

Ю.В. Свищёв

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины

12, ул. Акад. Проскуры, Харьков, 61085, Украина

E-mail: YuSvishchov@gmail.com

Взаимодействие собственных колебаний в сферическом диэлектрическом резонаторе

Предмет и цель работы. Известно, что при изменении относительной диэлектрической проницаемости шара для некоторых его собственных частот и соответствующих собственных колебаний характерно аномальное поведение (отклонение от нормы в поведении собственных частот, трансформация собственных колебаний). Целью настоящей работы является изучение закономерностей аномального поведения спектральных характеристик диэлектрического шара.

Методы и методология работы. Для достижения поставленной цели приведено решение соответствующей спектральной задачи. Метод решения основан на представлении электромагнитного поля в виде разложения по векторным сферическим волновым функциям.

Результаты работы. Выполнен расчет зависимостей первых собственных частот сферического диэлектрического резонатора от относительной диэлектрической проницаемости шара. Предложен способ классификации собственных колебаний. Он основан на структуре собственных колебаний. Показано, что аномальное поведение спектральных характеристик диэлектрического шара соответствует хорошо известному явлению междутиповой связи колебаний. В качестве управляющего параметра этого явления используется относительная диэлектрическая проницаемость шара. Установлено, что взаимодействуют внутренняя и внешняя моды. При изменении диэлектрической проницаемости возможно многократное преобразование мод.

Заключение. Результаты проведенных исследований позволяют объяснить природу аномального поведения спектральных характеристик сферического диэлектрического резонатора. Ил. 5. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: сферический диэлектрический резонатор, собственная частота, взаимодействие собственных колебаний.

Уравнения для собственных частот сферических диэлектрических резонаторов впервые были получены Г. Ми и П. Дебаем в 1908–1909 гг. [1, 2]. Численный расчет комплексных собственных частот для широкого интервала изменения диэлектрической проницаемости впервые был выполнен в [3]. Несмотря на то, что свойства сферических диэлектрических резонаторов исследуются более ста лет и им посвящено обширнейшее множество публикаций (см., например, [4, 5] и имеющиеся там ссылки), некоторые их свойства и на сегодня требуют дальнейшего изучения.

В частности, в работе [5] было отмечено, что существует взаимное влияние (взаимодей-

ствие, взаимосвязь) внутренних и внешних E -мод диэлектрического шара в случае, когда почти равны (или даже равны) действительные части их собственных частот. Это явление не означает реальное вырождение участвующих мод, так как действительные или мнимые части собственных частот на самом деле не равны (в [5] речь идет о квазивырождении внутренних и внешних мод). Явление не было обнаружено в случае H -мод. В [5] отмечено также, что, изменяя значение диэлектрических потерь в резонаторе и тем самым влияя на мнимую часть собственных частот, можно получить разные эффекты вырождения. При этом делается предположение, что описанное явление определяется

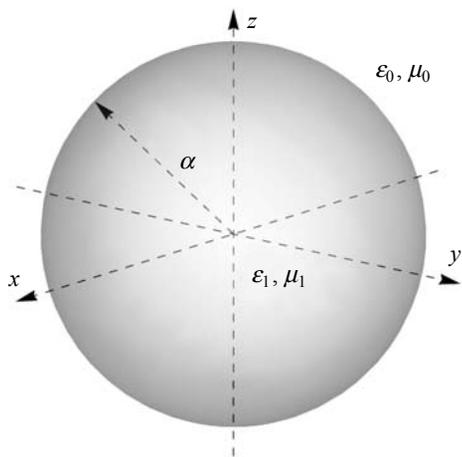


Рис. 1. Диэлектрический шар

в значительной степени именно наличием потерь в диэлектрическом шаре.

Целью настоящей работы является изучение природы такого аномального поведения спектральных характеристик сферического диэлектрического резонатора.

1. Задача дифракции. Пусть в однородной изотропной среде (область D_0) имеется однородный изотропный диэлектрический шар радиусом a (область D_1 ; см. рис. 1). Область D_s ($s = 0,1$) характеризуется относительной диэлектрической ϵ_s и относительной магнитной μ_s проницаемостями ($\epsilon_0 > 0, \mu_0 > 0$). Волновое число в области D_s определяется как $k_s = k\sqrt{\epsilon_s\mu_s}$, где $k = \omega / c$ – волновое число в вакууме. Падающее на шар поле (комплексные амплитуды) обозначим как $(\vec{E}^{inc}, \vec{H}^{inc})$. Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) , связанную с центром диэлектрического шара ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ – орты сферической системы координат). Полное поле будем искать в виде

$$(\vec{E}, \vec{H}) = \begin{cases} (\vec{E}^{inc}, \vec{H}^{inc}) + (\vec{E}^0, \vec{H}^0), & r > a, \\ (\vec{E}^1, \vec{H}^1), & r < a. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее предполагается, что зависимость полей от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$; неравенство $r > a$ определяет область D_0 , а неравенство $r < a$ – область D_1 .

