \approx 1/2$  [49].

При анализе количественных данных о движении индивидуальных дислокаций в монокристаллах [75, 76] выяснилось, что в таких условиях характерные длины дислокационных пробегов составляют  $10^{-5} \leq l \leq 10^{-4}$  м, а скорости движения дислокаций  $10^{-3} \leq V_d \leq 10^{-2}$  м/с, так что  $\langle lV_d \rangle \approx \text{const} \approx 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. Постоянство этого произведения объясняется тем, что движение хаотически расположенных подвижных дислокаций с малой плотностью  $\rho_m$  и вектором Бюргерса  $b$  начинается, когда внешние напряжения достигают уровня внутренних напряжений от дислокационной сетки [27, 59], то есть при условии

$$5\sigma \geq \frac{Gb}{2\pi} \rho_m^{1/2}, \quad (47)$$

где  $G$  — модуль сдвига. Средняя длина пробега дислокаций, определяемая размером ячейки дислокационной сетки, в этом случае составляет

$$l \approx \rho_m^{-1/2} = \frac{Gb}{2\pi\sigma} \propto \sigma^{-1}. \quad (48)$$

Между локальными барьерами во время скачка дислокации движутся квазивязким образом со скоростью [77]

$$V_d \approx (b/B)\sigma \propto \sigma, \quad (49)$$

где  $B$  — коэффициент квазивязкого торможения дислокаций. Из уравнений (48) и (49) следует, что произведение

$$lV_d = \frac{Gb^2}{2\pi B} \approx \text{const} \quad (50)$$

не зависит от напряжения, а оценка при характерных значениях  $G \approx 30$  ГПа,  $b \approx 2 \cdot 10^{-10}$  м и  $B \approx 10^{-4}$  Па·с [77] показывает, что  $\langle lV_d \rangle \approx 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. Обратим здесь внимание ещё на то, что величины  $\lambda V_{aw}$  и  $\chi V_t$  имеют размерность кинематической вязкости. Оценка динамической вязкости  $\rho_0 \lambda V_{aw} \approx \hat{Z} \rho_0 \chi V_t \approx 10^{-4}$  Па·с даёт величину, близкую к экспериментально определённому и теоретически обоснованному Альшицем и Инденбомом [77] коэффициенту вязкого торможения дислокаций  $B$  в уравнении (49).

Наконец, при деформации сжатием образцов из щёлочно-галогидных кристаллов (NaCl, KCl и LiF) и горных пород (мрамор, песчаник и сильвинит) также наблюдалась стадия линейного деформационного упрочнения [78–80], для которой удалось оценить значение инвариантного соотношения.

Вычисления величин  $\hat{Z}$  по экспериментальным наблюдениям характеристик фазовых автоволн локализованной пластичности для перечисленных случаев позволили дополнительно к уравнению (1), установленному для стадий линейного деформационного упрочнения

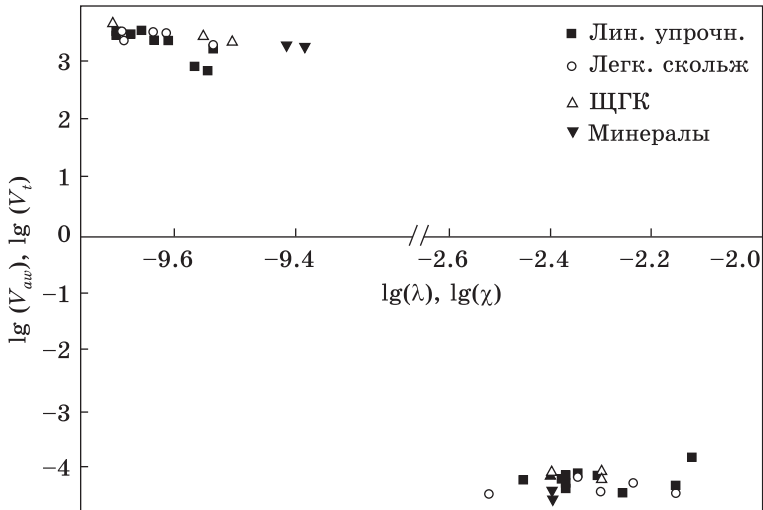


Рис. 7. К объяснению универсальности инвариантного соотношения (■ — линейное упрочнение, ○ — лёгкое скольжение, △ — щёлочно-галогидные кристаллы (ЩГК), ▼ — минералы)

Fig. 7. On description of the universality of the invariant relation (■—linear hardening, ○—easy sliding, △—alkali halide crystals, ▼—minerals)

