

СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

DOI: <https://doi.org/10.15407/rpra25.01.003>

УДК 621.372(075.8)

О. В. ЛАЗОРЕНКО, Л. Ф. ЧЕРНОГОР

PACS numbers: 05.45.Df,
05.45.Tp

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: Oleg.V.Lazorenko@karazin.ua; Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua

ФРАКТАЛЬНАЯ РАДІОФІЗИКА. 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Предмет и цель работы: В настоящее время наблюдается тенденция к “фрактализации” науки. Не является исключением и радиофизика. Предметом представленной работы является обзор основных идей “фрактализации”, математических основ современных фрактальных методов описания и исследования окружающего мира. Цель работы – изложение основных понятий, определений и соотношений современной теории фракталов, а также классификация и анализ существующих числовых характеристик фракталов.

Методы и методология: Рассмотрены методы построения геометрических монофракталов и мультифракталов. Дается сравнительная характеристика методов оценки размерности физических фракталов. Приводятся примеры физических фракталов.

Результаты: В развитии “фрактализации” науки выделено 4 этапа: эпоха “монстров”, подготовительный этап, этап становления и развития, современный этап. Для корректного описания фракталов используется размерность Хаусдорфа–Безиковича, которая может принимать и нецелочисленные значения. Рассмотрены следующие классификации фракталов: математические и физические, геометрические и алгебраические, моно- и мультифракталы, регулярные и стохастические, однородные и неоднородные. Продемонстрировано, что фрактальная размерность объектов может быть как дробной, так и целочисленной, важно, чтобы фрактальная размерность была больше их топологической размерности. Из равенства фрактальных размерностей двух объектов не следует подобия их структуры. При описании толстых фракталов как регулярных монофракталов вместо размерности Хаусдорфа–Безиковича применяются показатели скейлинга.

Заключение: Изложены математические основы теории фракталов, используемой в современной теоретической радиофизике.

Ключевые слова: фрактал, фрактальная размерность, классификация фракталов, монофрактал, мультифрактал, мультифрактальный формализм, виды размерности, скейлинг

Содержание

Введение

1. Основные понятия и определения

1.1. Краткая историческая справка

1.2. Этапы становления фрактального подхода

1.3. Определение фрактала

1.4. Евклидова, топологическая и хаусдорфова размерности

1.4.1. Размерность Евклида

1.4.2. Топологическая размерность

1.4.3. Размерность Хаусдорфа–Безиковича

1.5. Математические и физические фракталы

2. Монофракталы

2.1. Фрактальная размерность математического фрактала

2.1.1. Алгоритм определения фрактальной размерности

2.1.2. Фрактальная размерность нефрактальных множеств

2.1.3. Фрактальная размерность классических монофракталов

2.2. Методы построения геометрических монофракталов

2.2.1. Метод генератора

2.2.2. Метод систем итерируемых функций

2.2.3. Метод случайных итераций, или игра в хаос

2.2.4. Метод игры в хаос с поворотами

2.2.5. Метод сжимающих аффинных преобразований

2.2.6. Метод нелинейных комплексных отображений

2.2.7. Методы построения стохастических фракталов

- 2.3. Толстые фракталы
- 2.4. Фрактальная размерность физического фрактала
 - 2.4.1. Кластерная размерность
 - 2.4.2. Емкостная размерность
 - 2.4.3. Поточечная размерность
 - 2.4.4. Корреляционная размерность
 - 2.4.5. Информационная размерность
 - 2.4.6. Обобщенные размерности Реньи
 - 2.4.7. Гомотетическая размерность
 - 2.4.8. Глобальная размерность
 - 2.4.9. Внутренняя размерность
 - 2.4.10. Массовая размерность
 - 2.4.11. Размерность, основанная на показателе Липшица–Гельдера
 - 2.4.12. Размерность, основанная на показателе Херста
 - 2.4.13. Размерность Фурье
 - 2.4.14. Размерность вложения
 - 2.4.15. Площадно-периметровые размерности
 - 2.4.16. Размерность вложения
 - 2.4.17. Другие размерности
 - 2.4.18. Коразмерность
- 2.5. Примеры физических фракталов
 - 2.5.1. Береговая линия
 - 2.5.2. Траектория броуновской частицы
 - 2.5.3. Другие примеры физических фракталов
- 3. Мультифракталы
 - 3.1. Определение мультифрактала
 - 3.2. Примеры математических мультифракталов
 - 3.2.1. Неоднородное канторово множество
 - 3.2.2. Неоднородная салфетка Серпинского
 - 3.2.3. Мультифрактал, построенный по ренормализационной схеме
 - 3.2.4. Стохастические математические мультифракталы
 - 3.3. Традиционный мультифрактальный формализм (Р-модель)
 - 3.3.1. Основные понятия
 - 3.3.2. Обобщенная статистическая сумма
 - 3.3.3. Спектр обобщенных фрактальных размерностей. Скейлинговая экспонента
 - 3.3.4. Информационная размерность
 - 3.3.5. Корреляционная размерность

- 3.3.6. Функция мультифрактального спектра. Показатель сингулярности
- 3.3.7. Связь функции мультифрактального спектра со скейлинговой экспонентой
- 3.3.8. Преобразование Лежандра
- 3.3.9. Свойства функции мультифрактального спектра
- 3.4. Мультифрактальный формализм Чабры и Дженсена
- 3.5. Информационная интерпретация мультифрактального формализма
- 3.6. L-модель мультифрактального формализма
- 3.7. Подход Мандельброта
- 3.8. Мультифрактальный анализ математических мультифракталов
 - 3.8.1. Неоднородное канторово множество (Р-модель)
 - 3.8.2. Неоднородное канторово множество (L-модель)
- 3.9. Мультифрактальный анализ физических мультифракталов
- Выводы
- Список литературы

Введение

Начало нового XXI столетия ознаменовалось проникновением революционных идей “фрактализации” в современную радиофизику.

Полезным и перспективным оказалось использование фрактальных временных и пространственно-временных сигналов, имеющих ряд уникальнейших свойств и преимуществ, в задачах радиолокации, радионавигации, телекоммуникации и дистанционного зондирования различных сред и объектов. Это, в свою очередь, привело к необходимости решать задачи генерации, излучения, распространения, приема и обработки фрактальных сигналов, а также создавать соответствующие технические средства. “Фрактализация” коснулась и традиционных для радиофизики сред распространения электромагнитных волн: создание в них фрактальной структуры существенно изменило их свойства, что, в свою очередь, породило соответствующий новый класс задач.

Между тем источником “фрактализации” является не только деятельность человека. Многие традиционные объекты исследования радиофизики сами по себе обладают фрактальными

свойствами. Так, например, фрактальную структуру может иметь пучок лазерного излучения при распространении в неоднородной среде. Более того, оказалось, что и многие природные процессы в радиофизике также носят принципиально фрактальный характер. Так, радиофизические исследования геокосмоса позволили обнаружить фрактальные свойства у многих процессов, сопровождающих явление генерации крупномасштабных и глобальных возмущений, возникающих под действием мощных, нестационарных источников энерговыделения, как например: в возмущениях в геокосмосе, вызванных падением Челябинского метеороида, в вариациях электромагнитного поля Земли, сопровождающих мощные геокосмические бури, и даже в таком уникальном процессе, как впервые зарегистрированные в 2015 г. гравитационные волны.

Появление новых идей в естествознании в целом и в радиофизике в частности обычно встречается научным сообществом с изрядной долей здорового скептицизма. Особенно активно оказывается сопротивление в ситуации, когда ставятся под сомнение какие-либо основы математического фундамента, на котором построено подавляющее большинство всех существующих классических и современных теорий. В представленной работе авторы попытаются предоставить читателю достаточное количество разумных оснований, доказательств и доводов поясняющих возможность, а главное, необходимость использовать на практике геометрические представления, отличные от классических. Хотя для большинства исследователей последние давно стали чем-то само собой разумеющимся, о чем просто не принято задумываться.

Необходимость сделанной авторами попытки подтверждается цитатой из статьи Р. Пинна в журнале “Нейче” (Nature), опубликованной еще в 1996 г. и посвященной распространению фрактальной концепции среди специалистов в самых разных отраслях знания: “Если это мнение будет и дальше распространяться, то нам не придется долго ждать того времени, когда фракталы станут обязательной частью университетской программы” [1].

По традиции, восходящей еще ко временам Евклида, основой интуитивного понимания геометрии природы всегда служили евклидовы прямые, окружности, сферы, тетраэдры и т. п. С их

помощью удавалось строить непротиворечивые и эффективные модели окружающих нас реальных явлений, процессов и объектов. Однако модель всегда отражает лишь наиболее важные (по мнению ее создателя) свойства реального явления, процесса или объекта. Следовательно, “за кадром” остается большое количество “неважных” свойств, которых в модели просто нет.

Аппарат евклидовой геометрии много столетий являлся (а по мнению многих уважаемых специалистов – остается и сегодня!) фундаментом всего естествознания. Между тем существует принципиальная проблема, которая заключается в том, что на самом деле в окружающем мире идеальных объектов из геометрии Евклида просто не существует.

Следовательно, чтобы познать законы природы глубже и точнее, в естествознании необходим переход от использования геометрии Евклида к применению иной геометрии – фрактальной геометрии. Эта идея была высказана еще в 1975 г. выдающимся американским естествоиспытателем Бенуа Мандельбротом (1924–2010) [2]. За более чем сорок лет, прошедших с того времени, мировым научным сообществом пройден огромный путь от появления смелой и неординарной идеи до построения стройных научных теорий, разработки новых эффективных методов и технологий и их внедрения в повседневную жизнь. К сожалению, в силу ряда объективных причин эти интереснейшие результаты остаются малоизвестными среди большинства отечественных ученых, в том числе и радиофизиков. Именно необходимостью, по мнению авторов, много лет занимающихся фрактальной радиофизикой, кардинально изменить создавшуюся ситуацию и объясняется актуальность настоящей обзорной работы.

Общей целью работы, состоящей из трех частей, является привлечение внимания специалистов, работающих в различных областях науки и техники, в том числе в радиофизике, радиотехнике, радиолокации и телекоммуникациях, к идеям “фрактализации” современной науки, а также информирование о возможностях современных фрактальных методов описания и исследования окружающего мира.

Для достижения поставленной цели рассматриваются основные три задачи, решению каждой из которых посвящена отдельная часть работы, а именно:

1) знакомство с основными понятиями, определениями и соотношениями современной теории фракталов, а также с классификацией фракталов, анализ существующих числовых характеристик фракталов;

2) изучение современных методов фрактального и мультифрактального анализа сигналов и процессов;

3) ознакомление с основными практическими результатами, полученными в современной фрактальной радиофизике.

Каждая из этих задач представляет интерес для специалистов как сама по себе, так и в сочетании с остальными. По нашему мнению, именно объединение этих трех частей и представляет собой теоретические основы и практический инструментарий современной фрактальной теории, которая “фрактализирует” всю современную цивилизацию.

За пределами представленной работы, к сожалению, остается интереснейшая тематика, связанная с дробным исчислением (fractional calculus) (см., например, [3–15]), которое иногда называется также фрактальным исчислением (fractal calculus) (см., например, [16, 17]), и его применением в радиофизике (см., например, [18, 19]), в частности, со сравнительно недавно созданной фрактальной электродинамикой [4].

Отметим, что представленная работа ни в коей мере не призвана конкурировать с фундаментальными монографиями [20, 21], в первой из которых в 2002 г., судя по всему, впервые появились термины “фрактальная радиофизика” и “фрактальная радиолокация”. Авторы рассматривают свой труд в качестве дополнения к этим замечательным книгам, в котором отражена точка зрения самих авторов на ряд аспектов современной фрактальной радиофизики.

1. Основные понятия и определения

1.1 Краткая историческая справка

На сегодня можно считать доказанным фактом, что фракталы, которые в первых русскоязычных работах иногда именовались “фрактальями” (см., например, [22, 23]) – это объективная реальность, они существуют вне зависимости от наших знаний о них. Однако до последнего времени места для них в научной картине мира просто не было. Эта картина восходит еще к великому

Галилео Галилею, который в 1623 г. так сформулировал свое научное кредо (см., например, [24]): “Вся наука записана в этой великой книге – я имею в виду Вселенную, – которая всегда открыта для нас, но которую нельзя понять, не научившись понимать язык, на котором она написана. А написана она на языке математики, и ее буквами являются треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых человеку невозможно разобрать ни одного ее слова; без них он подобен блуждающему во тьме”. Понадобилось почти 350 лет, чтобы выйти за рамки галилеевского представления, – в 1975 г. Б. Мандельброт ввел понятие “фрактал” в книге [25]. Заметим, что именно в этой работе, изданной на французском языке, а не в ставших широко известными англоязычных книгах [26] и особенно [27], как полагают многие, впервые появилось это новое понятие, хотя четкое определение фрактала в [25] действительно отсутствует.

Термин “фрактал” происходит от латинского fractus – фрагментированный, неправильный по форме, дробленный, сломанный, разбитый [25–29]. Сам Б. Мандельброт писал о необходимости введения этого понятия так: “Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные, – задачи исследования морфологии аморфного. Математики, однако, пренебрегли этим вызовом и предпочли все больше и больше отдаляться от природы, изобретая теории, которые не соответствуют ничему из того, что можно увидеть или почувствовать” [27].

В этих словах Б. Мандельброт фактически объясняет, почему появление фракталов в математической литературе около ста лет назад (конечно, тогда еще не с этим именем) было встречено с прискорбной неприязнью, как это бывало в истории развития многих других математических идей. Так, знаменитый математик Шарль Эрмит в 1893 г. даже окрестил их “монстрами” (см., например, [30]). По крайней мере, общее мнение признало их патологией, представляющей интерес только для исследователей, злоупотребляющих математическими причудами, а не для настоящих ученых (см., например, [26, 28, 29, 31, 32]). К сожалению, подобные высказывания относительно фракталов иногда можно услышать и в наше время, хотя еще в середи-

не XX века Ф. Дайсон отметил, что в этом случае природа сыграла с математиками злую шутку, вернув выброшенные в XIX веке идеи в виде обычных объектов вокруг нас [30, 33].

Тем не менее через сто лет мнение подавляющего большинства научного сообщества кардинально изменилось. Фрактальная геометрия усилиями Б. Мандельброта постепенно стала уважаемой прикладной наукой примерно с конца 1970-х гг., точнее после 1977 г., когда вышла его основополагающая книга [26], которую он сам рассматривал как научное эссе [26–29].

Разумеется, Б. Мандельброт начал проводить исследования появления “монстров” и других патологий в природе задолго до издания книг [25–27]. Более того, за упомянутое столетие многие выдающиеся ученые внесли существенный вклад в теорию, которую впоследствии назовут фрактальной геометрией. К ним относятся К. Вейерштрасс (1815–1897), Г. Кантор (1845–1918), Дж. Пеано (1858–1932), А. Лебег (1875–1941), Ф. Хаусдорф (1868–1942), А. С. Безикович (1891–1970), Б. Больцано (1781–1848), Э. Чезаро (1859–1906), Х. фон Кох (1870–1924), В. Ф. Остгуд (1864–1943), В. Ф. Серпинский (1882–1969), К. Менгер (1903–1985), П. С. Урысон (1898–1924), А. Пуанкаре (1854–1912), Г. Риман (1826–1866), Ж. Дарбу (1842–1917), Л. Башелье (1870–1946), Ф. д’Альб (1868–1933), П. Леви (1886–1971), Л. Ричардсон (1881–1953), Дж. Ципф (1902–1950), Г. Херст (1880–1978), Г. Жюлиа (1893–1978), П. Фату (1878–1929) и др.