Краевая задача дифракции формулируется следующим образом. Требуется определить векторные поля (\vec{E}^0, \vec{H}^0) и (\vec{E}^1, \vec{H}^1) , удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \vec{E}^s = ik\mu_s \vec{H}^s, \quad \nabla \times \vec{H}^s = -ik\epsilon_s \vec{E}^s \quad (2)$$

в областях D_s ($s = 0,1$), граничным условиям

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \times \vec{E}^{inc} + \vec{e}_r \times \vec{E}^0 &= \vec{e}_r \times \vec{E}^1, \\ \vec{e}_r \times \vec{H}^{inc} + \vec{e}_r \times \vec{H}^0 &= \vec{e}_r \times \vec{H}^1 \end{aligned} \quad (3)$$

на поверхности шара и условию излучения Сильвера–Мюллера

$$\vec{e}_r \times \sqrt{\mu_0} \vec{H}^0 + \sqrt{\epsilon_0} \vec{E}^0 = o(r^{-1}) \quad (4)$$

при $r \rightarrow \infty$ равномерно по всем направлениям \vec{e}_r . При определенных условиях гладкости задача (1)–(4) имеет единственное решение [6].

Из уравнений Максвелла (2) (учитывая, что $\nabla \cdot \vec{E}^s = 0, \nabla \cdot \vec{H}^s = 0$) может быть получено векторное уравнение Гельмгольца для электрического поля:

$$\Delta \vec{E}^s + k_s^2 \vec{E}^s = 0. \quad (5)$$

Магнитное поле определяется при таком подходе из первого уравнения Максвелла:

$$\vec{H}^s = \frac{1}{ik\mu_s} \nabla \times \vec{E}^s.$$

Линейно независимыми решениями уравнения (5) в сферической системе координат являются [7] векторные сферические волновые функции (*VSWF*, англ. *vector spherical wave functions*) [7, 8]:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s) &= n(n+1) \frac{\xi_n^{(l)}(k_s r)}{(k_s r)^2} \vec{P}_{mn}(\theta, \varphi) + \\ &+ \frac{\xi_n^{(l)'}(k_s r)}{k_s r} \vec{B}_{mn}(\theta, \varphi), \\ \vec{M}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s) &= \frac{\xi_n^{(l)}(k_s r)}{k_s r} \vec{C}_{mn}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi_n^{(1)}(z) = \psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+1/2}(z)$, $\xi_n^{(3)}(z) = \zeta_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ – функции Риккати–Бесселя первого и третьего рода; $J_{n+1/2}(z)$, $H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ – функции Бесселя и Ханкеля полуцелого индекса. Векторные сферические гармоники, входящие в (6), имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{P}_{mn}(\theta, \varphi) &= P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \vec{e}_r, \\ \vec{B}_{mn}(\theta, \varphi) &= \left\{ \tau_n^m(\theta) \vec{e}_\theta + im\pi_n^m(\theta) \vec{e}_\varphi \right\} e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{mn}(\theta, \varphi) = \left\{ i\pi\tau_n^m(\theta)\bar{e}_\theta - \tau_n^m(\theta)\bar{e}_\varphi \right\} e^{im\varphi},$$

$$\text{где } \tau_{mn}(\theta) = \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}, \quad \pi_{mn}(\theta) = \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta},$$

$P_n^m(\cos\theta)$ – ортонормированные присоединенные функции Лежандра [9]. Поскольку $\nabla \times \bar{M}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s) = k_s \bar{N}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s)$, $\nabla \times \bar{N}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s) = k_s \bar{M}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s)$, поле (\bar{E}^s, \bar{H}^s) представимо в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}^s(\bar{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{mn}^s \bar{N}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s) + \right. \\ &\quad \left. + B_{mn}^s \bar{M}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s) \right], \\ \bar{H}^s(\bar{r}) &= \frac{k_s}{ik\mu_s} \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{mn}^s \bar{M}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s) + \right. \\ &\quad \left. + B_{mn}^s \bar{N}_{mn}^{(l)}(\bar{r}, k_s) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где A_{mn}^s и B_{mn}^s – произвольные константы.

Наряду с *VSWF* (6), применение находят *VSWF* $\bar{N}_{mn}^{e(l)}$, $\bar{N}_{mn}^{o(l)}$ и $\bar{M}_{mn}^{e(l)}$, $\bar{M}_{mn}^{o(l)}$:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{mn}^{\left\{ \begin{smallmatrix} e(l) \\ o(l) \end{smallmatrix} \right\}}(\bar{r}, k_s) &= n(n+1) \frac{\xi_n^{(l)}(k_s r)}{(k_s r)^2} \times \\ &\times P_n^m(\cos\theta) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{smallmatrix} \right\} \bar{i}_r + \\ &+ \frac{\xi_n^{(l)}(k_s r)}{k_s r} \left[\tau_{mn}(\theta) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{smallmatrix} \right\} \bar{i}_\theta + \right. \\ &\quad \left. + m\pi_{mn}(\theta) \left\{ \begin{smallmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{smallmatrix} \right\} \bar{i}_\varphi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{mn}^{\left\{ \begin{smallmatrix} e(l) \\ o(l) \end{smallmatrix} \right\}}(\bar{r}, k_s) &= \frac{\xi_n^{(l)}(k_s r)}{k_s r} \times \\ &\times \left[m\pi_{mn}(\theta) \left\{ \begin{smallmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{smallmatrix} \right\} \bar{i}_\theta - \right. \\ &\quad \left. - \tau_{mn}(\theta) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{smallmatrix} \right\} \bar{i}_\varphi \right], \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 2\bar{N}_{mn}^{e(l)} \\ 2i\bar{N}_{mn}^{o(l)} \end{smallmatrix} \right\} = \bar{N}_{mn}^{(l)} \pm (-1)^m \bar{N}_{-mn}^{(l)},$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 2\bar{M}_{mn}^{e(l)} \\ 2i\bar{M}_{mn}^{o(l)} \end{smallmatrix} \right\} = \bar{M}_{mn}^{(l)} \pm (-1)^m \bar{M}_{-mn}^{(l)}.$$