девятнадцати металлов, записать следующие равенства с такой же, как и для уравнения (1), структурой

$$\frac{\langle lV \rangle_d}{\langle \chi V_t \rangle_{el}} = \hat{Z}_d \approx 0,53, \quad (51)$$

$$\frac{\langle \lambda V_{aw} \rangle_{eg}}{\langle \chi V_t \rangle_{el}} = \hat{Z}_{eg} \approx 0,52, \quad (52)$$

$$\frac{\langle \lambda V_{aw} \rangle_{pt}}{\langle \chi V_t \rangle_{el}} = \hat{Z}_{pt} \approx 0,47, \quad (53)$$

$$\frac{\langle \lambda V_{aw} \rangle_{ahk}}{\langle \chi V_t \rangle_{el}} = \hat{Z}_{ahc} \approx 0,43, \quad (54)$$

$$\frac{\langle \lambda V_{aw} \rangle_{rock}}{\langle \chi V_t \rangle_{el}} = \hat{Z}_{rock} \approx 0,45, \quad (55)$$

где индексы имеют следующий смысл: *d* — dislocation, *eg* — easy glide, *pt* — phase transformation, *ahc* — alkali halide crystals, *rock* — rocks, *el* — elastic deformation.

Таким образом, для деформации на стадиях линейного деформационного упрочнения и лёгкого скольжения, при деформации за счёт

фазового превращения и движения индивидуальных дислокаций, а также для деформации щёлочно-галлоидных кристаллов и образцов горных пород отношение

$$\hat{Z}_{wh} \approx \hat{Z}_d \approx \hat{Z}_{eg} \approx \hat{Z}_{pt} \approx \hat{Z}_{ahc} \approx \hat{Z}_{rock} \approx \frac{1}{2}, \quad (56)$$

откуда после усреднения по всем вариантам следует общее выражение

$$\left\langle \frac{\lambda V_{aw}}{\chi V_t} \right\rangle_{\Sigma} = \langle \hat{Z} \rangle_{\Sigma} = 0,49 \approx \frac{1}{2}, \quad (57)$$

которое включает все перечисленные выше варианты деформации. Графическое представление обсуждаемых данных показано на рис. 7.

Соотношение (57) указывает на масштабную инвариантность пластического течения, по крайней мере, на трёх исследованных масштабных уровнях при разных законах деформации: линейном деформационном упрочнении, лёгком скольжении, деформации за счёт движения индивидуальных дислокаций, двойникования, которое наблюдалось, например, в монокристаллах  $\gamma$ -Fe [81, 82], и деформации фазового превращения [49]. Таким образом, упругопластический инвариант приобретает смысл универсальной характеристики процессов пластической деформации.

## Заключение

В настоящей работе доказана возможность введения универсального соотношения, описывающего связь между параметрами упругой и пластической деформации. Связь установлена в ходе исследований развития локализованной пластичности, проведённых на девятнадцати различных металлах.

Это соотношение соответствует модели генерации автоволн локализованного пластического течения и характеризует расслоение активной деформируемой среды на динамическую и информационную подсистемы [12, 48, 49, 83]. Основным количественным соотношением для модели служит упругопластический инвариант, связывающий упругую и пластическую компоненты деформации. Объяснение природы инварианта основано на представлении о том, что пластическая деформация является процессом самоорганизации дефектной структуры деформируемой среды, и этот процесс сопровождается понижением энтропии деформируемой системы [1, 84, 85].

Оценки величины упругопластического инварианта деформации показали, что он справедлив для следующих режимов пластического течения: (а) для стадии линейного деформационного упрочнения, (б) для стадии лёгкого скольжения в монокристаллах, (в) для деформации за счёт движения индивидуальных дислокаций, (г) для деформации

ции за счёт фазового превращения, ( $\partial$ ) при деформации неметаллических материалов.

Смысл упругопластического инварианта деформации состоит в том, что пластическая и упругая деформации, связанные через кривую пластического течения  $\sigma(\epsilon)$ , непосредственно определяют развитие друг друга. Выяснение природы такой связи существенно для понимания природы локализованного пластического течения, поскольку основные закономерности этого процесса являются следствиями упругопластического инварианта деформации.