Так, само введенное Б. Мандельбротом определение фрактала, которое рассматривается ниже, основано на теории фрактальной хаусдорфовой размерности, предложенной Ф. Хаусдорфом в 1919 г. [34] и впоследствии приведенной в окончательный вид А. С. Безиковичем (см., например, [27–29]). Между тем первые два шага в направлении создания этой теории были сделаны еще в 1877 г. Г. Кантором и в 1890 г. Дж. Пеано [26–29].

Важным шагом, определившим в будущем развитие самой идеи фракталов, явилось создание математиками класса непрерывных, нигде не дифференцируемых функций [35–37]. Считается, что официально история этих функций началась в 1875 г., когда в работе [38] было сообщено о том, что К. Вейерштрассом впервые построена непрерывная, нигде не дифференцируемая

функция. Однако исследована она была еще в 1861 г., а полученные результаты доложены в Берлинской академии наук в 1872 г. [39]. Непрерывные недифференцируемые функции были построены также Ш. Селлерье еще до 1860 г. (работа была опубликована только в 1890 г. после смерти автора) [40], Г. Риманом в 1861 г. и Ж. Дарбу в 1873–1874 гг. [39]. Более того, имеется информация [37, 41] о том, что Б. Больцано построил функцию с аналогичными свойствами, вероятно, ранее 1830 г., хотя известно об этом стало только в 1930 г.

Около 1890 г. французский математик А. Пуанкаре инициировал исследования в области нелинейной динамики, что привело к появлению современной теории хаоса (см., например, [31, 32, 42–66]). Интерес к предмету заметно увеличился, когда метеоролог Э. Лоренц, занимавшийся нелинейным моделированием погоды, в 1963 г. обнаружил принципиальную невозможность долгосрочных прогнозов погоды. Он заметил, что даже ничтожные ошибки при измерении параметров текущего состояния погодных условий могут привести к абсолютно неправильным предсказаниям о состоянии погоды в будущем. Эта существенная зависимость от начальных условий лежит в основе математической теории хаоса (см., например, [42]).

Траектории броуновского движения частиц, которыми занимались шотландский ботаник Р. Броун еще в 1827 г. и А. Эйнштейн в 1905 г. [32, 67, 68], представляют собой пример фрактальных кривых, хотя их математическое описание было дано только в 1923 г. Н. Винером (см., например, [24, 26, 27, 32, 67, 68]).

В 1890 г. Д. Пеано сконструировал свою знаменитую кривую – непрерывное отображение, переводящее отрезок в квадрат и, следовательно, повышающее его размерность с единицы до двойки [69]. В 1904 г. была открыта снежинка Коха – еще одна кривая, повышающая размерность [70].

Фрактал, никоим образом не похожий на кривую, который Б. Мандельброт назвал “пылью” [26, 28, 29], – это классическое множество Кантора. Множество Кантора было открыто также независимо друг от друга Г. Дж. Смитом (1826–1883) в 1874 г. [71], П. Дюбуа-Реймоном (1831–1889) в 1880 г. [72], В. Вольтерра (1860–1940) в 1881 г. [73] и самим Г. Кантором в 1883 г. [74]. Б. Мандельброт использовал такую “пыль” для моде-

лирования шума в телефонии. Впоследствии оказалось, что она является универсальным фракталом в том смысле, что любой фрактал, представляет собой либо “фрактальную пыль”, либо ее проекцию на пространство с более низкой размерностью (см., например, [26, 28, 29, 31, 32]).

Следует также упомянуть работы французского физика лауреата Нобелевской премии 1926 г. Ж. Б. Перрена (1870–1942), вышедшие в 1909 г. [75] и 1913 г. [76], в которых, по словам Б. Мандельброта [26–29], была сделана попытка привлечь внимание физиков к “монстрам”, полученным математиками.

Кроме этого, различные древовидные фракталы применялись не только для моделирования деревьев – растений, но и бронхиального дерева (воздухоносные ветви в легких), работы почек, кровеносной системы и др. Интересно предположение Леонардо да Винчи о том, что общая толщина всех веток дерева на данной высоте, сложенных вместе, равна толщине ствола (ниже их уровня). Отсюда следует фрактальная модель кроны дерева в виде поверхности – фрактала (см., например, [26, 27]).

Более того, некоторые специалисты склонны утверждать [77], что в известной мере предшественником фрактала был так называемый гномон. Согласно определению, данному еще Героном Александрийским (около I века н. э.), гномон – это фигура (под фигурой здесь понимается геометрическая фигура или просто число), которая, будучи добавленной к какой-либо другой фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной. Чтобы избежать недоразумений, заметим, что такое определение гораздо ближе “чистым” математикам. Для физика же гномон – это L-образный объект, помещенный в центр диска солнечных часов, изобретение которых приписывают древнегреческому астроному Анаксимандру Милетскому (приблизительно в 575 г. до н. э.) Между тем имеются археологические доказательства того, что такие солнечные часы уже использовались в Древнем Египте примерно на девятьсот лет ранее, в эпоху царствования фараона Тутмоса III [77].

Многие замечательные свойства фракталов и хаоса открываются при изучении итерированных отображений (см., например, [27, 78]). При этом начинают с некоторой функции $y = f(x)$ и рассматривают поведение последовательности

$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$ в комплексной плоскости. Работы такого рода восходят, по всей видимости, к трудам английского математика А. Кэли (1821–1895), который исследовал метод Ньютона нахождения корня в приложении к комплексным, а не только вещественным функциям (1879 г.). Замечательного прогресса в изучении итерированных функций еще в 1919 г. добились французские математики Г. Жюлиа и П. Фату (см., например, [24, 27]). Естественно, это было сделано без помощи компьютерной графики.

Таким образом, на сегодня подавляющее большинство специалистов осознано, что окружающий нас мир наиболее адекватно описывается лишь фрактальной геометрией. Евклидова, а также сферическая геометрии являются лишь грубыми идеализациями или “карикатурами” на фрактальную геометрию. Поэтому современное естествознание просто вынуждено стать фрактальным. При этом не отбрасываются все достижения, полученные ранее, – классическое естествознание, основанное на евклидовой и сферической геометриях, остается частным (предельным) случаем фрактального естествознания. Более того, процесс “фрактализации” нашей цивилизации идет полным ходом не только в естествознании, где фракталы находят на всех пространственных масштабах (от наноструктур до Вселенной) и во всех направлениях (от биологии и медицины до физики атомного ядра и элементарных частиц), но и в лингвистике, музыке, изобразительном искусстве (см., например, [1, 24, 67, 68, 79]), экономике, демографии, финансах (см., например, [33, 80]) и др. В рамках сформировавшейся фрактальной парадигмы (см., например, [81–83]) установлено, что фрактальность является одним из фундаментальных свойств окружающего мира.

1.2. Этапы становления фрактального подхода

Подводя итог сказанному выше, выделим несколько этапов в формировании и становлении фрактального подхода.

1. Эпоха «монстров» (середина XIX века – начало 1960-х гг.). В трудах отдельных энтузиастов появляются математические объекты и их характеристики, которые в будущем станут основой теории фракталов (множество Кантора,

итерированные отображения (Кэли, Жюлиа, Фату и др.), кривая Пеано, снежинка Коха, ковер Серпинского, траектории броуновских частиц, функции Вейерштрасса, Римана, исследования Пуанкаре, размерность Хаусдорфа–Безиковича и т. д.). Некоторые ученые уже тогда оценили потенциал этих новых объектов. Например, выдающийся австрийский физик Л. Больцман в 1898 г. отмечал, что недифференцируемые функции вполне могли бы быть изобретены физиками, поскольку в статистической механике есть проблемы, для которых они “абсолютно необходимы” [67, 68]. Однако в целом отношение научной общественности к этим исследованиям оставалось крайне негативным.

Кстати, сам Б. Мандельброт фрактальные объекты эпохи “монстров” называл протофракталами [84].

2. *Подготовительный этап (начало 1960-х гг. – 1975 г.)*. Б. Мандельброт, по его собственным словам [27, 85], приступил к исследованиям, приведшим к созданию фрактальной геометрии и введению понятия “фрактал” в 1975 г., примерно в 1962–1964 гг.

Отделить этот этап от предыдущего позволяет следующее высказывание Б. Мандельброта [27, 85]: «Не считаю ли я, что фрактальная геометрия была “открыта” сто лет назад? Вовсе нет. Я цитирую этих авторов [Пуанкаре, Кантора, Пеано, Хаусдорфа, Серпинского] потому, что у меня имеются и серьезные похвалы, и не менее серьезные упреки к ним. Я отдаю им должное за то, что они изобрели ряд конструкций, которые мне в конце концов удалось объединить и которые оказались бесценными. А упреки связаны с тем, что им не удалось увидеть и развить родство своих построений, что они видели в каждой из своих конструкций “монстра”, “исключительное множество”, из-за чего их действительное значение было полностью упущено». Вместе с тем Б. Мандельброт отмечает, что одним из его идейных вдохновителей оказался именно Г. Жюлиа, у которого он в молодости учился в Политехнической школе в Париже.

Справедливости ради, заметим, что приведенное высказывание Б. Мандельброта во многом субъективно, поскольку математики в подавляющем большинстве случаев просто “играли” в свои “умозрительные игры”, не ставя перед собой задач применять полученные результаты на

практике. Сам же Б. Мандельброт, хотя и формально числился математиком, но являлся скорее естествоиспытателем, о чем свидетельствует полученная им в 1993 г. премия Вольфа по физике [48, 86] за “изменение нашего взгляда на мир посредством концепции фрактальной геометрии” [87].

3. *Этап становления и развития (1975 г. – начало 2000-х гг.)*. После публикации Б. Мандельбротом работ [25] в 1975 г., [26] в 1977 г. и [27] в 1982 г. “фрактальные” идеи заинтересовали не только “чистых” математиков (см., например, [77, 88–128]), но и постепенно начали проникать во все отрасли науки и техники, овладевая умами все большего количества ученых. Именно в это время формировался язык фрактального подхода, создавались и совершенствовались его методы. Фрактальные структуры обнаруживались в самых разных областях: не только в физике (см., например, [129–140]), но и в астрономии (см., например, [132, 136, 141, 142]), электронике, материаловедении [143], обработке сигналов и изображениях, компьютерных сетях (см., например, [96, 97, 142, 144, 145]), химии (см., например, [97, 132, 134, 146–148]), физической химии (см., например, [149, 150]), биологии, физиологии, психиатрии (см., например, [83, 96, 132, 151–163]), биофизике (см., например, [148, 164–167]), биохимии (см., например, [168]), медицине (см., например, [83, 147, 155, 158, 161, 162, 169, 170]), геологии (см., например, [33, 46, 96, 171–176]), географии (см., например, [177]), геофизике (см., например, [132, 173, 176, 178–184]), геохимии (см., например, [148]), климатологии (см., например, [172]), метеорологии (см., например, [172]), почвоведении (см., например, [185]), экологии (см., например, [177]), компьютерных науках (см., например, [186, 187]), финансах (см., например, [80, 84, 142, 188–190]), археологии (см., например, [155]) архитектуре и дизайне (см., например, [191–193]), материаловедении (см., например, [194]) и даже в музыке и литературных произведениях (см., например, [1, 79, 195–197]), а также в живописи (например, в картинах М. Эшера и С. Дали, в полотнах К. Хокусая, А. Дюрера и Леонардо да Винчи [30, 55, 87, 142, 197, 198]), городской культуре [199], психологии [200], менеджменте [201, 202] и других гуманитарных и социальных науках [203, 204]. На этом этапе определяющий или, по крайней мере, суще-

ственный вклад в “фрактализацию” внесли С. Александер, К. Бандт, М. Барнсли, Ю. Барышев, А. Бунде, Т. Вичек, А. К. Гильмутдинов, Ж.-Ф. Гойе, П. Грассбергер, Р. Девэйни, С. Демко, Д. Заупе, М. Зееле, Й. Каандорп, Б. Кайе, Р. Кроновер, Л. Лейбович, А. Ле Мехот, Н. Лесмо-Гордон, А. Линденмайер, Л. Лэм, М. Макгуайер, П. Микин, Р. Ш. Нигматулин, Р. Орбах, Х.-О. Пайтген, Дж. Паризи, А. А. Потапов, И. Прокачча, П. Рихтер, А. Слоан, Б. М. Смирнов, Я. Стюарт, Х. Такаяцу, Г. Уорнелл, К. Фалконер, Й. Федер, Ю. Фишер, Р. Фосс, У. Фриш, К. Фрэйзер, А. Хек, С. Хэвлин, Б. Шаповал, М. Шредер, Д. Штауффер, Д. Эвнир, Х. Юргенс и многие другие ученые. Некоторые авторы (см., например, [33]) характеризуют этот этап как “фрактальную лихорадку”.

4. *Современный этап (начало 2000-х гг. – сегодняшний день)*. В результате массового применения методов фрактальной геометрии, фрактального анализа, дробного исчисления в различных областях науки и техники формируются и выделяются отдельные “фрактальные” направления, например, фрактальная электродинамика, фрактальная радиофизика, фрактальная радиолокация, фрактальная физика и т. п. (см., например, [20, 21, 81, 205]). Создаются и внедряются на практике реальные технологии, основанные на использовании фрактального подхода, которые окончательно превращают фракталы из абстрактной математической идеи, понятной лишь узкому кругу специалистов, в значительную силу, способную изменять окружающий мир.

В качестве примера можно привести оригинальную идею, которую высказал в 2014 г. А. Яджик, об объединении двух, по-видимому, самых знаковых теорий XX века – фрактальной геометрии и квантовой механики. Он предпринял попытку соединить их с помощью построения особых систем итерированных функций (что это такое – узнаем далее), использующих преобразования Мебиуса единичного круга на плоскости. В результате автор создал целый новый класс фракталов – квантовые фракталы. Более того, он предложил их использовать при построении квантового компьютера – еще одного наисовременнейшего направления научных исследований [206].

И, наконец, несколько слов о роли Б. Мандельброта – замечательного исследователя и энтузиаста, чьи идеи и целеустремленность оказали су-

щественное влияние на нашу цивилизацию [31, 32]. Этот вопрос неоднократно поднимался в конце 1980-х – начале 1990-х гг. разными авторами (см., например, [55]). Полагаем, что заслуги Б. Мандельброта в становлении фрактальной геометрии, а впоследствии и фрактальной физики сродни заслугам Дж. Максвелла в электродинамике. Хорошо известно, что последний не придумывал самих уравнений электродинамики, но догадался собрать их вместе, обобщить и впервые записать в виде одной системы. Так и Б. Мандельброт собрал воедино и обобщил уже существовавшие до него подходы, обогатив их собственными оригинальными идеями. Согласитесь, увидеть общие закономерности там, где остальные видят лишь разрозненные факты, само по себе является выдающимся достижением.