В терминах этих *VSWF* представления для полей вида (9) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{E}^s(\bar{r}) &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=(m,1)}^{\infty} \left[\left\{ A_{mn}^{s(+)} \bar{N}_{mn}^{e(l)} + iA_{mn}^{s(-)} \bar{N}_{mn}^{o(l)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ B_{mn}^{s(+)} \bar{M}_{mn}^{e(l)} + iB_{mn}^{s(-)} \bar{M}_{mn}^{o(l)} \right\} \right], \\ \bar{H}^s(\bar{r}) &= \frac{k_s}{ik\mu_s} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=(m,1)}^{\infty} \left[\left\{ A_{mn}^{s(+)} \bar{M}_{mn}^{e(l)} + iA_{mn}^{s(-)} \bar{M}_{mn}^{o(l)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ B_{mn}^{s(+)} \bar{N}_{mn}^{e(l)} + iB_{mn}^{s(-)} \bar{N}_{mn}^{o(l)} \right\} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где знаки «+» и «-» в верхних индексах коэффициентов $A_{mn}^{s(\pm)}$ и $B_{mn}^{s(\pm)}$ обозначают преобразования вида $h_{mn}^{(\pm)} \stackrel{\text{def}}{=} \left[h_{mn} \pm (-1)^m h_{-mn} \right] [1 + \delta_{m0}]^{-1}$ и $(m, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \max(m, 1)$.

Будем предполагать, что падающее поле $(\bar{E}^{inc}, \bar{H}^{inc})$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}^{inc}(\bar{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\alpha_{mn} \bar{N}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_0) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{mn} \bar{M}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_0) \right], \\ \bar{H}^{inc}(\bar{r}) &= \frac{k_0}{ik\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\alpha_{mn} \bar{M}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_0) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{mn} \bar{N}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_0) \right], \end{aligned}$$

где α_{mn} и β_{mn} – известные коэффициенты. Полное поле будем искать в виде (1), где

$$\begin{aligned} \bar{E}^0(\bar{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\bar{C}_{mn}^0 \bar{N}_{mn}^{(3)}(\bar{r}, k_0) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{D}_{mn}^0 \bar{M}_{mn}^{(3)}(\bar{r}, k_0) \right], \\ \bar{H}^0(\bar{r}) &= \frac{k_0}{ik\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\bar{C}_{mn}^0 \bar{M}_{mn}^{(3)}(\bar{r}, k_0) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{D}_{mn}^0 \bar{N}_{mn}^{(3)}(\bar{r}, k_0) \right], \\ \bar{E}^1(\bar{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[C_{mn}^1 \bar{N}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_1) + \right. \\ &\quad \left. + D_{mn}^1 \bar{M}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_1) \right], \\ \bar{H}^1(\bar{r}) &= \frac{k_1}{ik\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[C_{mn}^1 \bar{M}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_1) + \right. \\ &\quad \left. + D_{mn}^1 \bar{N}_{mn}^{(1)}(\bar{r}, k_1) \right], \end{aligned}$$

где \bar{C}_{mn}^0 , \bar{D}_{mn}^0 , C_{mn}^1 , D_{mn}^1 – неизвестные коэффициенты.

Удовлетворим граничным условиям (3) на поверхности шара, воспользовавшись представлениями

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \times \vec{N}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s) &= \frac{\xi_n^{(l)}(k_s r)}{k_s r} \cdot \vec{B}_{mn}(\theta, \varphi), \\ \vec{e}_r \times \vec{M}_{mn}^{(l)}(\vec{r}, k_s) &= \frac{\xi_n^{(l)}(k_s r)}{k_s r} \cdot \vec{C}_{mn}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

и ортогональностью векторных сферических гармоник ($\delta_{m\mu}$ – символ Кронекера)

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{B}_{mn} \vec{C}_{\mu\nu}^* \sin\theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{C}_{mn} \vec{B}_{\mu\nu}^* \sin\theta d\theta d\varphi = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{B}_{mn} \vec{B}_{\mu\nu}^* \sin\theta d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi(-1)^m n(n+1)\delta_{m\mu}\delta_{n\nu}, \\ &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{C}_{mn} \vec{C}_{\mu\nu}^* \sin\theta d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi(-1)^m n(n+1)\delta_{m\mu}\delta_{n\nu}. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножая условия (3) на $\vec{B}_{mn}^*(\theta, \varphi)$ и $\vec{C}_{mn}^*(\theta, \varphi)$ и учитывая (9), (10), получаем две независимые системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{mn}\psi_n(k_0 a) + \bar{C}_{mn}^0 \zeta_n(k_0 a) = \\ = \frac{\mu_0}{\mu_1} C_{mn}^1 \psi_n(k_1 a), \\ \alpha_{mn}\psi'_n(k_0 a) + \bar{C}_{mn}^0 \zeta'_n(k_0 a) = \\ = \frac{k_0}{k_1} C_{mn}^1 \psi'_n(k_1 a); \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \beta_{mn}\psi_n(k_0 a) + \bar{D}_{mn}^0 \zeta_n(k_0 a) = \\ = \frac{k_0}{k_1} D_{mn}^1 \psi_n(k_1 a), \\ \beta_{mn}\psi'_n(k_0 a) + \bar{D}_{mn}^0 \zeta'_n(k_0 a) = \\ = \frac{\mu_0}{\mu_1} D_{mn}^1 \psi'_n(k_1 a). \end{cases} \quad (12)$$