Можно предположить, что использование инвариантного соотношения типа (1) может оказаться полезным при описании, например, данных о подвижности дислокаций [86], при интерпретации превращений дислокационных ансамблей в деформируемых материалах [87], а также при исследованиях прочности и пластичности материалов с композиционной структурой [88]. Можно надеяться, что определяемая упругопластическим инвариантом деформации возможность описания всех явлений пластичности на основе единых представлений, окажется полезной во всех этих случаях.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук РФ на 2013–2020 годы (направление III.23). Авторы благодарят участников Физического семинара ИФПМ СО РАН за обсуждение результатов исследований локализованной пластичности и признательны В.И. Данилову и В.В. Горбатенко, совместно с которыми были экспериментально получены многие количественные данные, использованные в настоящей работе.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Б. Зуев, В.И. Данилов, С.А. Баранникова, *Физика макролокализации пластического течения* (Новосибирск: Наука: 2008).
2. Л.Б. Зуев, В.И. Данилов, Б.С. Семухин, *Успехи физ. мет.*, **3**, № 3: 237 (2002).
3. В.И. Данилов, Л.Б. Зуев, *Успехи физ. мет.*, **9**, № 4: 371 (2008).
4. Л.Б. Зуев, *Успехи физ. мет.*, **16**, № 1: 35 (2015).
5. Ю.В. Мильман, И.В. Гончарова, *Успехи физ. мет.*, **18**, № 3: 265 (2017).
6. Ю.В. Мильман, С.И. Чугунова, И.В. Гончарова, А.А. Голубенко, *Успехи физ. мет.*, **19**, № 3: 271 (2018).
7. А.И. Олемской, А.А. Кацнельсон, *Синергетика конденсированной среды* (Москва: УРСС: 2003).
8. A. Seeger and W. Frank, *Solid State Phenomena*, **3–4**: 125 (1988).
9. В.А. Давыдов, В.С. Зыков, А.С. Михайлов, *Успехи физ. наук*, **161**, № 8: 45 (1991).
10. V.A. Davydov, N.V. Davydov, V.G. Morozov, M.N. Stolyarov, and T. Yamaguchi, *Cond. Mat. Phys.*, **7**, No. 3: 565 (2004).
11. L.B. Zuev, V.I. Danilov, S.A. Barannikova, and V.V. Gorbatenko, *Phys. Wave Phenom.*, **17**, No. 1: 66 (2009).
12. L.B. Zuev, *Phys. Wave Phenom.*, **20**, No. 3: 166 (2012).



13. L.B. Zuev, V.V. Gorbatenko, and K.V. Pavlichev, *Meas. Sci. Technol.*, **21**, No. 5: 054014: 1 (2010).
14. A. Acharya, A. Beaudoin, and R. Miller, *Mathemat. Mechan. Solids*, **13**, Nos. 3–4: 292 (2008).
15. C. Fressengeas, A. Beaudoin, and D. Entemeyer, *Phys. Rev. B*, **79**, No. 1: 014108 (2009).
16. M.A. Lebyodkin, N.P. Kobelev, and Y. Bougherira, *Acta Mater.*, **60**, No. 9: 3729 (2012).
17. Т.В. Третьякова, В.Э. Вильдеман, *Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов* (Москва: Физматлит: 2017).
18. О.А. Плехов, N. Saintier, О.Б. Наймарк, *Журнал технической физики*, **77**, № 9: 135 (2007).
19. О.А. Плехов, *Журнал технической физики*, **81**, № 2: 144 (2011).
20. U. Messerschmidt, *Dislocation Dynamics during Plastic Deformation* (Berlin: Springer: 2010).
21. J. Pelleg, *Mechanical Properties of Materials* (Dordrecht: Springer: 2013).
22. V.A. Tatarenko, S.M. Bokoch, V.M. Nadutov, T.M. Radchenko, and Y.B. Park, *Defect Diffus. Forum*, **280–281**: 29 (2008).
23. T.M. Radchenko and V.A. Tatarenko, *Defect Diffus. Forum*, **273**: 525 (2008).
24. T.M. Radchenko, V.A. Tatarenko, H. Zapolsky, and D. Blavette, *J. Alloys Compd.*, **452**, No. 1: 122 (2008).
25. T.M. Radchenko, V.A. Tatarenko, and H. Zapolsky, *Solid State Phenom.*, **138**: 283 (2008).
26. R.E. Newnham, *Properties of Materials* (Oxford: University Press: 2005).
27. D. Caillard and J.L. Martin, *Thermally Activated Mechanisms in Crystal Plasticity* (Amsterdam: Elsevier Science: 2003).
28. М.Н. Степнов, *Вероятностные методы оценки характеристик механических свойств материалов* (Новосибирск: Наука, 2005).
29. L. B. Zuev, *Annalen der Physik*, **10**, Nos. 11–12: 965 (2001).
30. L. B. Zuev, *Annalen der Physik*, **16**, No. 4: 286 (2007).
31. В. К. Григорович, *Периодический закон Менделеева и электронное строение металлов* (Москва: Наука: 1966).
32. Э.В. Шпольский, *Атомная физика. Т. 1. Введение в атомную физику* (Москва: Лань: 2010).
33. L.B. Zuev, *Int. J. Solids Struct.*, **42**, Nos. 3–4: 943 (2005).
34. М.И. Каганов, В.Я. Кравченко, В.Д. Нацик, *Успехи физ. наук*, **111**, № 12: 655 (1973).
35. Л.И. Миркин, *Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов* (Москва: ГИФМЛ: 1961).
36. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику* (Киев: Наукова думка: 1989).
37. Э. Скотт, *Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур* (Москва: Физматлит: 2007).
38. Ю.Л. Климонтович, *Введение в физику открытых систем* (Москва: Янус-К: 2002).
39. Л.Б. Зуев, *Письма в ЖТФ*, **31**, № 3: 1 (2005).
40. Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин, *Термодинамика, статистическая физика и кинетика* (Новосибирск: Изд-во НГУ: 2000).
41. А.И. Слущкер, *Физ. тверд. тела*, **47**, № 5: 777 (2005).
42. F.R.N. Nabarro, *Strength of Metals and Alloys* (Oxford: Pergamon Press: 1986).