1.3. Определение фрактала

Как ни странно, дать универсальное определение фрактала оказалось не так просто. Как уже было сказано выше, понятие “фрактал” введено Б. Мандельбротом в 1975 г. [25], но первое определение фрактала было дано в 1982 г. [27].

Определение 1 (Б. Мандельброт, 1982 г.). Фрактал – это множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого строго больше его топологической размерности.

Справедливости ради отметим, что сам Б. Мандельброт рассматривал это определение как “пробный шар” и ни в коей мере не настаивал на его окончательности и универсальности [27, 85].

Некоторые уважаемые авторы [206] указывают на то, что это определение не конкретизирует природы самого множества, т. е. фрактальные свойства могут иметь не только геометрические объекты – множества точек, но и множества произвольного происхождения. Однако совсем не понятно, что в этом плохого. Впоследствии выяснится, что фрактальность – универсальное свойство окружающего мира, а значит, оно присуще не только геометрическим объектам. Другой вопрос, что данное определение исключает из рассмотрения некоторые структуры, имеющие фрактальное поведение. Когда это стало ясно, определение было несколько скорректировано [206].

Определение 2 (Б. Мандельброт, примерно середина 1980-х гг.). Фрактал – это множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого не равна его топологической размерности.

Видно, что это определение несколько шире первого, поскольку позволяет размерности Хаусдорфа–Безиковича оказаться меньше топологической размерности.

В 1987 г. Б. Мандельброт в личной переписке с еще одним известным специалистом в области фракталов Е. Федером предложил использовать такое определение [207, 208], опубликованное им в работе [209].

Определение 3 (Б. Мандельброт, 1987 г.). Фрактал – это определенная структура, которая состоит из подобных себе подструктур.

Здесь впервые в определении появляется важное свойство фрактала – самоподобие. Самоподобие подразумевает подобие объекта самому себе на разных масштабах.

В 1989 г. Б. Мандельброт на просьбу ввести четкое и однозначное определение фрактала ответил, что любое определение фрактала все равно будет ограниченным. Однако затем он предложил следующий вариант [3, 206].

Определение 4 (Б. Мандельброт, 1989 г.). Фрактал – это набор способов и методов для изучения нерегулярных, ломаных и самоподобных геометрических объектов.

Делались попытки ввести определение фрактала и другими авторами. Так, примерно в 1990 г. Х. Лаверье предложил свое определение [3, 192, 210].

Определение 5 (Х. Лаверье, 1990 г.). Фрактал – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом изменении масштаба.

В 1990 г. К. Фалконер по поводу определения 4 заметил [206, 211], что «к многозначности определения фрактала нужно относиться, как биолог относится к определению “что такое жизнь”». Иными словами, не существует лаконичного общепринятого определения “что такое жизнь”, а есть перечень свойств, которые характеризуют все живые существа. Так же и с определением фрактала. Поэтому К. Фалконер предложил следующее определение [206, 208, 211, 212].

Определение 6 (К. Фалконер, 1990 г.). Множество \mathfrak{R} называется фракталом, если, среди его свойств имеются такие:

- множество \mathfrak{R} имеет тонкую структуру, т. е. оно детализировано на наименьших масштабах;
- множество \mathfrak{R} является достаточно нерегулярной структурой, чтобы ее можно было бы описать традиционными геометрическими спо-

собами (геометрии Евклида или Лобачевского и т. п.) как на локальном уровне, так и на уровне всей структуры;

- множеству \mathfrak{R} свойственно самоподобие как в приближительном виде, так и в статистическом;

- обычно фрактальная размерность множества \mathfrak{R} (определенная каким-либо образом) оказывается больше его топологической размерности;

- в большинстве случаев множество \mathfrak{R} определяется очень простым образом, возможно, рекурсивно.

В 1996 г. он добавил еще одно свойство: частое множество \mathfrak{R} имеет природное происхождение [213].

Особо следует отметить третье свойство, которое расширяет и обобщает самоподобие фрактала, в частности, до его самоаффинности, а также говорит о возможности существования недетерминированного самоподобия (или самоаффинности) [206, 213].

Определение фрактала по К. Фалконеру, которое на сегодня, по-видимому, является наиболее удачным, дает также возможность охарактеризовать объект как фрактал более чем одним значением фрактальной размерности (см., например, [214]). Впоследствии мы увидим, что это очень важно, потому что существуют интересные объекты, которые нельзя описать только одной размерностью – мультифракталы.

Косвенно признал удачным определение, данное К. Фалконером, и сам Б. Мандельброт, когда в 1999 г. в работе [215] отказался от попыток создать строгую математическую формулировку понятия “фрактал”.

Однако строгого математического определения фрактала на сегодня не существует, что очередной раз сравнительно недавно (в 2013 г.) было подтверждено на конференции с участием большинства “звезд первой величины” в современной теории фракталов [37].

1.4. Евклидова, топологическая и хаусдорфова размерности

Далее необходимо разобраться с евклидовой, топологической и хаусдорфовой размерностями, поскольку они непосредственно связаны с определением фрактала и используются для описания фрактальных и нефрактальных множеств. Это

важно, так как во многих работах (особенно специалистов-прикладников), к сожалению, данные понятия смешиваются, что приводит к превратной трактовке читателем опубликованных результатов.

1.4.1. Размерность Евклида

В 1875 г. математики осознали, что невозможно достичь понимания неправильности и фрагментации объектов, по-прежнему определяя размерность как число пространственных координат (размерность Евклида или евклидова размерность) (см., например, [19, 27–29, 96, 132, 208, 216, 217]).

Для примера вычислим евклидову размерность обычного дерева. Согласно представлениям Евклида одно- и двумерные образования являются частями пространства, два или один характерных размера которых достаточно малы. По Евклиду линия имеет длину, но не имеет ширины; поверхность имеет длину и ширину, но не имеет высоты. Размерность точки равна нулю (см., например, [27–29, 96, 132, 216, 217]). Евклидову размерность множества обозначим через E . Теперь представим себе дерево. Мысленно ограничим его замкнутой поверхностью (например, накроем куском брезента), для которой $E = 2$. Замкнутый объем, который оказался внутри этой поверхности, имеет размерность $E = 3$. А какова же евклидова размерность самого дерева? Ясно, что не два – оно же не плоское, но и не три, потому что внутри брезента кроме самого дерева есть еще просто воздух, который к дереву никакого отношения не имеет. Следовательно, размерность Евклида не способна адекватно охарактеризовать дерево.

Более того, в том же 1875 г. стало ясно, что евклидова размерность не может характеризовать и гораздо более простые, далекие от реальных, объекты [147]. Выход из создавшейся ситуации был найден математиками примерно между 1875 и 1925 гг. [218, 219]. Он был связан с появлением так называемой топологической размерности.

1.4.2. Топологическая размерность

Задолго до введения понятия топологической размерности в физике существовала ее трактовка как количества степеней свободы [17, 96, 132,

218, 219]. В частности, под размерностью линейного векторного пространства понимают максимальное возможное число линейно независимых векторов в этом пространстве (см., например, [33, 96]). И мы снова приходим к евклидовой размерности E . Оказывается, что использовать евклидову размерность в качестве топологической не следует. Причину поясняет так называемая кривая Пеано.

Кривая Пеано – это траектория, которая проходит через каждую точку квадрата. Для получения этой траектории построим в квадрате лабиринты с помощью такого алгоритма: на n -ом шаге разделим исходный квадрат на 2^n квадратов и удалим некоторые из их сторон. Перегородки, которые останутся на n -ом шаге построения, сохраняются на последующих шагах. При $n \rightarrow \infty$ средняя линия полученного лабиринта будет траекторией, которая полностью заполнит исходный квадрат, – это и есть кривая Пеано. Первые четыре шага построения кривой Пеано показаны на рис. 1 (см., например, [32]).

Парадокс состоит в том, что принципиально невозможно вычислить евклидову размерность E кривой Пеано. С одной стороны, это кривая, а потому $E = 1$. Но, с другой стороны, она заполняет весь квадрат и, стало быть, является этим квадратом. Тогда $E = 2$. Формально оба ответа верны и равноправны, а потому нет возможности выбрать один из них. Именно поэтому и отказались от использования евклидовой размерности в качестве топологической (см., например, [218–220]).

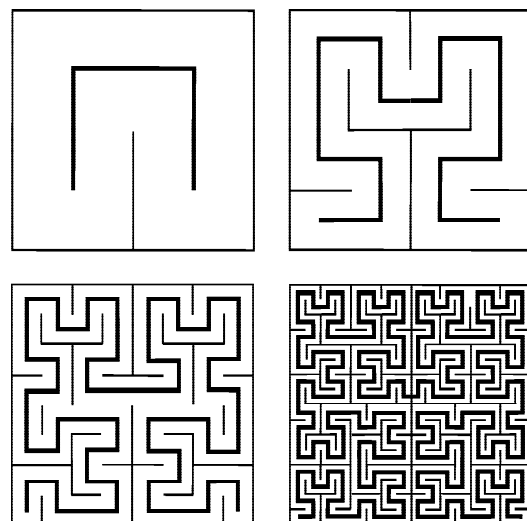


Рис. 1. Алгоритм построения кривой Пеано [3]

Существенный вклад в разработку определения топологической размерности внесли А. Пуанкаре, Л. Брауэр, А. Лебег, К. Менгер и П. Урысон. Мы рассмотрим два определения (см., например, [3, 21, 218–220]).

Определение 1 (П. Урысон). Для множества \mathfrak{R} произвольной природы топологическая размерность $D_T = \dim \mathfrak{R}$ строится методом математической индукции.

1) Уравнение $\dim \mathfrak{R} = -1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R} = \emptyset$ – пустое множество.

2) Множество \mathfrak{R} имеет размерность нуль, если любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой не имеет общих точек с множеством \mathfrak{R} .

3) Множество \mathfrak{R} имеет размерность, равную единице, если оно не является пустым множеством и не является нульмерным множеством, но для каждой точки которого существует сколь угодно малая окрестность, граница которой в пересечении с \mathfrak{R} является пустым или нульмерным множеством.

Далее по индукции вводятся множества с размерностями 2, 3 и т. д.

Определение 2 (К. Менгер). Пустое множество имеет топологическую размерность, равную -1 . Размерность множества \mathfrak{R} – это такое наименьшее целое число n , что каждая точка, принадлежащая \mathfrak{R} , имеет достаточно малую окрестность, граница которой имеет размерность, меньшую чем n .

Важно также отметить, что множество может оказаться неоднородным в топологическом понимании. Иными словами, в окрестности разных элементов этого множества топологическая размерность может оказаться разной. Поэтому в таком случае под топологической размерностью всего множества понимают наибольшее из значений топологической размерности в окрестности каждой точки множества.

Рассмотренные нами определения топологической размерности являются индуктивными, т. е. используют метод математической индукции. Их достаточно сложно применять на практике. Чаще используется метрическое определение топологической размерности, связанной с понятием меры (см, например, [220, 221]).

Если для множества \mathfrak{R} ввести вещественную неотрицательную функцию $\rho(x, y)$, где $x, y \in \mathfrak{R}$, которая удовлетворяет таким условиям:

$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождественности),

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),

$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $x, y, z \in \mathfrak{R}$ (аксиома треугольника), –

то такую функцию называют метрикой, а множество \mathfrak{R} вместе с метрикой – метрическим пространством.

Под диаметром множества понимают максимальное возможное расстояние (метрику) между двумя точками, принадлежащими данному множеству.

Допущение о том, что общее понятие меры (например, длина, площадь, объем и т. д.) необходимо для исследования размерностей непрерывных множеств, было высказано Г. Кантором и развито А. Лебегом. Именно А. Лебег ввел метрическое определение топологической размерности (см, например, [3, 21, 218–220]).

Определение 3 (А. Лебег). Множество \mathfrak{R} имеет топологическую размерность n , если n – такое наименьшее целое число, что для произвольного положительного ε существует конечная система замкнутых множеств с диаметрами, которые не превосходят ε и покрывают множество \mathfrak{R} , ни одни $n+2$ из которых не имеют общей точки. Следовательно, если множество \mathfrak{R} можно покрыть сколь угодно малыми замкнутыми множествами так, что ни одна точка из \mathfrak{R} не принадлежит $n+2$ произвольным частям, но при любом достаточно малом покрытии найдутся точки, которые принадлежат $n+1$ произвольной части.

Отметим, что ни евклидова размерность E , ни топологическая размерность D_T при своем появлении никак не были связаны с фракталами.

1.4.3. Размерность Хаусдорфа–Безиковича

Итак, топологическая размерность всегда является целым числом. Между тем на существование в природе дробных размерностей наводят такие размышления (см., например, [3, 25–27]). С одномерными объектами связано понятие длины, с двумерными – площади, с трехмерными – объема. Эти объекты характеризуются конструкцией, которая называется размерностью физической величины. Но известно, что размерности физических величин могут быть и дробными, что ни в коей мере не противоречит теории размерностей физических величин. Можно предположить,

что физической величине с дробной размерностью отвечает некоторый геометрический объект, который имеет дробную размерность.

Развитием идеи А. Лебега и ее обобщением стал подход Ф. Хаусдорфа к определению размерности множества метрического пространства (см., например, [3, 17, 34, 217, 220, 221]).

Один из возможных методов измерения множества (см., например, [3, 26, 28, 29, 32, 78, 165, 206, 207, 211, 212, 222, 223]) состоит в том, чтобы покрыть рассматриваемое множество другими множествами с размером η , например, отрезками, квадратами (или кругами), кубами (или шарами) с длиной ребра (или диаметром), равным η . С помощью таких разбиений исходному множеству можно поставить в соответствие некоторую меру. Так, кривую можно покрыть отрезками длиной η и подсчитать число таких отрезков $N(\eta)$. Тогда длина кривой L окажется равной

$$L = \lim_{\eta \rightarrow \infty} N(\eta)\eta.$$

Очевидно, что для обычной кривой $N(\eta) = L_0/\eta$, а потому $L = L_0$, причем $0 < L_0 < \infty$. Следовательно, единственной содержательной мерой для нее есть длина. Для обычной поверхности такой мерой является площадь, для обычного тела – объем.

А теперь обобщим понятие меры множества \mathfrak{R} . Для этого выберем некоторую пробную функцию

$$h(\eta) = \gamma(d)\eta^d.$$

При $d = 1$ она соответствует отрезку, при $d = 2$ – квадрату (или кругу), при $d = 3$ – кубу (или шару). Теперь покроем множество \mathfrak{R} этими элементами, образуя меру этого множества

$$M_d = \sum h(\eta).$$

В последнем выражении суммирование ведется на частях покрытий, которые не пересекаются. Коэффициент $\gamma(d)$ зависит от геометрических свойств элементов, которыми покрывается множество \mathfrak{R} . Для отрезка $\gamma(d) = 1$, для круга $\gamma(d) = \pi/4$, для шара $\gamma(d) = \pi/6$. Величину d называют размерностью меры. В зависимости от этой d величина M_d при $\eta \rightarrow 0$ может равняться нулю, бесконечности или принимать некоторое конечное значение.