Система линейных алгебраических уравнений (11) описывает поля электрического типа (E -типа или TM -типа), а система линейных алгебраических уравнений (12) – поля магнитного типа (H -типа или TE -типа). Системы линей-

ных алгебраических уравнений (11), (12) имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} C_{mn}^1 &= i\alpha_{mn} / \Delta_n(\mu_0 / \mu_1, k_0 / k_1; k_1 a, k_0 a), \\ \bar{C}_{mn}^0 &= i\delta_n(\mu_0 / \mu_1, k_0 / k_1; k_1 a, k_0 a) C_{mn}^1, \\ D_{mn}^1 &= i\beta_{mn} / \Delta_n(k_0 / k_1, \mu_0 / \mu_1; k_1 a, k_0 a), \\ \bar{D}_{mn}^0 &= i\delta_n(k_0 / k_1, \mu_0 / \mu_1; k_1 a, k_0 a) D_{mn}^1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n(x, y; v, w) &\stackrel{def}{=} x\psi_n(v)\zeta'_n(w) - y\psi'_n(v)\zeta_n(w), \\ \delta_n(x, y; v, w) &\stackrel{def}{=} x\psi_n(v)\psi'_n(w) - y\psi'_n(v)\psi_n(w). \end{aligned}$$

2. Задача на собственные колебания. Перейдем к изучению собственных колебаний диэлектрического шара, т. е. электромагнитных полей, которые могут иметь место в отсутствие падающего поля. Полагая коэффициенты α_{mn} , β_{mn} падающего поля равными нулю, систему линейных алгебраических уравнений (11), (12) сведем к однородным системам линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \bar{C}_{mn}^0 \zeta_n(k_0 a) = \frac{\mu_0}{\mu_1} C_{mn}^1 \psi_n(k_1 a), \\ \bar{C}_{mn}^0 \zeta'_n(k_0 a) = \frac{k_0}{k_1} C_{mn}^1 \psi'_n(k_1 a); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \bar{D}_{mn}^0 \zeta_n(k_0 a) = \frac{k_0}{k_1} D_{mn}^1 \psi_n(k_1 a), \\ \bar{D}_{mn}^0 \zeta'_n(k_0 a) = \frac{\mu_0}{\mu_1} D_{mn}^1 \psi'_n(k_1 a). \end{cases} \quad (14)$$

Система линейных алгебраических уравнений (13) описывает собственные колебания электрического типа (E -моды или TM -моды), а система линейных алгебраических уравнений (14) – собственные колебания магнитного типа (H -моды или TE -моды).

Из условия существования нетривиальных решений этих СЛАУ получаем уравнения для нахождения собственных частот диэлектрического шара:

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_0}{\mu_1} \psi_n(k_1 a) \zeta'_n(k_0 a) - \\ &- \frac{k_0}{k_1} \psi'_n(k_1 a) \zeta_n(k_0 a) = 0 \quad (E\text{-моды}); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{k_0}{k_1} \psi_n(k_1 a) \zeta'_n(k_0 a) - \frac{\mu_0}{\mu_1} \psi'_n(k_1 a) \zeta_n(k_0 a) = 0 \quad (H\text{-моды}). \quad (16)$$

Полагая известными C_{mn}^1 и D_{mn}^1 , находим

$$\bar{C}_{mn}^0 = \frac{\mu_0 \psi_n(k_1 a)}{\mu_1 \zeta_n(k_0 a)} C_{mn}^1, \\ \bar{D}_{mn}^0 = \frac{k_0 \psi_n(k_1 a)}{k_1 \zeta_n(k_0 a)} D_{mn}^1.$$

3. Краткий анализ собственных колебаний.

Собственные колебания изотропного диэлектрического шара делятся на два семейства: 1) колебания электрического типа (E -моды или TM -моды); 2) колебания магнитного типа (H -моды или TE -моды). Собственные частоты этих колебаний находятся соответственно из уравнений (15) и (16). Азимутальный индекс m не входит в уравнения (15) и (16), т. е. имеет место вырождение собственных частот по индексу m . Кратность вырождения равна $2n + 1$ – этот результат следует из представления (13). Для E -мод нормированной собственной частоте $k_{nq} a = (\omega_{nq} / c) a$ (q – номер корня уравнения (15)) соответствуют моды E_{mnq}^e ($m = 0, \dots, n$), описываемые полями $\vec{E}_{mnq}^s(\vec{r}) = A_{mn}^{s(+)} \vec{N}_{mn}^{e(l)}$, $\vec{H}_{mnq}^s(\vec{r}) = (k_s / ik \mu_s) A_{mn}^{s(+)} \vec{M}_{mn}^{e(l)}$, и моды E_{mnq}^o ($m = 1, \dots, n$), описываемые полями $\vec{E}_{mnq}^s(\vec{r}) = i A_{mn}^{s(-)} \vec{N}_{mn}^{o(l)}$, $\vec{H}_{mnq}^s(\vec{r}) = (k_s / ik \mu_s) i A_{mn}^{s(-)} \vec{M}_{mn}^{o(l)}$. Для H -мод нормированной собственной частоте $k_{nq} a = (\omega_{nq} / c) a$ (q – номер корня уравнения (16)) соответствуют моды H_{mnq}^e ($m = 0, \dots, n$), описываемые полями $\vec{E}_{mnq}^s(\vec{r}) = B_{mn}^{s(+)} \vec{M}_{mn}^{e(l)}$, $\vec{H}_{mnq}^s(\vec{r}) = (k_s / ik \mu_s) B_{mn}^{s(+)} \vec{N}_{mn}^{e(l)}$, и моды H_{mnq}^o ($m = 1, \dots, n$), описываемые полями $\vec{E}_{mnq}^s(\vec{r}) = i B_{mn}^{s(-)} \vec{M}_{mn}^{o(l)}$, $\vec{H}_{mnq}^s(\vec{r}) = (k_s / ik \mu_s) i B_{mn}^{s(-)} \vec{N}_{mn}^{o(l)}$.