43. С.Л. Соболев, *Успехи физ. наук*, **161**, № 3: 5 (1991).
44. Л.С. Полак, А.С. Михайлов, *Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах* (Москва: Наука: 1983).
45. Г.Р. Иваницкий, *Успехи физ. наук*, **187**, № 7: 757 (2017).
46. Б.Б. Кадомцев, *Динамика и информация* (Москва: Редакция УФН: 1997).
47. M.C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.*, **65**, No. 3: 851 (1993).
48. Л.Б. Зуев, *Металлофиз. новейшие технол.*, **16**, № 10: 31 (1994).
49. Л.Б. Зуев, *Металлофиз. новейшие технол.*, **18**, № 5: 55 (1996).
50. Л.Б. Зуев, В. И. Данилов, В. В. Горбатенко, *Журнал технической физики*, **65**, № 5: 91 (1995).
51. R.V. Williams, *Acoustic Emission* (Bristol: Adam Hilger: 1980).
52. Г.А. Малыгин, *Физ. тверд. тела*, **42**, № 1: 69 (2000).
53. Д.С. Чернавский, *Синергетика и информация. Динамическая теория информации* (Москва: УРСС: 2004).
54. С.А. Баранникова, *Письма в Журнал технической физики*, **30**, № 8: 75 (2004).
55. Л. Б. Зуев, Б. С. Семухин, К. И. Бушмелева, Н. В. Зариковская, *Физ. мет. металловед.*, **89**, № 4: 111 (2000).
56. Дж. Мэрди, *Математическое моделирование* (Москва: Мир: 1979) (пер. с англ.).
57. Л.Б. Зуев, Н.В. Зариковская, М.А. Федосова, *Журнал технической физики*, **80**, № 9: 68 (2010).
58. Л.Б. Зуев, Н.В. Зариковская, С.А. Баранникова, Г.В. Шляхова, *Металлофиз. новейшие технол.*, **35**, № 1: 113 (2013).
59. Ж. Фридель, *Дислокации* (Москва: Мир: 1967) (пер. с англ.).
60. Дж. Хирт, И. Лоте, *Теория дислокаций* (Москва: Атомиздат: 1972).
61. M. Zaiser and A. Seeger, *Dislocations in Solids* (Amsterdam: Elsevier: 2002).
62. L.V. Zuev and V.I. Danilov, *Phil. Mag. A*, **79**, No. 1: 43 (1999).
63. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика* (Москва: Наука: 1988).
64. M. Zaiser and E.C. Aifantis, *Int. J. Plasticity*, **22**, No. 8: 1432 (2006).
65. Г.А. Малыгин, *Успехи физ. наук*, **181**, № 11: 1129 (2011).
66. А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов, *Бюлл. МГУ. Сер. А. Математ. и механ.*, **1**, № 1: 6 (1937).
67. Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов, *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией* (Москва: Физматлит: 2010).
68. В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно, *Автоволновые процессы* (Москва: Наука: 1987).
69. J.J. Gilman, *J. Appl. Phys.*, **36**, No. 9: 2772 (1965).
70. Л.Б. Зуев, *Известия РАН. Сер. физич.*, **78**, № 10: 957 (2014).
71. Р. Хилл, *Математическая теория пластичности* (Москва: ГИТТЛ: 1956) (пер. с англ.).
72. А.В. Порубов, *Локализация нелинейных волн деформации* (Москва: Физматлит: 2009).
73. L.V. Zuev and B.S. Semukhin, *Phil. Mag. A*, **82**, No. 6: 1183 (2002).
74. K. Otsuka and K. Shimizu, *Int. Met. Rev.*, **31**, No. 3: 93 (1986).
75. Э.М. Надгорный, *Несовершенства кристаллического строения и мартенситные превращения* (Москва: Наука: 1972).
76. Т. Судзуки, Х. Ёсианага, С. Такеути, *Динамика дислокаций и пластичность* (Москва: Мир: 1989) (пер. с яп.).
77. V.I. Alshits and V.L. Indenbom, *Dislocations in Solids. Vol. 12* (Eds. F. R. N. Nabarro and J. P. Hirth) (Amsterdam: Elsevier: 2004).