Определение. Размерность Хаусдорфа D_H множества точек \mathfrak{R} – это критическая размерность d меры M_d , при которой мера принимает конечное значение:

$$H_d = \lim_{\eta \rightarrow 0} M_d = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum \gamma(d)\eta^d = \begin{cases} 0, & d > D_H; \\ \text{const}, & d = D_H; \\ \infty, & d < D_H. \end{cases}$$

Величину H_d называют мерой Хаусдорфа множества точек \mathfrak{R} . Если такого числа $d = D_H$ не существует, то тогда используют число

$$D_{HB} = \inf[d : H_{d=0}],$$

(минимальное значение d , которое обращает меру Хаусдорфа H_d в нуль), называемое размерностью Хаусдорфа–Безиковича. Таким образом, при $d = D_{HB}$ величина H_d изменяет свое значение скачком от нуля до бесконечности. Важно также, что нижний предел размерностей Хаусдорфа–Безиковича для всех метрик, которые можно ввести на множестве \mathfrak{R} , равен его топологической размерности: $D_T(\mathfrak{R}) \leq D_{HB}(\mathfrak{R})$.

Именно теперь становится ясным первое определение фрактала, данное Б. Мандельбротом в 1975 г. Важно отметить, что между размерностями Хаусдорфа D_H и Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} существует некоторое отличие, почему и не следует их смешивать.

Таким образом, топологическая размерность D_T , размерности Хаусдорфа D_H и Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} относятся к самому рассматриваемому объекту, а евклидова размерность E – к пространству, в которое погружен этот объект.

Добавим, что Б. Мандельброт был недоволен [29, 224], когда в 1981 г. в развитие его идей К. Трико [225] рассмотрел целых двенадцать определений фрактальных размерностей для математических фракталов, названных размерностями упаковки (packing dimensions) [211, 212, 223, 226]. По мнению Б. Мандельброта, для описания математических фракталов следует использовать исключительно размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} . Между тем он сам отмечал: «...Сила понятия фрактальной размерности по Хаусдорфу в том, что она позволяет различать категории “гладкий” и “хаотичный”. Слабость же ее в том, что не удается различать категории “нерегулярный, но самоподобный” и “геометрически хао-

тичный». Это происходит из-за того, что определение является весьма общим и требуется для математики» [85]. Как показал дальнейший ход истории, размерности упаковки действительно не прижились среди исследователей-практиков, хотя математики-теоретики продолжают ими интересоваться (см., например, [112, 212, 221]).

1.5. Математические и физические фракталы

Все фракталы по их происхождению можно разделить на математические и физические (или природные, или естественные) [26, 28, 29, 31, 32, 227].

Математический фрактал – это некоторый абстрактный объект, созданный математиками и существующий лишь в их воображении. Примерами математических фракталов могут служить множество Кантора (рис. 2, *a*), триадная кривая Коха (рис. 2, *б*), снежинка Коха (рис. 2, *в*), треугольный невод (рис. 2, *г*), ковер Серпинского (рис. 2, *д*), салфетка Серпинского (рис. 2, *е*), губка Менгера (рис. 2, *ж*), множество Мандельброта (рис. 2, *з*) и т. п.

Физический фрактал – это объект реального мира, который существует в природе независимо от человека и его знаний о нем. Примеры разнообразных физических фракталов, созданных природой, приведены на рис. 3.

Физические фракталы могут быть как естественного (природного), так и искусственного (техногенного) происхождения (пример показан на рис. 4). Последние иногда называют синтетическими фракталами [55].

Как математические, так и физические фракталы принято делить на детерминированные (или регулярные) и стохастические (или нерегулярные случайные).

Регулярным называется фрактал, для которого существует полностью детерминированный алгоритм его создания.

Регулярный фрактал обладает свойством точного самоподобия (или в более общем случае – самоаффинности), т. е. при его рассмотрении на меньшем масштабе мы получаем просто уменьшенную точную копию исходного фрактала (с учетом возможности использования операций поворота и масштабирования с разными коэффициентами подобия вдоль ортогональных осей), или свойством приближительного самоподобия (или самоаффинности), когда указанное

свойство выполняется лишь приблизительно (см., например, [213]).

Отметим, что наряду с понятием самоподобия (self-similarity) в литературе используется его синоним – инвариантность к масштабированию (scale-invariance) [37].

Регулярные фракталы делятся на геометрические и алгебраические. У геометрических фракталов самоподобие (или самоаффинность) проявляется в самой геометрической структуре, у алгебраических – в самоподобии (или самоаффинности) тех или иных их числовых характеристик.

В отличие от регулярных фракталов, при создании и описании которых используются только детерминированные параметры и алгоритмы, у стохастических фракталов всегда существует хотя бы один случайный параметр. Стохастический фрактал является статистически самоподобным (или самоаффинным). Последнее означает, что точно самоподобным или самоаффинным он формально не является. Математические фракталы, показанные на рис. 2, являются геометрическими фракталами. Физические фракталы, приведенные на рис. 3, в большинстве своем являются стохастическими, хотя, по нашему мнению, например, снежинка (рис. 3, *и*) вполне может быть отнесена к геометрическим фракталам.

Главное отличие физических фракталов от математических заключается в том, что первые формально определению фрактала не удовлетворяют [211]. Проблема состоит в том, что у математического фрактала есть конечный максимальный масштаб, но минимальный масштаб по определению стремится к нулю! При этом количество итераций при построении самого математического фрактала стремится к бесконечности. Для физического же фрактала есть как конечный максимальный масштаб, так и конечный минимальный. Следовательно, и количество итераций оказывается тоже ограниченным. Б. Мандельброт называет эти масштабы пороговыми: внешним и внутренним порогами соответственно [26–28].

К понятию физического фрактала примыкает понятие предфрактала. По определению (см., например, [28, 152, 207, 228]), фрактальный объект n -го поколения, который строится с помощью итерационного процесса, при любом конечном n называется предфракталом. Получается, что

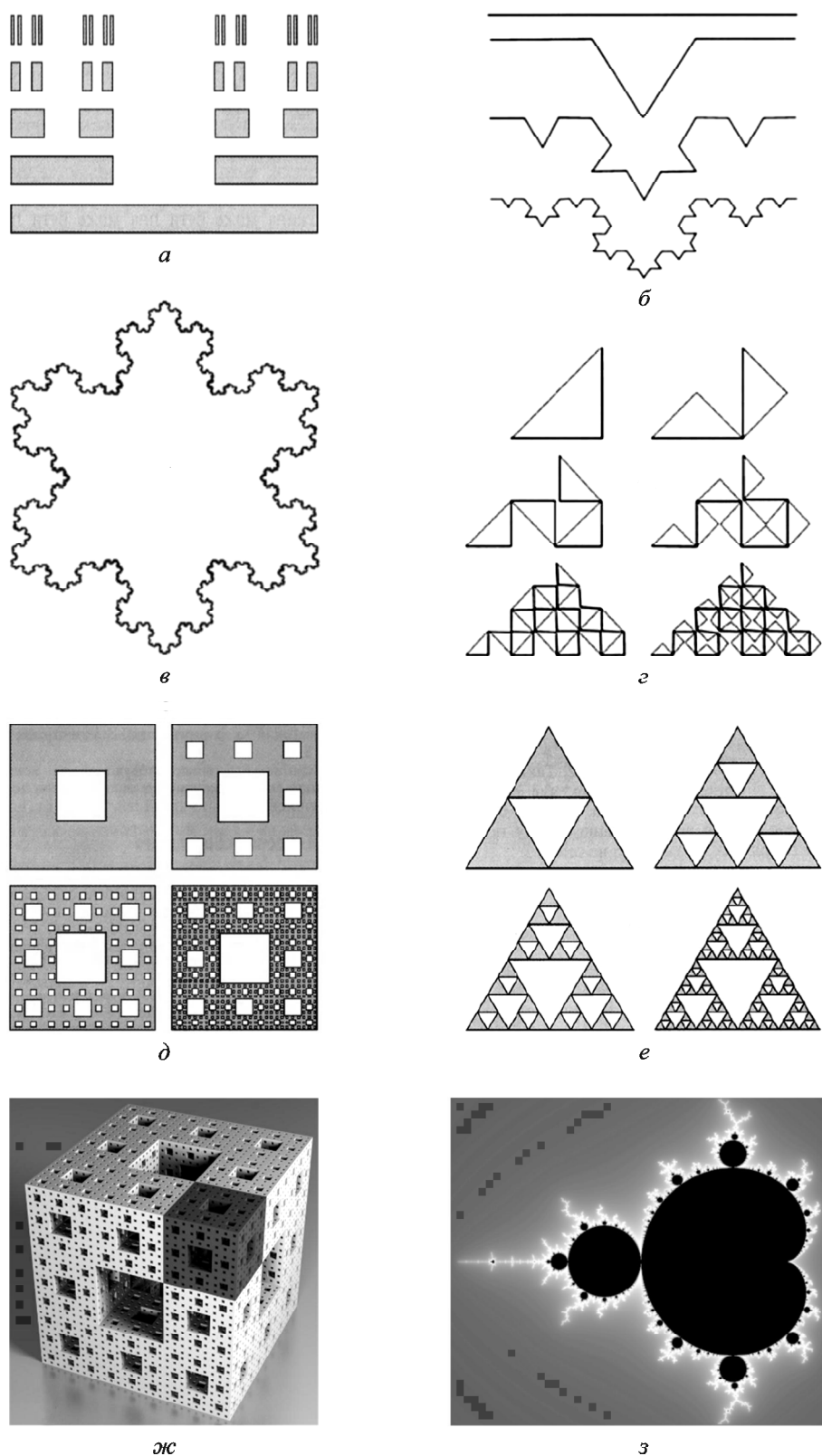


Рис. 2. Математические фракталы: *a* – множество Кантора [3], *б* – триадная кривая Коха [3], *в* – снежинка Коха [3], *г* – треугольный невод [3], *д* – ковер Серпинского [3], *е* – салфетка Серпинского [3], *ж* – губка Менгера [305], *з* – множество Мандельброта [3]

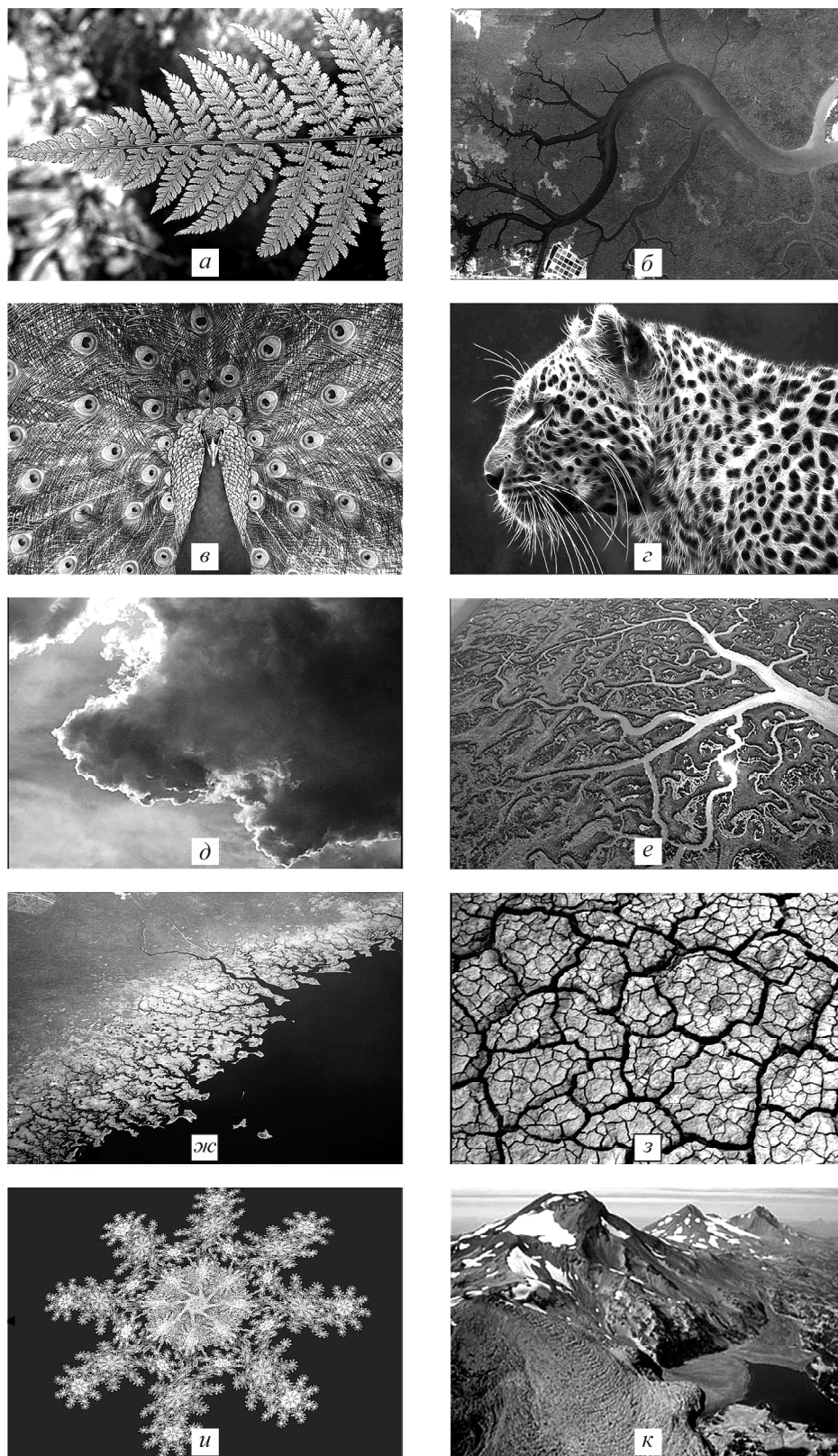


Рис. 3. Физические фракталы: *а* – растение, *б* – дерево, *в* – птица павлин, *г* – животное ягуар, *д* – облако, *е* – русло реки, *ж* – береговая линия, *з* – поверхность пустыни, *и* – снежинка, *к* – горный хребет

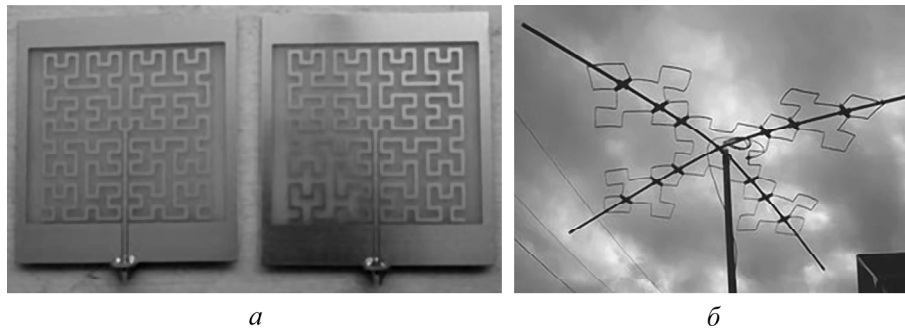


Рис. 4. Фрактальные антенны <<https://otvet.mail.ru/question/203197873>> (а), <<https://vashtehnik.ru/wp-content/uploads/3724.jpg>> (б)

формально физический фрактал относится к предфракталам.