В [3] было показано, что спектр собственных колебаний сферического диэлектрического резонатора расщепляется на внутренние (поле распределено внутри резонатора) и внешние (поле распределено в окрестности поверхности резонатора или вне его) моды и оказывается более сложным, чем у полых объемных

резонаторов. Он состоит из двух серий, каждой из которых свойственна различная зависимость от диэлектрической проницаемости шара. Соответственно корни характеристических уравнений внутренних и внешних мод целесообразно нумеровать отдельно. Во избежание путаницы для внутренних мод оставляют запись TM_{mnq} или TE_{mnq} , а для внешних мод добавляют штрих при индексе q : $TM_{mnq'}$ или $TE_{mnq'}$. В отличие от работ [3, 5], в настоящей работе колебания классифицируются не по возрастанию реальной части собственной частоты. Колебания классифицируются по структуре электромагнитного поля. Основанием для такой классификации является описанное далее взаимодействие собственных колебаний.

При фиксированном индексе n число внешних мод конечно. Для внешних мод $TM_{mnq'}$ уравнение (15) при нечетном n имеет $(n + 1) / 2$ корней, а при четном $n - 1 + n / 2$ корня (один корень имеет нулевую реальную часть). Подобная картина имеет место и для внешних $TE_{mnq'}$ -мод: при нечетном n уравнение (16) имеет $(n + 1) / 2$ корней (один корень имеет нулевую реальную часть), а при четном $n - 1 + n / 2$ корней.

Собственные частоты TM_{mnq} - и TE_{mnq} -мод сферического диэлектрического резонатора являются комплексными [3]. Комплексная собственная частота означает, что собственные колебания являются затухающими: в любом открытом резонаторе имеются потери на излучение, которые принципиально неустранимы. Спектр собственных частот диэлектрического резонатора качественно меняется в зависимости от величины материальных констант.

4. Взаимодействие собственных колебаний. На рис. 2 и 3 показаны зависимости реальных частей (нормированных) собственных частот $\text{Re}(ka)$ и логарифмов добротностей $\lg(Q)$ ($Q = -0,5 \text{Re}(ka) / \text{Im}(ka)$) первых собственных колебаний TM_{0nq} и $TM_{0nq'}$ ($n = 2, 4$) от величины диэлектрической проницаемости ϵ_1 ($\text{Im}(\epsilon_1) = 0$, $\mu_1 = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$). Из рисунков видно (см. также [3, 5]), что в окрестности некоторых значений ϵ_1 реальные части собственных частот сближаются – образуют график Вина, а добротности (как и мнимые части собственных частот) собственных колебаний пересекаются. На рис. 3 наблюдается второй вариант поведения спектральных кривых: реальные части собственных

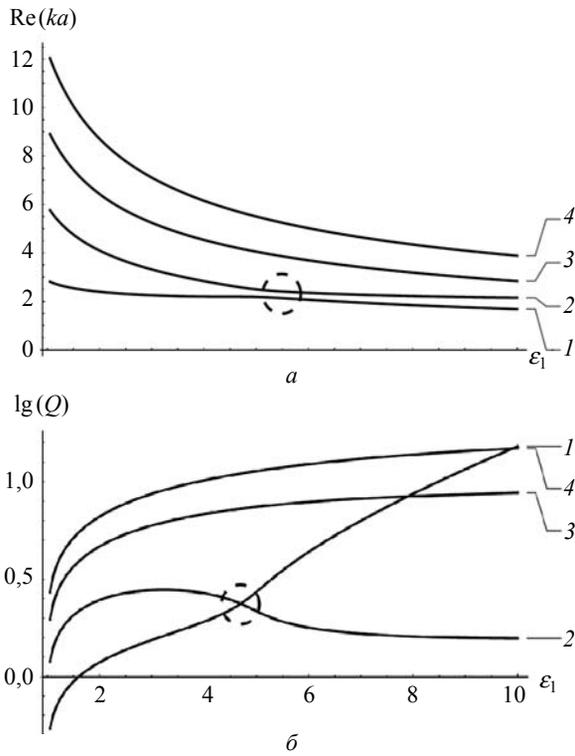


Рис. 2. Графики зависимостей $Re(ka)$ (а) и $lg(Q)$ (б) колебаний $TM_{021'}$ (кривая 1), TM_{021} (кривая 2), TM_{022} (кривая 3), TM_{023} (кривая 4) от ε_1 ($\mu_1 = 1$)