78. С.А. Баранникова, М.В. Надежкин, Л.Б. Зуев, *Физ. тверд. тела*, **52**, № 7: 1291 (2010).
79. С.А. Баранникова, М.В. Надежкин, Л.Б. Зуев, *Письма в ЖТФ*, **37**, № 16: 15 (2011).
80. Л.Б. Зуев, С.А. Баранникова, М.В. Надежкин, В.В. Горбатенко, *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*, № 1: 49 (2014).
81. Л.Б. Зуев, С.А. Баранникова, В.И. Данилов, *Кристаллография*, **54**, № 6: 1063 (2009).
82. Л.Б. Зуев, С.А. Баранникова, *Металлофиз. новейшие технол.*, **31**, № 5: 711 (2009).
83. L.B. Zuev and S.A. Barannikova, *Int. J. Mech. Sci.*, **88**, No. 12: 1 (2014).
84. P. Hähner, *Appl. Phys. A*, **58**, No. 4: 41 (1994).
85. E. C. Aifantis, *Acta Mech.*, **225**, Nos. 4–5: 999 (2014).
86. D. Caillard, *Acta Mater.*, **58**, No. 9: 3493 (2010).
87. Э.В. Козлов, В.А. Старенченко, Н.А. Конева, *Металлы*, № 5:152 (1993).
88. Б.А. Мовчан, С.А. Фирстов, Ю.Ф. Луговской, *Структура, прочность и сопротивление усталости микрокристаллических и микрослойных материалов* (Киев: Наукова думка: 2015).

Получено 21 мая 2018 г.;

окончательный вариант — 14 октября 2018 г.

#### REFERENCES

1. L.B. Zuev, V.I. Danilov, and S.A. Barannikova, *Fizika Makrolokaliizatsii Plasticheskogo Techeniya* [Plastic Flow Macrolocalization Physics] (Novosibirsk: Nauka: 2008) (in Russian).
2. L.B. Zuev, V.I. Danilov, and B.S. Semukhin, *Usp. Fiz. Met.*, **3**, No. 3: 237 (2002) (in Russian).
3. V.I. Danilov and L.B. Zuev, *Usp. Fiz. Met.*, **9**, No. 4: 371 (2008) (in Russian).
4. L.B. Zuev, *Usp. Fiz. Met.*, **16**, No. 1: 35 (2015) (in Russian).
5. Yu.V. Milman and I.V. Goncharova, *Usp. Fiz. Met.*, **18**, No. 3: 265 (2017) (in Russian).
6. Yu.V. Milman, S.I. Chugunova, I.V. Goncharova, and A.A. Golubenko, *Usp. Fiz. Met.*, **19**, No. 3: 271 (2018).
7. A.I. Olemskoi and A.A. Katsnel'son, *Sinergetika Kondensirovannoi Sredy* [Condensed Media Synergetics] (Moscow: URSS: 2003) (in Russian).
8. A. Seeger and W. Frank, *Solid State Phenomena*, **3–4**: 125 (1988).
9. V.A. Davydov, V.S. Zykov, and A.S. Mikhailov, *Sov. Phys. Usp.*, **34**, No. 8: 665 (1991).
10. V.A. Davydov, N.V. Davydov, V.G. Morozov, M.N. Stolyarov, and T. Yamaguchi, *Cond. Mat. Phys.*, **7**, No. 3: 565 (2004).
11. L.B. Zuev, V.I. Danilov, S.A. Barannikova, and V.V. Gorbatenko, *Phys. Wave Phenom.*, **17**, No. 1: 66 (2009).
12. L.B. Zuev, *Phys. Wave Phenom.*, **20**, No. 3: 166 (2012).
13. L.B. Zuev, V.V. Gorbatenko, and K.V. Pavlichev, *Meas. Sci. Technol.*, **21**, No. 5: 054014: 1 (2010).
14. A. Acharia, A. Beaudoin, and R. Miller, *Mathemat. Mechan. Solids*, **13**, Nos. 3–4: 292 (2008).
15. C. Fressengeas, A. Beaudoin, and D. Entemeyer, *Phys. Rev. B*, **79**, No. 1: 014108 (2009).
16. M.A. Lebyodkin, N.P. Kobelev, and Y. Bougherira, *Acta Mater.*, **60**, No. 9: 3729 (2012).