Важно отметить, что, хотя и существует некоторое различие между реальным объектом (физическим фракталом) и его моделью (математическим фракталом), это различие оказывается гораздо меньшим, чем для моделей, построенных на основе геометрии Евклида.

Отметим также, что все реальные природные и техногенные объекты, явления и процессы, имеющие фрактальные свойства, являются именно физическими фракталами. А знания о математических фракталах расставляют лишь некие ориентиры, которые являются связующим звеном между умозрительным миром фрактальной геометрии, созданным воображением великих математиков прошлого, и окружающей нас реальной действительностью.

Что касается классификации фракталов, то в литературе (см., например, [96]) встречается также деление фракталов на статические (например, ковер Серпинского) и динамические (например, броуновское движение).

2. Монофракталы

Монофракталом называется фрактал, для описания которого достаточно одного значения фрактальной размерности (см., например, [96, 229]).

Заметим, что традиционно под словом “фрактал” понимают именно монофрактал. Это и не удивительно, поскольку из всех рассмотренных нами ранее определений фракталов только последнее позволяет существовать иным видам фракталов, кроме собственно монофракталов. Поэтому и в нашей работе мы будем поступать аналогичным образом.

Основными числовыми характеристиками математических фракталов считаются тополо-

гическая D_T и фрактальная D размерности [227]. Кроме них, иногда рассматриваются также другие характеристики, например, степень ветвления и лакунарность [26, 28, 29, 154].

2.1 Фрактальная размерность математического фрактала

2.1.1. Алгоритм определения фрактальной размерности

Основной числовой характеристикой любого фрактала является фрактальная размерность [26, 28, 29, 96]. Ее принято обозначать D . Б. Мандельброт, который является автором этого термина, фрактальной размерностью математического фрактала в подавляющем большинстве случаев считал размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} [26, 28, 29], подробно рассмотренную нами выше, т. е. $D = D_{HB}$.

Однако со временем выяснилось, что использовать строгое определение размерности Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} , данное в пункте 1.4.3, в практических целях оказывается весьма затруднительным. Поэтому на практике используется следующий алгоритм [229].

Пусть интересующий нас объект находится в обычном евклидовом пространстве с известной нам евклидовой размерностью E . Покроем этот объект E -мерными “шарами” радиуса l . Под “шаром” в зависимости от задачи и величины будем понимать также и куб, и квадрат, и просто отрезок прямой. Предположим, что для этого нам потребовалось не менее чем $N(l)$ шаров. Тогда, если при достаточно малых l величина $N(l)$ меняется с l по степенному закону

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D}, \quad (1)$$

то D и есть фрактальная размерность данного объекта, причем она равна его размерности Хаусдорфа–Безиковича, $D = D_{HB}$.

Формулу (1) можно переписать в виде [229]:

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (2)$$

Именно формула (2) обычно служит на практике определением фрактальной размерности D , которую иногда называют объемной размерностью множества [230]. Это соотношение показывает, что величина D является локальной характеристикой данного объекта [229]. Последнее означает, что объект может быть как однородным (во всех точках значения D одинаковы), так и неоднородным (значения D в разных точках могут быть разными).

В параграфе 2.4 мы увидим, что это далеко не единственный разумный алгоритм определения фрактальной размерности.

2.1.2. Фрактальная размерность нефрактальных множеств

Теперь убедимся, что определение фрактальной размерности в виде (2) действительно дает привычные нам целочисленные значения размерностей для классических нефрактальных объектов [229].

Пример 1. Множество, состоящее из конечного числа изолированных точек. Для такого множества минимальное число E -мерных “шаров”, с помощью которых мы можем покрыть это множество, при достаточно малом размере “шаров” совпадает, очевидно, с количеством самих точек N , т. е. $N(l) = N$, и никак не зависит от диаметра этих шаров l . Следовательно, фрактальная размерность этого объекта равна

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = -\ln N \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} = 0.$$

Евклидова размерность пространства и топологическая размерность этого множества также равны: $E = D_T = 0$.

Пример 2. Отрезок гладкой кривой линии длиной L . Он состоит из бесконечного количества точек, при этом минимальное число $N(l)$ одномерных отрезков размера l , с помощью которых можно покрыть данный отрезок целиком,

равно, очевидно, $N(l) = L/l$. В этом случае фрактальная размерность равна

$$\begin{aligned} D &= -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(L/l)}{\ln l} = \\ &= -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln L - \ln l}{\ln l} = 1 - \ln L \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} = 1. \end{aligned}$$

Евклидова размерность пространства и топологическая размерность этого множества также равны: $E = D_T = 1$.

Пример 3. Область гладкой двумерной поверхности площадью S . Число необходимых для ее покрытия квадратиков при достаточно малых l составляет $N(l) = S/l^2$, поэтому фрактальная размерность гладкой кривой составляет

$$\begin{aligned} D &= -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(S/l^2)}{\ln l} = \\ &= -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln S - 2 \ln l}{\ln l} = 2 - \ln S \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} = 2. \end{aligned}$$

Евклидова размерность пространства и топологическая размерность этого множества также равны: $E = D_T = 2$.

Пример 4. Ограниченная область трехмерного пространства объемом V . Для ее покрытия необходимо $N(l) = V/l^3$ кубиков с ребром l . Тогда

$$\begin{aligned} D &= -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(V/l^3)}{\ln l} = \\ &= -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln V - 3 \ln l}{\ln l} = 3 - \ln V \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} = 3, \end{aligned}$$

при этом $E = D_T = 3$.

Таким образом, исходя из оценки фрактальной размерности, все рассмотренные объекты действительно не являются фракталами. Для них наблюдается ситуация, когда фрактальная и топологическая размерности множеств, а также евклидова размерность пространства, в которое погружено данное множество, равны между собой: $D = D_T = E$. Последнее подтверждает мысль, высказанную в параграфе 1.4, о том, что для описания объектов классической евклидовой геометрии вполне достаточно одной-единственной размерности.

2.1.3. Фрактальная размерность классических монофракталов

Разберемся, как оценивается фрактальная размерность регулярных геометрических монофракталов на примере ряда объектов, которые на сегодня уже признаются классикой фрактальной геометрии. Следует обратить внимание на то, что для каждого геометрического монофрактала существует свой полностью детерминированный алгоритм его создания, который представляет собой некий итерационный процесс с количеством шагов, стремящимся к бесконечности.

Пример 1. Множество Кантора [26, 28, 29, 32, 206, 229]. Классический алгоритм построения канторова множества, известного также как “канторова пыль”, состоит в следующем (рис. 1, а). Первоначально берется отрезок прямой единичной длины. Затем его делят на три равные части и выбрасывают среднюю. Это первый шаг итерационной процедуры. На втором шаге процедура применяется к оставшимся двум отрезкам. Так продолжается до бесконечности. Нетрудно увидеть, что суммарная длина всех выброшенных частей равна единице:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Тогда длина оставшегося в пределе объекта равна нулю, $L_\infty = 0$. Следовательно, возникшее множество представляет собой бесконечное число изолированных точек, которое и получило название канторова множества.

Вычислим фрактальную размерность D этого множества [229]. На n -ом шаге построения длина отрезка составляет $l = 1/3^n$, а число самих отрезков равно $N(l) = 2^n$. Предел $l \rightarrow 0$ соответствует условию $n \rightarrow \infty$. Тогда с использованием формулы (2) получаем

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309.$$

Фрактальная размерность канторова множества оказалась меньше евклидовой размерности пространства, куда помещено это множество, $D < E = 1$, но больше топологической размерности самого множества, $D > D_T = 0$.

Пример 2. Снежинка Коха [24, 26, 28, 29, 206, 229, 231]. Фрактал, называемый снежинкой

(или озером) Коха (рис. 2, в), строится из равно-стороннего треугольника с использованием для каждой из его сторон алгоритма построения три-адной кривой Коха (рис. 2, б), предложенной Х. фон Кохом в 1904 г. [67, 68, 207]. Заметим, что во многих русскоязычных книгах часто встречается “кривая Кох” (см., например, [33]). Эта ошибка, по всей видимости, впервые возникла в переводе на русский язык [207] книги [232].

Суть итерационного процесса состоит в следующем. Берется единичный отрезок и делится на три равные части. Средняя часть выбрасывается и заменяется на два отрезка такой же длины, которые с выброшенной частью составляют равно-сторонний треугольник. Такой итерационный процесс продолжается до бесконечности. В результате возникает симметричная, похожая на снежинку, бесконечно изломанная кривая, которая представляет собой самоподобное множество. Отличительной ее особенностью является то, что она, будучи замкнутой, тем не менее нигде себя не пересекает, поскольку достраиваемые треугольники каждый раз достаточно малы и никогда “не сталкиваются” друг с другом.

Посчитаем фрактальную размерность D для снежинки Коха. Длина исходного треугольника $l = l_0 = 1 = 1/3^0$, следовательно число отрезков такой длины, которые покрывают снежинку Коха на этом (нулевом, $n = 0$) шаге равно $N(l) = N_0 = 3$. При $n = 1$ имеем $l = l_1 = 1/3^1$, $N(l) = N_1 = 3 \cdot 4^1$. Тогда на шаге с номером n имеем $l = l_n = 1/3^n$, $N(l) = N_n = 3 \cdot 4^n$. Исходя из формулы (2), получим

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2618.$$

Следовательно, фрактальная размерность снежинки Коха меньше евклидовой размерности пространства, где она находится, $D < E = 2$, но больше топологической размерности самой снежинки, $D > D_T = 1$. Таким образом, снежинка Коха представляет собой линию бесконечной длины, ограничивающую конечную площадь, поскольку на n -ом шаге ее длина составляет $L = 3 \cdot (4/3)^n$ и стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Пример 3. Салфетка Серпинского [26, 28, 29, 206, 229]. Регулярный фрактал, называемый салфеткой Серпинского, получается последовательным вырезанием центральных равно-сторон-

них треугольников так, как показано на рис. 2, е. В результате получается “дырявая” фигура, состоящая из бесконечного числа изолированных точек.

Фрактальная размерность D салфетки Серпинского подсчитывается так. На нулевом шаге имеется один равносторонний треугольник $N(l) = N_0 = 1$ со стороной $l = l_0 = 1$, а на первом шаге – три равносторонних треугольника $N(l) = N_1 = 3$ со стороной $l = l_1 = 1/2$. Тогда на n -ом шаге имеем $N(l) = N_n = 3^n$, $l = l_n = 1/2^n$. Следовательно, фрактальная размерность салфетки Серпинского равна

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.5849.$$

Фрактальная размерность салфетки Серпинского оказывается меньше евклидовой размерности плоскости, на которой она находится, $D < E = 2$, но больше топологической размерности самой салфетки, $D > D_T = 0$. Здесь обратим внимание на топологическую размерность салфетки Серпинского. Никакой ошибки здесь нет. Она действительно равна нулю, поскольку салфетка представляет собой бесконечное множество изолированных точек, а их топологическая размерность, как уже обсуждалось ранее, действительно равна нулю. К тому же салфетка имеет нулевую площадь, что легко показать по аналогии с предыдущими примерами.

Пример 4. Ковер Серпинского [26, 28, 29]. Еще один интересный фрактал, именуемый ковром Серпинского, показан на рис. 2, д. Принцип его построения аналогичен тому, что существует для салфетки Серпинского. Фрактальная размерность ковра Серпинского равна $D = \ln 8 / \ln 3 \approx 1.8928$, его топологическая размерность составляет $D_T = 1$, евклидова размерность пространства, в которое он помещен, равна $E = 2$. Ковер Серпинского также имеет нулевую площадь. Легко заметить, что фрактальная размерность ковра Серпинского оказалась больше, чем у салфетки Серпинского. И хотя оба объекта представляют собой бесконечное множество изолированных точек, плотность их упаковки в объекте разная. Отсюда следует важный практический вывод: фрактальная размерность D отражает плотность заполнения фрактальным объектом области простран-

ства, в которое он помещен: чем ближе величина D к E , тем выше плотность. Неравенство $D < E$ отражает факт некомпактности фрактала, причем чем больше различаются величины E и D , тем более рыхлым является фрактал.

Пример 5. Губка Менгера [26, 28, 29]. Алгоритм создания пространственного аналога ковра Серпинского, называемого губкой Менгера, состоит в следующем (рис. 2, ж). Каждая грань куба, имеющая единичную длину, делится на 9 равных квадратиков так же, как при построении ковра Серпинского. В результате исходный куб разбивается на 27 одинаковых кубиков с длиной ребра, равной $1/3$. Затем, после удаления 7 кубиков (1 центрального и 6 из центра каждой из граней), противоположные грани исходного куба соединяются сквозным центральным отверстием квадратной формы. В результате из 27 остается 20 маленьких кубиков. В результате бесконечного итерационного процесса получается “дырявая” фигура, состоящая из бесконечного числа изолированных точек.

Вычислим ее фрактальную размерность D . На нулевом шаге имеется один кубик $N(l) = N_0 = 1$ со стороной $l = l_0 = 1$, а на первом шаге остается $N(l) = N_1 = 20^1$ кубиков со стороной $l = l_1 = 1/3$. Тогда на n -ом шаге имеем $N(l) = N_n = 20^n$, $l = l_n = 1/3^n$. Следовательно, фрактальная размерность губки Менгера равна

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 20^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.7268.$$

Топологическая размерность губки Менгера составляет $D_T = 1$, евклидова размерность пространства, в которое она помещена, равна $E = 3$. Заметим, что иногда губку Менгера называют также губкой Серпинского [33, 233].

Интересно, что существует и трехмерный аналог снежинки Коха [234].

Пример 6. Троичная фрактальная пена [26, 28, 29]. Алгоритм его построения отличается от алгоритма создания губки Менгера тем, что на каждом шаге итерационного процесса из 27 кубиков выбрасывается не 7, а только один – тот, который находится в середине исходного куба. Для троичной фрактальной пены имеем $D = \ln 26 / \ln 3 \approx 2.9656$, $D_T = 2$, $E = 3$. Понятно, что точки в троичной фрактальной пене упакованы более плотно, чем в губке Менгера. Интерес-

но, что пустоты, называемые тремами, в губках сливаются в одну, а в пенах и коврах остаются изолированными друг от друга [26, 28, 29].

Итак, из всего, сказанного выше, легко заметить, что для фигур, обладающих свойством идеального самоподобия, можно сделать такой общий вывод (см., например, [235]): если множество, состоящее из одинаковых элементов, строится с помощью самоподобного процесса, причем на любом шаге каждый из элементов с линейными размерами l заменяется на p подобных же элементов размерами l/q ($q > 1$) каждый, то фрактальная размерность такого объекта равна $D = \ln p / \ln q$.