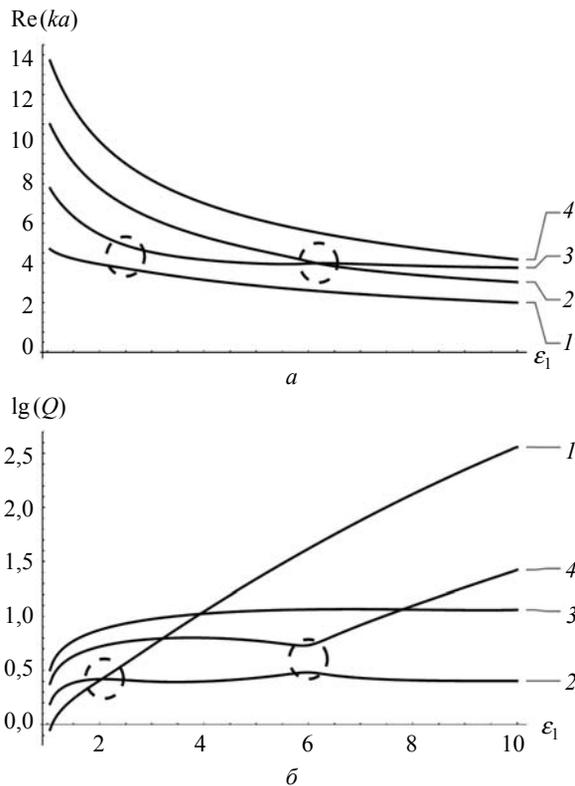


Рис. 3. Графики зависимостей $Re(ka)$ (а) и $lg(Q)$ (б) колебаний $TM_{041'}$ (кривая 1), TM_{041} (кривая 2), TM_{042} (кривая 3), TM_{043} (кривая 4) от ε_1 ($\mu_1 = 1$)

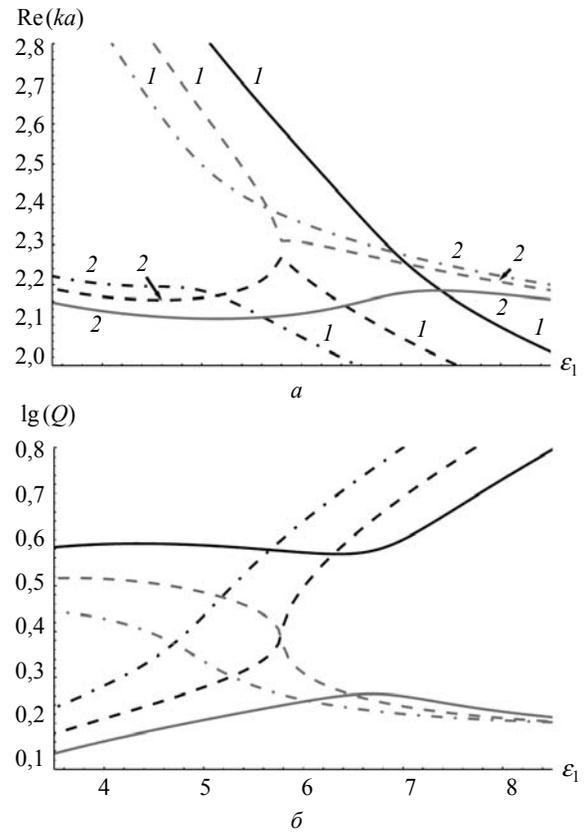


Рис. 4. Графики зависимостей $Re(ka)$ (а) и $lg(Q)$ (б) колебаний TM_{021} (кривая 1) и $TM_{021'}$ (кривая 2) от ε_1 при разных значениях μ_1 : сплошная линия – $\mu_1 = 0,8$; пунктирная линия – $\mu_1 = 0,9$; штрихпунктирная линия – $\mu_1 = 1,0$

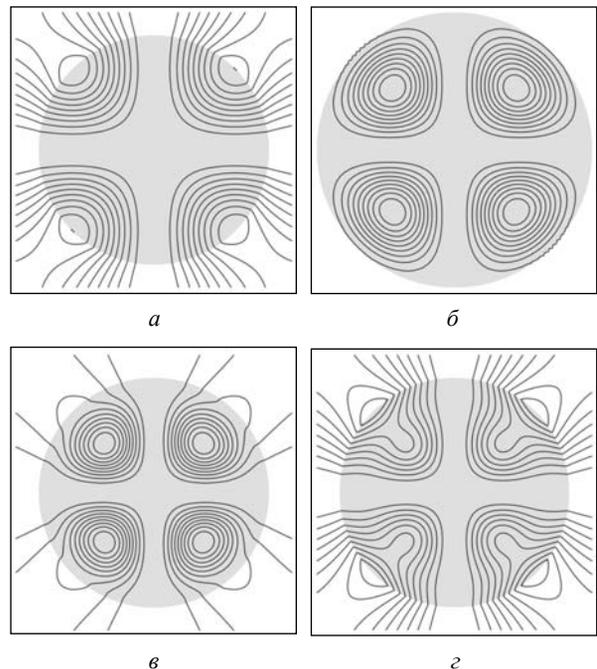


Рис. 5. Распределение $|\vec{H}|$ ($\mu_1 = 1$): а – $\varepsilon_1 = 3$, $ka = 2,256 - 0,731i$; б – $\varepsilon_1 = 9$, $ka = 1,761 - 0,059i$; в – $\varepsilon_1 = 3$, $ka = 3,321 - 0,596i$; г – $\varepsilon_1 = 9$, $ka = 2,181 - 0,689i$

частот пересекаются, а добротности (как и мнимые части собственных частот) собственных колебаний сближаются. На рисунках эти области обозначены кружками.