17. T.V. Tret'yakova and V.E. Vil'deman, *Prostranstvenno-Vremennaya Neodnorodnost' Protseessov Neuprugogo Deformirvaniya Metallov* [Space-Temporal Nonhomogeneity of Anelastic Deformation in Metals] (Moscow: Fizmatlit: 2017) (in Russian).
18. O.A. Plekhov, N. Saintier, and O.B. Naimark, *Technical Physics*, **52**, No. 9: 1236 (2007).
19. O.A. Plekhov, *Technical Physics*, **56**, No. 2: 301 (2011).
20. U. Messerschmidt, *Dislocation Dynamics during Plastic Deformation* (Berlin: Springer: 2010).
21. J. Pelleg, *Mechanical Properties of Materials* (Dordrecht: Springer: 2013).
22. V.A. Tatarenko, S.M. Bokoch, V.M. Nadutov, T.M. Radchenko, and Y.B. Park, *Defect Diffus. Forum*, **280–281**: 29 (2008).
23. T.M. Radchenko and V.A. Tatarenko, *Defect Diffus. Forum*, **273**: 525 (2008).
24. T.M. Radchenko, V.A. Tatarenko, H. Zapolsky, and D. Blavette, *J. Alloys Compd.*, **452**, No. 1: 122 (2008).
25. T.M. Radchenko, V.A. Tatarenko, and H. Zapolsky, *Solid State Phenom.*, **138**: 283 (2008).
26. R.E. Newnham, *Properties of Materials* (Oxford: University Press: 2005).
27. D. Caillard and J.L. Martin, *Thermally Activated Mechanisms in Crystal Plasticity* (Amsterdam: Elsevier Science: 2003).
28. M.N. Stepnov, *Veroyatnostnye Metody Otsenki Kharakteristik Mekhanicheskikh Svoistv Materialov* [Probability Methods of Mechanical Properties Evaluations] (Novosibirsk: Nauka: 2005) (in Russian).
29. L.B. Zuev, *Annalen der Physik*, **10**, Nos. 11–12: 965 (2001).
30. L.B. Zuev, *Annalen der Physik*, **16**, No. 4: 286 (2007).
31. V.K. Grigorovich, *Periodicheskiy Zakon Mendeleeva i Ehlektronnoye Stroenie Metallov* [Mendeleev Periodic Law and Electronic Structure of Metals] (Moscow: Nauka: 1966) (in Russian).
32. E.V. Shpolsky, *Atomnaya Fizika. T. 1. Vvedenie v Atomnuyu Fiziku* [Atomic physics. Vol. 1. Introduction to Atomic Physics] (Moscow: Lan: 2010) (in Russian).
33. L.B. Zuev, *Int. J. Solids Struct.*, **42**, Nos. 3–4: 943 (2005).
34. M.I. Kaganov, Ya.V. Kravchenko, and V.D. Natsik, *Sov. Phys. Usp.*, **16**, 878 (1974).
35. L.I. Mirkin, *Handbook of X-Ray Structural Analysis of Polycrystals* (New York: Consultants Bureau: 1964).
36. A.M. Kosevich and A. S. Kovalev, *Vvedenie v Nelineinuyu Fizicheskuyu Mekhaniku* [Introduction to Nonlinear Physical Mechanics] (Kiev: Naukova Dumka: 1989) (in Russian).
37. A. Scott, *Nonlinear Science. Emergence and Dynamics of Coherent Structures* (Oxford: University Press: 2003).
38. Y.L. Klimontovich, *Vvedenie v Fiziku Otkrytykh Sistem* [The Introduction to Open System Physics] (Moscow: Yanus-K: 2002) (in Russian).
39. L.B. Zuev, *Tech. Phys. Lett.*, **31**, No. 2 89 (2005).
40. Y.B. Rumer and M.Sh. Ryvkin, *Termodinamika, Statisticheskaya Fizika i Kinetika* [Thermodinamics, Statistical Physics and Kinetics] (Moscow: Nauka: 1977) (in Russian).
41. A.I. Slutsker, *Phys. Solid State*, **47**, No. 5: 801 (2005).
42. F.R.N. Nabarro, *Strength of Metals and Alloys* (Oxford: Pergamon Press: 1986).
43. S.L. Sobolev, *Sov. Phys. Usp.*, **34**, No. 3: 217 (1991).
44. L.S. Polak and A.S. Mikhailov, *Samoorganizatsiya v Neravnovesnykh Fiziko-*