Пример 7. Пирамида Серпинского [26, 28, 29]. По аналогии с салфеткой Серпинского можно построить пирамиду (рис. 5), каждая грань которой будет представлять собой салфетку Серпинского (рис. 2, е). Этот фрактал известен также как “фрактальная паутина”. На каждом шаге тетраэдр делится на пять одинаковых тетраэдров, у которых длина стороны оказывается в два раза меньше, чем у исходного. Затем один из пяти тетраэдров выбрасывается. Следовательно, получаем $N(l) = N_n = 4^n$, $l = l_n = 1/2^n$. Тогда фрактальная размерность составляет

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

Получился интересный результат: евклидова размерность пространства, в которое погружена

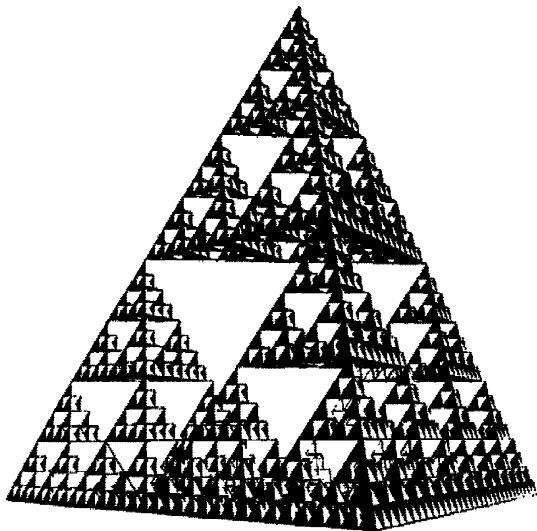


Рис. 5. Пирамида Серпинского [67, 68]

пирамида Серпинского, равна $E = 3$, топологическая размерность пирамиды $D_T = 1$, но фрактальная размерность D оказалась целым числом, а не дробным. Этот пример хорошо иллюстрирует, почему фрактальную размерность некорректно называть дробной размерностью [26, 28, 29]. Оказывается, что некоторые фракталы вполне могут иметь целочисленную фрактальную размерность D .

Пример 8. Кривые Пеано [26, 28, 29, 32]. Выше мы рассмотрели некомпактные (рыхлые) фракталы, для которых $D < E$. Между тем существуют фракталы, которые плотно заполняют пространство, в котором они находятся, так что $D = E$. Одним из примеров такого рода являются кривые Пеано, которые уже обсуждались в пункте 1.4.2. Первая из них была найдена Дж. Пеано в 1890 г. (рис. 1). Топологическая размерность этой кривой равна $D_T = 1$. Она погружена в пространство с $E = 2$. Вычислим ее фрактальную размерность D . Исходным объектом построения кривой является единичный квадрат. При $n = 0$ имеем $N_0 = 0 = 4^0 - 1$, $l_0 = 1 = 1/2^0$. При $n = 1$ получаем $N_1 = 3 = 4^1 - 1$, $l_1 = 1/2^1$. При $n = 2$ имеем $N_2 = 15 = 4^2 - 1$, $l_2 = 1/2^2$. Итак, $N_n = 4^n - 1$, $l_n = 1/2^n$. Тогда

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4^n - 1)}{\ln 2^n} = 2.$$

Итак, фрактальная размерность кривой Пеано оказалась равна евклидовой размерности пространства, в которое она помещена: $D = E = 2$. Это означает, что кривая заполнила квадрат полностью, никаких пустот внутри уже нет. Между тем, фрактальная размерность кривой Пеано оказывается большей, чем ее топологическая размерность: $D > D_T = 1$. Мы получили еще один фрактал с целочисленной фрактальной размерностью.

Пример 9. Кривая Госпера [26, 28, 29]. Кривая (или остров) Госпера относится к классу кривых Пеано. Алгоритм ее построения показан на рис. 6. На каждом шаге итерационного процесса отрезок единичной длины заменяется на 7 отрезков длиной $1/\sqrt{7}$ каждый. Размерность пространства, где находится кривая Госпера, составляет $E = 2$. Топологическая размерность кривой $D_T = 1$, фрактальная размерность

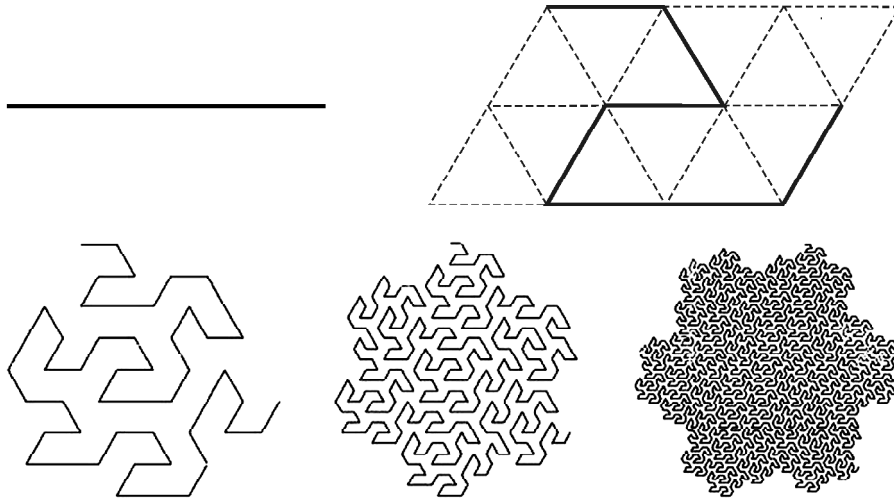


Рис. 6. Кривая Госпера [305]

$$D = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 7^n}{\ln \frac{1}{(\sqrt{7})^n}} = 2.$$

Интересной отличительной особенностью кривой Госпера является то, что граница области, называемой островом Госпера, которую она заполняет в пределе бесконечного количества шагов, сама является фрактальной с нецелочисленной размерностью

$$D = \frac{\ln 3}{\ln \sqrt{7}} = 1.1291.$$

Такие острова можно использовать для непрерывного покрытия плоскости, так как доказано, что они идеально стыкуются друг с другом. Более того, семь островов Госпера, состыкованных вместе (один в центре и шесть вокруг него), образуют снова остров Госпера в три раза большего размера. Из правильных многоугольников таким свойством обладает только квадрат. Б. Мандельброт называет это свойство тайлингом [26, 28, 29].

Пример 10. Дракон Хартера–Хейтуэя [26, 28, 29]. Это еще одна кривая Пеано, которая носит собственное имя. Этот фрактал отличается от предыдущих примеров тем, что заполняет на плоскости область весьма причудливой формы. Результаты первых четырех, двенадцатой и шестнадцатой итераций показаны на рис. 7. Как следует из рисунка, каждый из отрезков прямой

на следующем шаге заменяется на два отрезка, образующих боковые стороны равнобедренного прямоугольного треугольника, для которого исходный отрезок являлся бы гипотенузой. В результате отрезок как бы прогибается под прямым углом. Направления прогиба чередуются. Первый отрезок прогибается вправо (по ходу движения слева направо), второй – влево, третий – опять вправо и т. д. Для удобства восприятия на каждом рисунке пунктиром показана конфигурация предыдущего шага. Таким образом, после каждого шага число имеющихся отрезков удваивается, а длина каждого отрезка уменьшается в $\sqrt{2}$ раз. Следовательно, $N_n = 2^n$, $l_n = 1/(\sqrt{2})^n$, и фрактальная размерность кривой после бесконечного числа шагов оказывается равной

$$D = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{(\sqrt{2})^n}} = 2,$$

т. е. кривая занимает некоторую конечную площадь.

Этот “дракон” представляет собой пример так называемых *L*-систем, изобретенных А. Линденмайером в 1968 г. для моделирования биологического роста [231, 236]. Линденмайер показал, что предельная геометрия даже очень простых систем может быть необычайно фрактальной.

Пример 11. Вселенная Фурнье [26]. Вселенная Фурнье, названная так по имени американско-

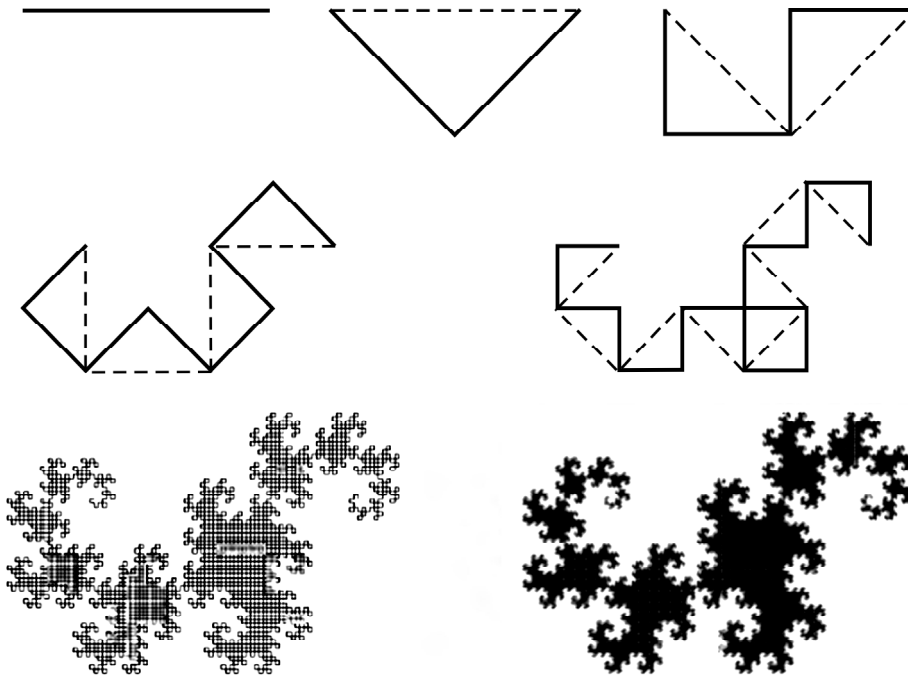


Рис. 7. Дракон Хартера–Хейтуэя [305]

го журналиста и изобретателя, который предложил ее в 1907 г., показана на рис. 8. Каждая точка на этом рисунке представляет одну галактику. Они объединены в скопления радиуса R_1 по семь галактик в каждом скоплении. На рис. 8 видны только пять, поскольку две недостающих расположены симметрично над и под плоскостью рисунка на прямой, проходящей через центр скопления. В свою очередь, семь таких скоплений аналогич-

ным образом объединены в одно суперскопление радиуса R_2 . По такому же принципу строится суперсуперскопление радиуса R_3 , причем $R_3/R_2 = R_2/R_1$, и т. д. В результате многократного повторения такого процесса возникает самоподобная фрактальная структура. Ее фрактальную размерность D легко определить, заметив, что, как следует из рис. 8, в сфере радиуса R_2 содержится в семь раз больше галактик, чем в сфере радиуса R_1 , т. е. $N(R_2) = 7N(R_1)$. Решением этого уравнения является степенная функция $N \propto R^D$. Тогда легко получить, что

$$D = \frac{\ln 7}{\ln(R_2/R_1)}.$$

У Фурнье $R_2 = 7R_1$, откуда размерность вселенной оказывается равной $D = 1$. Как видно, вселенная для этого вовсе не обязана быть прямой или какой-нибудь другой плавной линией. Более того, она даже не должна быть связной областью. Меняя отношения R_2/R_1 , легко построить фрактальные вселенные с другими размерностями D , близкими к единице.

Здесь необходимо сделать еще один важный вывод [26]: равенство фрактальных размерностей двух объектов вовсе не обещает одинаковости их структуры.

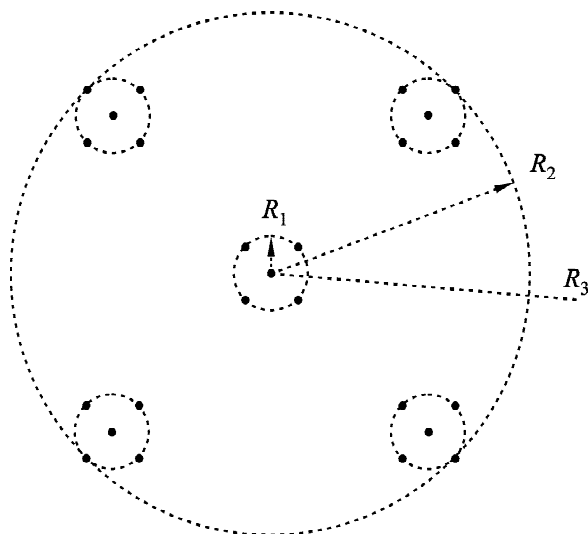


Рис. 8. Вселенная Фурнье [305]

Итак, на рассмотренных примерах мы выяснили, как строятся классические регулярные геометрические фракталы и как оценивается их фрактальная размерность.

2.2. Методы построения геометрических монофракталов

К методам построения регулярных геометрических фракталов относятся метод генератора, метод систем итерируемых функций, метод случайных итераций (или игра в хаос), метод игры в хаос с поворотами, метод сжимающих аффинных преобразований и метод нелинейных комплексных отображений.

2.2.1. Метод генератора

Метод генератора является наиболее старым из всех существующих, и именно с его помощью были построены все регулярные геометрические фракталы в параграфе 2.1. Суть данного метода состоит в следующем [26]. Сначала выбирается некоторый исходный объект (инициатор). Затем определяется некоторое правило преобразования инициатора (генератор), причем в результате обязательно должны получаться новые объекты, которые можно составить только из уменьшенных копий инициатора. В результате повторяющихся применений генератора создается итерационный процесс, который в пределе (когда количество итераций устремляется в бесконечность) дает строго самоподобный регулярный геометрический фрактал. В случае построения, например, канторова множества (рис. 2, *a*) инициатор – это единичный отрезок, а генератор – правило деления отрезка на три равных части и выбрасывание средней.

Фракталы, которые получаются в результате простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований), называются конструктивными фракталами [210]. В противоположность им фракталы, возникающие в нелинейных динамических системах и обладающие лишь приближительной масштабной инвариантностью, называют динамическими фракталами [210].

2.2.2. Метод систем итерируемых функций

Метод систем итерируемых функций (СИФ) был предложен в 1985 г. американским математиком М. Барнсли [237]. Впоследствии этот метод полу-

чил свое развитие в его работах [238] (рекуррентные СИФ) и [239] (суперСИФ). В 1990 г. М. Барнсли и А. Слоан запатентовали метод сжатия изображений, базирующийся на методе СИФ, и тем самым основали новое направление в информационных технологиях, получившее название фрактального сжатия изображений (см., например, [240, 241]). Предложенная ими идея кратко обсуждается ниже.

Суть метода СИФ (см., например, [45, 67, 68, 78, 86, 206, 211, 237, 238, 242]) рассмотрим на примере салфетки Серпинского (рис. 2, *e*), с которой мы познакомились в пункте 2.1.3.