Описанное anomальное поведение собственных частот побудило автора работы [5] высказать предположение о возможном вырождении внутренних и внешних мод диэлектрического шара. Определяющее влияние на характер поведения спектральных характеристик в условиях квазивырождения, по мнению автора работы [5], имеют потери ($\text{Im}(\varepsilon_1) \neq 0$) в диэлектрическом шаре. Однако изменить поведение спектральных кривых можно и другим способом. На рис. 4 приведены зависимости собственных частот от ε_1 колебаний TM_{021} и TM_{021}' при разных значениях μ_1 : сплошные кривые – $\mu_1 = 0,8$; пунктирные кривые – $\mu_1 = 0,9$; штрихпунктирные кривые – $\mu_1 = 1,0$. При $\mu_1 = 0,8$ кривые реальных частей собственных частот пересекаются, а кривые добротностей собственных колебаний сближаются. При $\mu_1 = 1,0$ кривые реальных частей собственных частот сближаются (образуют график Вина), а кривые добротностей собственных колебаний пересекаются. При $\mu_1 = 0,9$ можно говорить о вырождении собственных частот с графической точностью. Цифрами на рис. 4 обозначены соответствующие типы колебаний. Заметим, что при $\mu_1 = 0,9$ и $\mu_1 = 1,0$ при изменении ε_1 наблюдается обмен типами колебаний. При $\mu_1 = 0,8$ обмена типа колебаний не происходит, наблюдается только гибридизация типов колебаний в некоторой окрестности точки (ε_1) пересечения кривых реальных частей собственных частот. Гибридизация типов колебаний происходит и при $\mu_1 = 0,9$ и $\mu_1 = 1,0$ в некоторой окрестности точки (ε_1) максимального сближения реальных частей собственных частот. На рис. 5 приведено распределение полей колебаний TM_{021} и TM_{021}' в случае обмена типами колебаний ($\mu_1 = 1,0$). Поля на рис. 5, а и б отвечают штрихпунктирной спектральной кривой черно-

го цвета на рис. 4, а, в и з – штрихпунктирной спектральной кривой серого цвета. Заметим, что возможно многократное преобразование мод (рис. 3).

Описанное поведение собственных частот, добротностей собственных колебаний, структуры собственных колебаний при изменении значений материальных параметров (в частности, диэлектрической проницаемости или диэлектрических потерь) достаточно хорошо известно в литературе (см., например, [10, 11]) и определяется как явление междутиповой связи колебаний. В работе [11] рассмотрено взаимодействие собственных колебаний диэлектрического шара с собственными колебаниями открытого резонатора, но закономерности этого явления те же, что описаны выше. Таким образом, anomальное поведение спектральных характеристик сферического диэлектрического резонатора является следствием междутиповой связи колебаний, которая имеет место в рассматриваемом резонаторе.

Выводы. Приведены решения задачи дифракции и спектральной задачи для сферического диэлектрического резонатора. Решения основаны на представлении электромагнитного поля в виде разложения по векторным сферическим волновым функциям.

Проведен расчет зависимостей первых собственных частот сферического диэлектрического резонатора от относительной диэлектрической проницаемости шара. Предложен способ классификации собственных колебаний. Он основан на структуре собственных колебаний.

Обнаружено и исследовано явление междутиповой связи колебаний в диэлектрическом шаре. В качестве управляющего параметра этого явления используется относительная диэлектрическая проницаемость шара. Установлено, что взаимодействуют внутренняя и внешняя моды. Показано, что при изменении диэлектрической проницаемости возможно многократное преобразование мод.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Mie G. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Ann. Phys.* 1908. Bd. 25, F. 4. S. 377–445. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19083300302>.
2. Debye P. Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. *Ann. Phys.* 1909. Bd. 30, F. 1. S. 57–136. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19093351103>.
3. Gastine M., Courtois L., Dorman J. Electromagnetic resonances of free dielectric spheres. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1967. Vol. 15, Iss. 12. P. 694–700. DOI: <https://doi.org/10.1109/TMTT.1967.1126568>.

4. Wolff I. Electromagnetic fields in spherical microwave resonators – fundamental mathematics. *Research Gate*. 2017. June. 43 p.
5. Wolff I. Electromagnetic Fields in Spherical Microwave Resonators H-Modes and E-Modes in Lossless Open Dielectric Spheres. *Research Gate*. 2018. May. 38 p.
6. Müller C. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1969. 356 p.
7. Stratton J. *Electromagnetic Theory* New York: McGraw-Hill Book Company, 1941. 615 p.
8. Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики*. Пер. с англ. под ред. С.П. Аллилуева. Том 2. Москва: Иностр. лит., 1960. 896 с.
9. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Пер. с англ. И.Г. Арамановича. М.: Наука, 1977. 832 с.
10. Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П. Об аналитической природе явления междутиповой связи собственных колебаний. *Докл. АН СССР*. 1988. Т. 300, № 6. С. 1356–1359.
11. Свищев Ю.В. Резонансное повышение добротности собственных колебаний электрического типа в открытом резонаторе с диэлектрическим шаровым включением. *Радиофизика та електроніка*. 2011. Т. 2(16), № 4. С. 20–26.