- Khimicheskikh Sistemakh* [Self-Organization in Non-Equilibrium Physical-Chemical Systems] (Moscow: Nauka Publ.: 1983) (in Russian).
45. G.R. Ivanitskii, *Phys. Usp.*, **60**, No. 7: 705 (2017).
  46. B.B. Kadomtsev, *Dinamika i Informatsiya* [Dynamics and Information] (Moscow: Redaktsiya UFN: 1997) (in Russian).
  47. M.C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.*, **65**, No. 3: 851 (1993).
  48. L.B. Zuev, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **16**, No. 10: 31 (1994) (in Russian).
  49. L.B. Zuev, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **18**, No. 5: 55 (1996) (in Russian).
  50. L.B. Zuev, V.I. Danilov, and V.V. Gorbatenko, *Zh. Tekhn. Fiz.*, **65**, No. 5: 91 (1995) (in Russian).
  51. R.V. Williams, *Acoustic Emission* (Bristol: Adam Hilger: 1980).
  52. G.A. Malygin, *Phys. Solid State*, **42**, No. 1: 72 (2000).
  53. D.S. Chernavsky, *Sinergetika i Informatsiya. Dinamicheskaya Teoriya Informatsii* [Synergetics and Information. Dynamic Information Theory] (Moscow: URSS: 2004) (in Russian).
  54. S.A. Barannikova, *Tech. Phys. Lett.*, **30**, No. 4: 338 (2004).
  55. L.B. Zuev, B.S. Semukhin, K.I. Bushmeleva, and N.V. Zarikovskaya, *Phys. Met. Metallog.*, **89**, No. 4: 423 (2000).
  56. G. Murdie, *Mathematical Modelling* (London: Butterworth: 1976).
  57. L.B. Zuev, N.V. Zarikovskaya, and M.A. Fedosova, *Tech. Phys.*, **55**, No. 9: 1299 (2010).
  58. L. B. Zuev, N.V. Zarikovskaya, S.A. Barannikova, and G.V. Shlyakhova, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **35**, No. 1: 113 (2013) (in Russian).
  59. J. Friedel, *Dislocations* (Oxford: Pergamon: 1964).
  60. J.P. Hirth and J. Lothe, *Theory of Dislocations* (New York: McGraw-Hill Book Comp.: 1970)
  61. M. Zaiser and A. Seeger, *Dislocations in Solids* (Amsterdam: Elsevier: 2002).
  62. L.B. Zuev and V.I. Danilov, *Phil. Mag. A*, **79**, No. 1: 43 (1999).
  63. L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Hidrodinamika* [Fluid Mechanics] (Moscow: Nauka: 1988) (in Russian).
  64. M. Zaiser and E.C. Aifantis, *Int. J. Plasticity*, **22**, No. 8: 1432 (2006).
  65. G.A. Malygin, *Phys. Usp.*, **54**, No. 11: 1091 (2011).
  66. A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskii, and N.S. Piskunov, *Bull. MGU. Ser. A. Matematika i Mekhan.*, **1**, No. 1: 6 (1937).
  67. E.F. Mitshenko, V.A. Sadovnichii, A.Y. Kolesov, and N.Kh. Rozov, *Avtovolnovye Protsessy v Nelineinykh Sredakh s Diffuziei* [Autowave Processes in Nonlinear Media with Diffusion] (Moscow: Fizmatlit: 2010) (in Russian).
  68. V.A. Vasil'ev, Y.M. Romanovskii, and V.G. Yakhno, *Avtovolnovye Protsessy* [Autowave Processes] (Moscow: Nauka: 1987) (in Russian).
  69. J.J. Gilman, *J. Appl. Phys.*, **36**, No. 9: 2772 (1965).
  70. L.B. Zuev, *Izvestia RAN. Ser. Fizicheskaya*, **78**, No. 10: 957 (2014) (in Russian).
  71. R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford: University Press, 1998).
  72. A.V. Porubov, *Lokalizatsiya Nelineinykh Voln Deformatsii* [The Localization of Non-Linear Waves of Deformation] (Moscow: Fizmatlit: 2009) (in Russian).
  73. L.B. Zuev and B.S. Semukhin, *Phil. Mag. A*, **82**, No. 6: 1183 (2002).
  74. K. Otsuka and K. Shimizu, *Int. Met. Rev.*, **31**, No. 3: 93 (1986).
  75. E.M. Nadgornyy, *Nesovershenstva Kristallicheskogo Stroeniya i Martensitnye Prevrashcheniya* [Imperfection of the Crystalline Structure and Martensitic Transformations] (Moscow: Nauka: 1972) (in Russian).