Поместим равносторонний треугольник со стороной единичной длины на комплексную плоскость переменной z так, как показано на рис. 9 слева. Функция комплексной переменной $f_1(z) = z/2$ конформно отображает (преобразование t_1) этот треугольник на равносторонний треугольник в два раза меньшего размера (рис. 9, *a*). Преобразование

$$t_2 : f_2(z) = f_1(z) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$$

смещает полученный треугольник на $1/2$ вправо (рис. 9, *б*), а преобразование

$$t_3 : f_3(z) = f_2(z) + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}z + \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

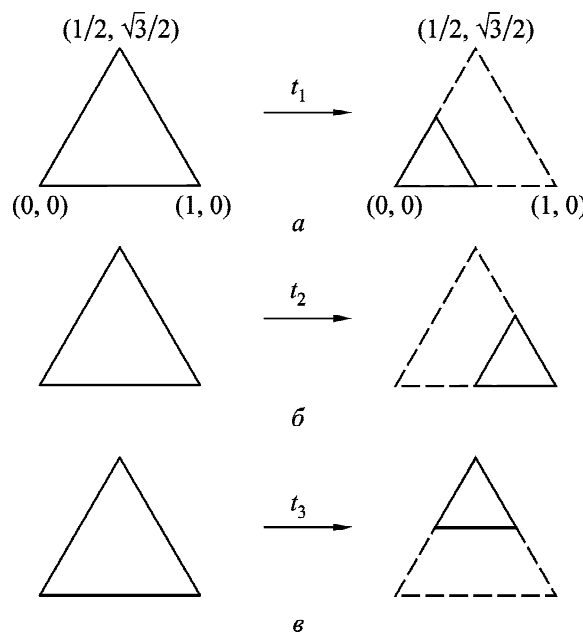


Рис. 9. Преобразования системы из трех линейных отображений [305]

транслирует последний треугольник на комплексный вектор $1/4 + i\sqrt{3}/4$ (рис. 9, в). В итоге три линейные функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $f_3(z)$ осуществляют преобразование одного треугольника в три треугольника со стороной в два раза меньшего размера. Если теперь каждый из этих трех треугольником в свою очередь подвергнуть этим трем преобразованиям, то возникнет 9 треугольников с размером стороны в четыре раза меньше исходного (рис. 10). В каждом треугольнике на рис. 10 показан так называемый генеалогический код – результирующее преобразование, при помощи которого данный треугольник получен из исходного. Обратим внимание на некоммутативность преобразований, так как преобразования, например, $(t_1 t_2)$ и $(t_2 t_1)$ создают разные треугольники. В результате итерационного процесса в пределе получаем салфетку Серпинского.

Важно отметить тот факт, что стартовать мы могли бы не только с треугольника, а, например, с круга, квадрата или вообще любой (даже несвязной) фигуры, произвольным образом расположенной на плоскости. Результат в пределе оказался бы тем же самым. Причина заключается в том, что салфетка Серпинского является своеобразным аттрактором для этой системы из трех линейных преобразований $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $f_3(z)$, которую в литературе (см., например, [78]) называют СИФ.

Разумеется, разные СИФ имеют разные аттракторы, а потому возможно построения разных регулярных геометрических фракталов.

С теорией СИФ тесно связано понятие фрактел (fractel). Термин “фрактел”, который является сокращением от словосочетания “фрактальный элемент” (fractal element), был введен М. Барнсли, М. Хегландом и П. Массопустом в 2016 г. [243] для обозначения специальных структурных объектов, из которых как из кирпичиков можно построить СИФ [244].

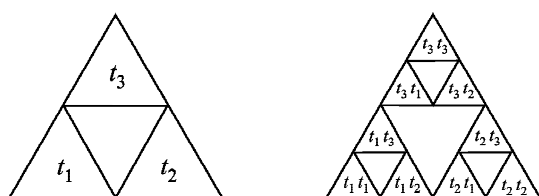


Рис. 10. Первые два поколения итераций системы из трех линейных отображений [305]

На сегодня теория СИФ и ее практические приложения продолжают развиваться (см., например, [245]).

2.2.3. Метод случайных итераций, или игра в хаос

Метод случайных итераций, созданный автором метода СИФ М. Барнсли, известен также как игра в хаос [78]. Интересно, что некоторые авторы [67, 68] считают, что идея игры в хаос в чем-то схожа с появившейся ранее другой игрой, авторство которой приписывают некоему мифическому “сэру Пинскому”. Суть метода случайных итераций такова [45, 52, 67, 68, 78, 246].

Возьмем равносторонний треугольник с вершинами в точках A , B и C . Внутри этого треугольника произвольным образом выберем начальную точку. Бросим теперь игральную кость, представляющую собой кубик, на 6 гранях которого проставлены буквы A , B и C . Пусть каждая буква присутствует на двух из них, тогда вероятность выпадения любой буквы одинакова и равна $1/3$. Допустим, что в результате первого броска выпала буква A . Соединим мысленно нашу начальную точку с вершиной треугольника A отрезком прямой и на его середине поставим точку (рис. 11, а). Пусть теперь она играет роль начальной. После этого повторим всю процедуру с бросанием кубика и проставлением точки. Допустим, на втором шаге выпала буква C , потом B , затем опять C и т. д. На каждом шаге мы будем получать все новые и новые точки. Результаты игры из 5000, 10000 и 50000 бросков показаны соответственно на рис. 11, б–г. Итак, по мере увеличения числа точек все явственнее проступает структура салфетки Серпинского. Важно отметить, что, хотя каждый раз выбор осуществляется чисто случайным образом, возникающее на плоскости множество точек отнюдь не случайно и обладает ярко выраженной фрактальной структурой.

Объяснение полученному результату достаточно простое. Существует сразу не бросающаяся в глаза связь этой простой игры в хаос с СИФ, рассмотренной в пункте 2.2.2. На самом деле, на каждом шагу итерационного процесса к текущей точке z применялось выбранное случайным образом одно из трех преобразований $f_1(z)$, $f_2(z)$ или $f_3(z)$. А поскольку треугольник Серпинского является аттрактором для этой СИФ, он возникает и при чисто случайном выборе последовательности преобразований $(t_i t_j t_k \dots)$.

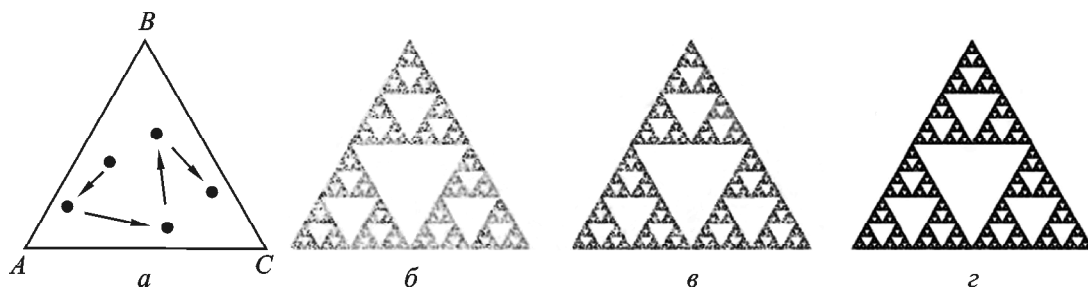


Рис. 11. Игра в хаос: *a* – 5 точек, *б* – 5000 точек, *в* – 10000 точек, *г* – 50000 точек [229, 305]

Более того, оказывается (см., например, [78]), что как правила игры в хаос, так и объект, на котором ведется игра, можно изменять и строить в каждом случае свою СИФ. Это позволяет создавать большое количество новых регулярных геометрических фракталов.

2.2.4. Метод игры в хаос с поворотами

Возможности игры в хаос можно расширить, если кроме операций сжатия и параллельного переноса, описанных в предыдущем пункте, использовать еще операцию поворота на заданный угол [45, 78]. В этом случае СИФ для кривой Коха имеет вид [78]:

$$t_1 : f_1(z) = \frac{1}{3}z,$$

$$t_2 : f_2(z) = \frac{1}{3}e^{i\pi/3}z + \frac{1}{3},$$

$$t_3 : f_3(z) = \frac{1}{3}e^{i\pi/3}z + \frac{3+i\sqrt{3}}{6},$$

$$t_4 : f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}.$$

Результат, полученный для разного количества итераций, показан на рис. 12.

Подобным образом можно получить и многие другие фракталы, например, дракона Хартера–Хейтуэя (рис. 7).

2.2.5. Метод сжимающих аффинных преобразований

Рассмотренные выше методы основаны на линейных преобразованиях на комплексной плоскости, которые являются частными случаями более общего аффинного преобразования плоскости [45, 78]

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

В общем случае аффинное преобразование на плоскости задается шестью независимыми действительными числами. Числа *e* и *f* описывают обычную трансляцию, а четыре числа *a*, *b*, *c*, *d* задают произвольное линейное преобразование при неизменном положении начала координат (0,0). Фактически аффинное преобразование описывает переход от прямоугольной декартовой системы координат к произвольной косоугольной системе координат.

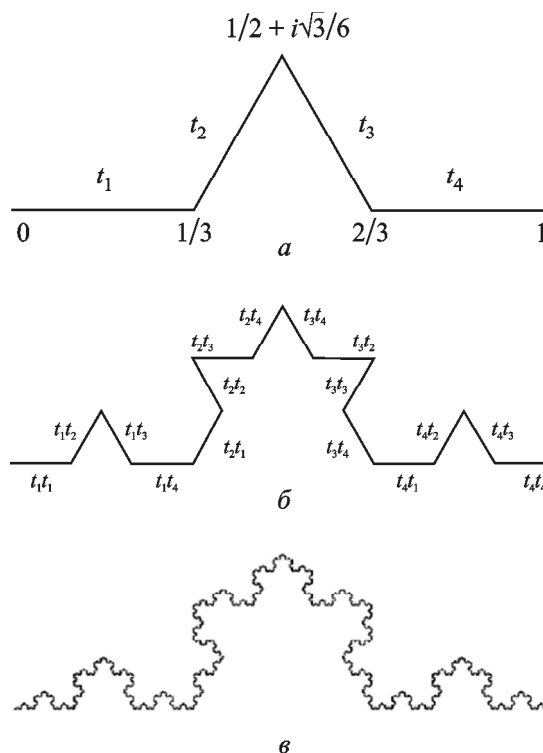


Рис. 12. Построение кривой Коха с помощью СИФ: *a* – после одной итерации, *б* – после двух итераций, *в* – после 150000 итераций [305]

Неподвижной точкой аффинного преобразования называют точку, которая остается на месте под воздействием данного преобразования.

Неподвижная точка называется притягивающей, если, начав с произвольной точки на плоскости, мы в процессе итераций будем все время к ней приближаться.

Если длина произвольного отрезка при аффинном преобразовании уменьшается, то преобразование называют сжимающим.

Сжимающие аффинные преобразования играют ключевую роль в методе СИФ. Установлено [78], что именно в этом случае СИФ имеют своим аттрактором фрактальное множество. неподвижные точки каждого отображения, входящего в СИФ, принадлежат фрактальному множеству. Например, для салфетки Серпинского (рис. 11) это вершины исходного треугольника.

Таким образом, метод сжимающих аффинных преобразований является на сегодня одним из самых эффективных методов создания регулярных геометрических монофракталов.

Одним из наиболее ярких примеров среди различных СИФ, несомненно, является открытая М. Барнсли система из четырех сжимающих аффинных преобразований, аттрактором которой является множество точек, поразительно напоминающее по форме изображение листа папоротника (рис. 13) [78].

Это множество точек бесконечно самоподобно. Однако главный удивительный результат состоит в том, что вся информация о таком сложнейшем рисунке содержится в СИФ, точнее, всего лишь в 28 значениях ее коэффициентов. Зная их, всегда можно точно восстановить координаты всех точек рисунка. Эта идея и лежит в основе фрак-

тального сжатия изображений [78]. Впервые она была успешно осуществлена М. Барнсли и А. Слоаном в 1988 г. [240] в созданной ими совместно компании по кодированию и сжатию графической информации с помощью соответствующим образом подобранной СИФ. В 1985 г. ими была сформулирована так называемая теорема коллажа [52, 53, 78], согласно которой для любого изображения можно подобрать соответствующую ему СИФ. И тогда вместо передачи информации об атрибутах всех пикселей изображения достаточно сообщить получателю только набор коэффициентов этой СИФ, что на порядок снижает нагрузку на канал передачи данных и существенно увеличивает скорость. Платой за полученные преимущества является необходимость наличия высокопроизводительных компьютерных систем, осуществляющих кодирование/декодирование изображений в масштабе реального времени.

2.2.6. Метод нелинейных комплексных отображений

Еще одной полезной идеей создания фрактальных объектов является метод нелинейных комплексных отображений [45, 247], сопоставляющих одному комплексному числу другое комплексное число по итерационному правилу

$$z_{n+1} = f(z_n),$$

где $f(z)$ – некоторая нелинейная функция, n – номер итерации.

Простейшим нелинейным отображением является квадратичное:

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c,$$



Рис. 13. Лист папоротника при 2000, 4000, 10000, 50000 и 200000 итераций [305]

где c – комплексная константа. Кажущаяся простота алгоритма никак не сопоставима с потрясающей красотой и разнообразием тех фрактальных структур, которые возникают в результате его использования. Примером может служить множество Мандельброта (рис. 2, з) (см., например, [45, 247]).

Метод нелинейных комплексных отображений позволяет создавать комплексные, гиперкомплексные, мультикомплексные и мультигиперкомплексные фрактальные объекты [248].

2.2.7. Методы построения стохастических фракталов

Рассмотренные выше алгоритмы, использованные для построения регулярных фракталов, могут быть модифицированы для построения стохастических (или нерегулярных случайных) фракталов [17, 206, 212]. Для этого достаточно ввести в соответствующие алгоритмы один или несколько случайных параметров. Б. Мандельброт такие фракталы называет “унифракталами” [183, 215].

Идею поясним на примере салфетки Серпинского (пункт 2.2.2) [17]. Давайте будем удалять на заданном этапе, например, не четко определенный (детерминированный подход) центральный треугольник, а один из четырех, выбранный случайным образом. Тогда получится стохастический вариант салфетки Серпинского. Процесс такого построения показан на рис. 14.

Важно отметить, что полученный объект не является ни строго самоподобным, ни строго

самоаффинным, а потому, собственно говоря, и не является регулярным фракталом. Однако он является статистически самоподобным и относится к стохастическим фракталам. Именно возможность существования таких фракталов и учитывается в определении К. Фалконера (см. параграф 1.3).

Здесь необходимо упомянуть еще об одном интересном результате, полученном автором концепции СИФ М. Барнсли, – суперфракталах. По определению [239], суперфракталы – это семейство фрактальных объектов, которые получаются в результате использования метода игры в хаос для СИФ специального вида, называемых суперСИФ, и которые занимают промежуточное положение между полностью детерминированными фракталами и полностью случайными фракталами. Суперфракталы были открыты М. Барнсли в 2002 г. в соавторстве с Дж. Хатчинсоном и О. Стенфло [239].

К стохастическим фракталам относятся также алеаторные фракталы. Алеаторный фрактал можно построить, используя любой детерминированный алгоритм построения фрактала, в котором после каждого шага происходит некоторое случайное возмущение. Такое возмущение может создавать генератор случайных чисел с задаваемыми законом распределения и необходимыми параметрами этого закона [87].

2.3. Толстые фракталы

Все рассмотренные нами выше математические фракталы обладают одной важной особенностью [67, 68], которую мы не отметили. Оказывается, что все они имеют меру Хаусдорфа H_d (см. пункт 1.4.3), которая равна или нулю, или бесконечности. Именно для описания таких объектов и вводилась размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} , которую мы использовали в виде фрактальной размерности D .