Стаття надійшла 30.05.2019

REFERENCES

1. Mie, G., 1908. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Ann. Phys.*, **25**(4), ss. 377–445. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19083300302>.
2. Debye, P., 1909. Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. *Ann. Phys.*, **30**(1), ss. 57–136. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19093351103>.
3. Gastine, M., Courtois, L., Dorman, J., 1967. Electromagnetic resonances of free dielectric spheres. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **15**(12), pp. 694–700. DOI: <https://doi.org/10.1109/TMTT.1967.1126568>.
4. Wolff, I., 2017. Electromagnetic fields in spherical microwave resonators – fundamental mathematics. *Research Gate*, June, 43 p.
5. Wolff, I., 2018. Electromagnetic Fields in Spherical Microwave Resonators H-Modes and E-Modes in Lossless Open Dielectric Spheres. *Research Gate*, May, 38 p.
6. Müller, C., 1969. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
7. Stratton, J., 1941. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill Book Company.
8. Morse, F.M., Feshbach, G., 1960. *Methods of Theoretical Physics*. Translated from English and ed. by S.P. Alliluev. Moscow: Inostrannaya literatura Publ. Vol. 2 (in Russian).
9. Korn, G., Korn, T., 2000. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Translated from English by I.G. Aramanovich. Moscow: Nauka Publ. (in Russian).
10. Melezhih, P.N., Poedinchuk, A.E., Tuchkin, Yu.A., Shestopalov, V.P., 1988. On the Analytical Nature of the Phenomenon of Intertype Relationship of Natural Oscillations. *Dok. Akad. Nauk SSSR*, **300**(6), pp. 1356–1359 (in Russian).
11. Svishchov, Yu., 2011. Resonant increase of electrical-type eigenmode quality of an open resonator with a spherical dielectric insert. *Radiof. Elektron.*, **2**(16)(4), pp. 20–26 (in Russian).

Received 30.05.2019

Yu. V. Svishchov

O.Ya. Usikov IRE of NASU
12, Acad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

THE EIGENMODE INTERACTION IN A SPHERICAL DIELECTRIC RESONATOR

Subject and Purpose. It is known that varying the relative dielectric constant of a dielectric spherical ball causes disturbances in the normal behavior of some of its eigenfrequencies and corresponding eigenoscillations, going with the transformation of the latters. The purpose of the work is studying the laws of this anomalous behavior of spectral characteristics of a spherical dielectric resonator.

Methods and Methodology. To achieve the goal, the corresponding spectral problem is solved. The solution method is based on the electromagnetic field expansion in vector spherical wave functions.

Results. For a spherical dielectric resonator, numerical curves of the first eigenfrequencies were obtained depending on the relative dielectric constant of the sphere. A method is suggested for identifying eigenoscillations based on their structure. It is found that the anomalous behavior of spectral characteristics of a dielectric sphere corresponds to the well-known phenomenon of intertype mode coupling of the oscillations. Also, as shown, it is the relative dielectric constant of the sphere that is a control parameter of the considered phenomenon. It is established that the interaction holds between internal and external modes. And as the dielectric constant varies, multiple mode conversion is possible.

Conclusions. The results of the conducted studies allow us to explain the nature of the anomalous behavior of the spectral characteristics of a spherical dielectric resonator.

Key words: spherical dielectric resonator; eigenfrequency; eigenmode interaction.

Ю.В. Свищов

ІРЕ ім. О.Я. Усикова НАН України
12, вул. Акад. Проскури, Харків, 61085, Україна

ВЗАЄМОДІЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ У СФЕРИЧНОМУ ДІЕЛЕКТРИЧНОМУ РЕЗОНАТОРІ

Предмет і мета роботи. Відомо, що у випадку зміни відносної діелектричної проникності кулі для деяких її власних частот та відповідних їм власних коливань має місце аномальна поведінка (відхилення від норми в поведінці власних частот, трансформація власних коливань). Метою цієї роботи є вивчення закономірностей аномальної поведінки спектральних характеристик діелектричної кулі.

Методи і методологія роботи. Для досягнення поставленої мети наведено розв'язок відповідної спектральної задачі. Основою методу розв'язання задачі було подання електромагнітного поля у вигляді розкладання за векторними сферичними хвильовими функціями.

Результати роботи. Виконано розрахунок залежностей перших власних частот сферичного діелектричного резонатора від відносної діелектричної проникності кулі. Запропоновано спосіб класифікації власних коливань. Основою цього способу є структура власних коливань. Показано, що аномальна поведінка спектральних характеристик діелектричної кулі відповідає добре відомому явищу міжтипového зв'язку коливань. У якості керуючого параметра стосовно цього явища було використано відносну діелектричну проникність кулі. Встановлено, що взаємодіють внутрішня та зовнішня моди. При зміні діелектричної проникності можливе багаторазове перетворення мод.

Висновок. Результати проведених досліджень дають можливість пояснити природу аномальної поведінки спектральних характеристик сферичного діелектричного резонатора.

Ключові слова: *сферичний діелектричний резонатор, власна частота, взаємодія власних коливань.*