76. T. Suzuki, H. Yoshinaga, and S. Takeuchi, *Dynamics of Dislocations and Plasticity* (Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag: 1991).
77. V.I. Alshits and V.L. Indenbom, *Dislocations in Solids. Vol. 12* (Eds. F.R.N. Nabarro and J.P. Hirth) (Amsterdam: Elsevier: 2004).
78. S.A. Barannikova, M. V. Nadezhkin, and L. B. Zuev, *Phys. Solid State*, **52**, No. 7: 1382 (2010).
79. S.A. Barannikova, M.V. Nadezhkin, and L.B. Zuev, *Tech. Phys. Lett.*, **37**: 750 (2011).
80. L.B. Zuev, S.A. Barannikova, M.V. Nadezhkin, and V.V. Gorbatenko, *J. Min. Sci.*, **50**, No. 1: 43 (2014).
81. L.B. Zuev, S.A. Barannikova, and V.I. Danilov, *Crystallogr. Rep.*, **54**, No. 6: 1011 (2009).
82. L.B. Zuev and S.A. Barannikova, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **31**, No. 5: 711 (2009) (in Russian).
83. L.B. Zuev and S.A. Barannikova, *Int. J. Mech. Sci.*, **88**, No. 12: 1 (2014).
84. P. Hähner, *Appl. Phys. A*, **58**, No. 4: 41 (1994).
85. E.C. Aifantis, *Acta Mech.*, **225**, Nos. 4–5: 999 (2014).
86. D. Caillard, *Acta Mater.*, **58**, No. 9: 3493 (2010).
87. E.V. Kozlov, V.A. Starenchenko, and N.A. Koneva, *Metally*, No. 5: 152 (1993) (in Russian).
88. B.A. Movchan, S.A. Firstov, and Yu.F. Lugovskoy, *Struktura, Prochnost' i So-protiivlenie Ustalosti Mikrokristallicheskikh i Mikrosloinykh Materialov* [Structure, Strength and Resistance of Fatigue of Microcrystalline and Microlayer Materials] (Kiev: Naukova Dumka: 2015) (in Russian).

Received May 21, 2018;  
in final version, October 14, 2018

Л.Б. Зуєв, С.А. Бараннікова, А.Г. Лунєв

Інститут фізики міцності та матеріалознавства СВ РАН,  
просп. Академічний, 2/4; 634055 Томськ, Росія

#### ПРУЖНОПЛАСТИЧНИЙ ІНВАРІАНТ ДЕФОРМАЦІЇ МЕТАЛІВ

Розглядається основна характеристика розвитку локалізованої пластичної течії — пружно-пластичний інваріант деформації, — на прикладі деформації дев'ятнадцятих різних металів. Показано, що розподіл експериментально одержуваних значень інваріанту підпорядковується нормальному закону розподілу. Розглядається природа інваріанту та її наслідки, які описують найбільш важливі закономірності розвитку локалізованої пластичної течії. Встановлено, що з рівняння інваріанту можуть бути одержаними основні характеристики автохвильових процесів розвитку локалізованої пластичності, наприклад, швидкість і дисперсія автохвиль. Можуть бути розрахованими співвідношення між масштабами розвитку локалізованої пластичності, а також залежність довжини автохвилі від структурних параметрів матеріалу. Встановлено зв'язок вимірюваної величини інваріанту з розташуванням досліджуваного металу в Періодичній системі елементів (Менделєєва).

**Ключові слова:** метал, деформація, пластичність, структура, локалізація, зміцнювання, автохвилі, дислокації

*L.B. Zuev, S.A. Barannikova, and A.G. Lunev*

Institute of Strength Physics and Materials Science SB R.A.S.,

2/4 Akademicheskii Ave., 634055 Tomsk, Russia

#### ELASTOPLASTIC STRAIN INVARIANT OF METALS

The principal characteristic of localized plastic-flow development, known as the elastoplastic invariant of deformation, is investigated for nineteen various metals. As shown, the distribution of the experimentally obtained values of the invariant can be described by the normal distribution law. The origin of the invariant and the consequences, which describe the most important features of localized plastic flow, are discussed. As established, the principal characteristics of autowave processes of localized plasticity development, for instance, the rate and dispersion, can be calculated. It is possible to calculate the relations between the scales of localized plasticity development as well as the dependence of autowave length on the structure characteristics of metals. The relationship between the measurable invariant value and the position of metal in the (Mendeleev) Periodic table is established.

**Keywords:** metal, deformation, plasticity, structure, localization, strengthening, autowaves, dislocations.