Однако могут существовать и такие обладающие фрактальными признаками самоподобные множества, для которых мера Хаусдорфа H_d принимает конечное значение.

Самоподобное множество, для которого мера Хаусдорфа H_d принимает конечное значение, называется толстым (или “жирным”) фракталом [67, 68, 229, 249].

Толстые фракталы бесполезно характеризовать размерностью Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} ,

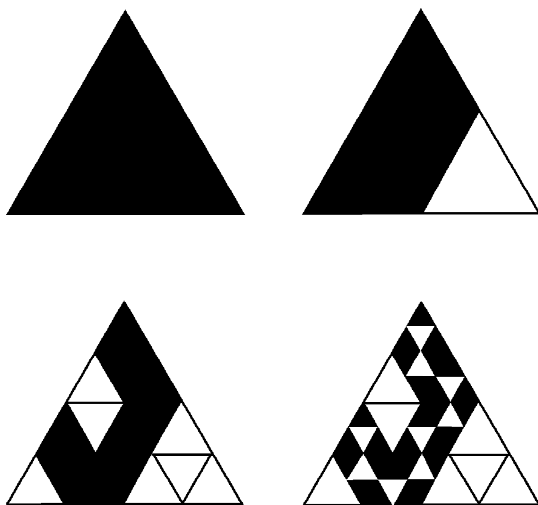


Рис. 14. Стохастический вариант салфетки Серпинского [229]

поскольку она всегда оказывается равна евклидовой размерности E пространства, в которое этот фрактал вложен. Следовательно, она не несет никакой дополнительной информации о фрактале. Поэтому толстые фракталы принято описывать с помощью показателей скейлинга [67, 68]. Скейлинг – синоним масштабной инвариантности, т. е. независимости структуры объекта от выбранного масштаба.

Рассмотрим пример построения толстого фрактала [67, 68, 229]. Используем процедуру, похожую на процедуру построения канторова множества (см. пункт 2.1.3, пример 1).

На первом этапе построения из единичного отрезка ($l_0 = 1$) удаляется средняя часть длиной $1/3$, и длина одного оставшегося отрезка составляет $l_1 = 1/3$ (как и было раньше), но на втором этапе из каждого оставшегося отрезка удаляется средняя часть, длина которой составляет $1/9$ длины оставшегося отрезка, т. е.

$$l_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \right) = \frac{4}{27} = \frac{2^2}{3^3} > \frac{1}{9} = \frac{3}{27}.$$

Для канторова интервала длина оставшегося отрезка была бы равна $1/9$. Иными словами, теперь после каждого этапа остается бóльшая длина. На третьем этапе мы выбрасываем $1/81$ от длины оставшегося на предыдущем этапе отрезка, т. е. после этого длина одного отрезка равна

$$l_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^2}{3^3} - \frac{2^2}{3^3} \cdot \frac{1}{81} \right) = \frac{2^2}{3^3} \cdot \frac{40}{81} = \frac{160}{2187} > \frac{1}{27} = \frac{81}{2187}.$$

В общем, на каждом этапе мы удаляем центральные части, относительная длина которых равна $(1/3)^{2k}$ (рис. 15). После n итераций получаем 2^n отрезков, общая длина которых равна

$$L_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 3^{-2k}).$$



Рис. 15. Построение толстого фрактала [229]

При $n \rightarrow \infty$ значение длины (мера множества) L_n стремится не к 0, как это было для канторова интервала, а к некоторому ненулевому значению $L_\infty = 0.5851874\dots$.

Несколько более “тощий” фрактал можно получить, если изымать при каждой итерации центральные части относительной длины 3^{-k} . В этом случае полная длина остающихся отрезков составляет

$$L_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 3^{-k}) = 0.560\dots$$

Для характеристики толстых фракталов используется, как правило, один из нескольких показателей скейлинга [67, 68, 229]. Самый популярный показатель скейлинга определяется так: заполняются все пустоты, длина которых не превышает ε , и аппроксимируется мера $\mu(\varepsilon)$ получившегося в результате множества степенным законом

$$\mu(\varepsilon) = \mu(0) + C\varepsilon^\beta, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где C – постоянная, а β – показатель скейлинга, причем $0 \leq \beta \leq \infty$. Тогда в последнем примере (с удалением средних частей относительной длиной 3^{-k}) положим $\varepsilon = 3^{-k}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_n = \mu(\varepsilon) &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - 3^{-k}) = \frac{\mu(0)}{\prod_{k=n}^{\infty} (1 - 3^{-k})} = \\ &= \mu(0) (1 + 3^{-n} + 3^{-n-1} + \dots). \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\mu(\varepsilon) \approx \mu(0)(1 + 3^{-n}) = \mu(0)(1 + \varepsilon),$$

$$\mu(\varepsilon) - \mu(0) = \mu(0)\varepsilon^1 = \mu(0)\varepsilon^\beta,$$

откуда $\beta = 1$. Таким образом, для нашего толстого фрактала показатель скейлинга оказался равным единице.

Обозначив меру пустот, меньших ε , через $F(\varepsilon)$, можно записать показатель скейлинга в следующем виде:

$$\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln F(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

Показатель β определяется скоростью обращения в нуль меры малых пустот [67, 68, 229].

Нужно заметить, что для канторова множества относительная длина выбрасываемого отрезка всегда равна $1/3$ и не зависит от k и мера малых пустот в нуль не обращается. Поэтому для него показатель скейлинга построить нельзя.

Напомним, что размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} обоих рассмотренных толстых фракталов равна единице и, следовательно, не позволяет отличить их один от другого.

2.4. Фрактальная размерность физического фрактала

Как мы уже убедились выше, для большинства математических фракталов размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} можно посчитать. Именно ее обычно используют в качестве фрактальной размерности D математических фракталов. В крайнем случае вводятся дополнительные числовые характеристики (например, показатели скейлинга для толстых фракталов). Для нужд математиков этого оказывается вполне достаточно.

Однако в реальных задачах, с которыми сталкиваются специалисты в других областях науки и техники, фракталы оказываются не математическими, а физическими. Различия между ними уже обсуждались в параграфе 1.5.

Установлено [32], что для физических фракталов вычислять размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} оказывается либо затруднительно, либо просто бессмысленно. Последнее объясняется тем, что для конечных множеств она оказывается принципиально равной нулю, а значит, никакой полезной информации о множестве не несет. При использовании же численных методов и компьютера для проведения фрактального анализа реального объекта любая величина, его описывающая, представляется принципиально в виде конечного множества. Именно поэтому размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} в качестве фрактальной размерности D при описании физических фракталов не применяется.

Б. Мандельброт, отмечая этот факт, в [26] говорит о некоторой эффективной размерности для физических фракталов. Однако он подчеркивает, что ей не следует давать точного определения.

Рассмотрим, какие именно фрактальные размерности и как можно вычислять для физичес-

ких фракталов. В настоящей статье мы делаем попытку собрать воедино все наиболее популярные фрактальные размерности и систематизировать их. Это представляется важным, поскольку на сегодня в литературе в данном вопросе существует серьезная путаница, так как все авторы, вычисляя абсолютно разные характеристики, для их наименования используют одно и то же словосочетание “фрактальная размерность” (см., например, [31, 32, 250]). Подтверждением этому могут служить следующие слова К. Фалконера: «Когда я вижу словосочетание “фрактальная размерность”, то в моем мозгу зажигается сигнал предупреждения» [211].

Важно отметить, что при анализе физических фракталов нужно указывать не только какой именно фрактальной размерности соответствует полученное число, но и в каком именно диапазоне масштабов это число является верным. Целесообразно также указывать погрешность, с которой выполнена оценка фрактальной размерности.

2.4.1. Кластерная размерность

При определении по формуле (2) фрактальной размерности D , в качестве которой для математических фракталов используется размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} , существенным является стремление к нулю диаметра ячейки покрытия l . Однако для физических фракталов этого достичь не удается, поскольку составные части физической системы обладают некоторыми минимальными размерами R_0 – например, радиус молекулы или атома и т. д. Поэтому на практике для характеристики физической системы используют понятие размерности кластера, или кластерной размерности (см., например, [216]). Оно описывает асимптотику поведения числа ячеек $N(\delta)$ в покрытии кластера (системы взаимодействующих частиц, которая обладает свойством масштабного самоподобия в ограниченном диапазоне масштабов [21, 82]) в зависимости от их характерного размера, так же как и понятие размерности Хаусдорфа–Безиковича. Отличие состоит лишь в том, что зависимость $N(\delta)$ имеет реальный смысл только при $\delta > R_0$, а кластерная размерность характеризует лишь тенденцию скорости роста $N(\delta)$ при уменьшении δ [207, 222].

Формально кластерная размерность D_K может быть получена как показатель степени в формуле [207, 222]

$$N(\delta) \sim \rho \left(\frac{R}{\delta} \right)^{D_K},$$

где $\rho = \text{const}$, связывающей число ячеек $N(\delta)$, покрывающих кластер, с размером ячейки δ и радиусом R наименьшей сферы, содержащей кластер.

Строго говоря, физические фракталы и есть фрактальные кластеры [251]. Итак, кластерная размерность D_K хорошо подходит для описания физических фракталов.

К тому же следует отметить, что любая фрактальная размерность, в том числе и кластерная размерность D_K , количественно описывает степень заполнения фракталом пространства, в которое он помещен [207].

Отметим также, что кластерную размерность иногда называют размерностью подобия, а также фрактальной (дробной) размерностью [1, 31, 32, 52, 132, 165, 212, 217, 222, 252].

Разновидностью кластерной размерности является щелевая размерность (gap dimension), введенная Б. Мандельбротом как обобщение размерности подобия для самоаффинных структур [252].

2.4.2. Емкостная размерность

Существует наглядное, или геометрическое, определение фрактальной размерности, называемой емкостной размерностью (capacity dimension) или емкостью [19, 31, 32, 42, 46, 47, 96, 132, 217, 253, 254]. Авторство емкостной размерности приписывают А. Н. Колмогорову [255], который ввел ее в 1959 г. и называл энтропийной размерностью. Иногда ее еще называют колмогоровской размерностью (Kolmogorov dimension) [217] или колмогоровской энтропией (Kolmogorov entropy) [212]. Однако к емкостной размерности сводится также размерность, введенная Г. Минковским [256] в 1901 г., обобщенная для фракталов Дж. Булиганом [257] в 1928 г. и известная как размерность Минковского [32, 206], размерность Минковского–Булигана [1, 67, 68, 211, 223, 226] или размерность Кантора–Минковского–Булигана [78]. Емкостную размерность связывают также [96, 211] с работой Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана (1932 г.). Многие авторы емкостную размерность называют размерностью покрытия (covering dimension) [78, 226], клеточной размерностью (box

dimension или box-counting dimension) [52, 67, 68, 78, 147, 154, 165, 206, 207, 212, 213, 216, 217, 223, 246, 258–260], объемной размерностью [230], размерностью Фростмана [26], метрической размерностью [212], логарифмической плотностью [212] или дробной размерностью (fractional dimension) [32, 206]. Дробной размерностью иногда называют также размерность Хаусдорфа–Безиковича. Вообще, такое название выглядит неудачным, что отмечал еще Б. Мандельброт [26], поскольку, например, для фрактала в виде кривой Пеано $D_C = 2$ (см. пункт 2.1.3), и это явно не дробная размерность. Мы же для определенности далее будем использовать термин “емкостная размерность”. Достоинства и недостатки емкостной размерности на уровне математической строгости хорошо рассмотрены в [211].

Емкостная размерность строится из таких соображений [42, 253]. Пусть имеется некоторое множество N_0 точек, равномерно распределенных в некотором n -мерном пространстве. Вычислим минимальное количество N n -мерных кубов (или сфер), которыми можно покрыть все это множество точек при условии, что размер одного такого куба (или сферы) равен ε . Ясно, что, во-первых, $N = N(\varepsilon)$, а во-вторых, $N < N_0$. Если N_0 достаточно велико, то для точек, распределенных вдоль кривой, количество покрывающих их отрезков $N \approx 1/\varepsilon$; для точек, распределенных на плоскости, количество покрывающих их квадратов $N \approx 1/\varepsilon^2$; для точек, распределенных в пространстве, количество покрывающих их кубов $N \approx 1/\varepsilon^3$ и т. д. Поэтому в общем случае имеем $N \approx 1/\varepsilon^d$. Отсюда емкостная размерность D_C записывается в виде:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Здесь подразумевается, что число точек $N_0 \rightarrow \infty$.

Емкостная размерность D_C во многих случаях совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} , в частности, для самоаффинных кривых. Но так бывает не всегда. Например, для конечных и даже бесконечных, но счетных множеств $D_{HB} = 0$, а D_C имеет иное значение. И вообще, известно, что $D_C \leq D_{HB}$ [26, 217, 224]. Таким образом, отождествлять емкостную размерность и размерность Хаусдорфа–Безиковича,

как иногда делается в литературе (см., например, [217, 228]), все же не рекомендуется.

Строго говоря, емкостная размерность D_C подходит для описания математических фракталов, но в силу требования $\varepsilon \rightarrow 0$ формально не может использоваться для работы с физическими фракталами. В определенном смысле емкостной размерности D_C для физических фракталов является рассмотренная выше кластерная размерность D_K (подробнее об этом рассказано в пункте 2.4.8). Поэтому очень часто многие специалисты (см., например, [154, 217]) на самом деле для физического фрактала вычисляют размерность D_K , но говорят о D_C , D_{HB} или даже просто о фрактальной размерности D .

Важно отметить, что на практике рекомендуется вычислять несколько значений емкостной размерности при разных положениях покрывающей фрактал сетки, после чего вычислять ее среднее значение [216].

Следует также отметить, что описанное выше понятие “емкость” (capacity) формально является лишь омонимом привычной для всех радиофизиков физической величины “емкость” (capacitance).

2.4.3. Поточечная размерность

Приступая к рассмотрению поточечной размерности [3, 42, 46, 47, 68, 147, 165, 210], необходимо заметить, что рассмотренные ранее размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} , кластерная размерность D_K и емкостная размерность D_C имеют нелокальный характер, поскольку при их построении используется весь изучаемый объект. Здесь же наблюдается иная ситуация [42].

Пусть у нас имеется множество, содержащее N_0 точек. Для вычисления поточечной размерности, которая имеет локальный характер, поскольку вычисляется в окрестности некоторой выбранной точки, возьмем эту самую точку, положение которой задается вектором \vec{x}_i . Опишем вокруг нее сферу радиуса r (или куб с ребром r) и подсчитаем количество точек исследуемого множества $N(r)$, попавших внутрь сферы. Поточечная размерность D_P задается соотношением [42]

$$D_P = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(N(r)/N_0)}{\ln r}. \quad (3)$$

Может так оказаться, что величина D_P зависит от выбора \vec{x}_i . Такое вполне может произойти, если исследуется неоднородный фрактал, т. е. мультифрактал. Тогда вычисляют усредненную поточечную размерность. Для этого выбирают случайным образом множество точек $M < N_0$ и в каждой его точке вычисляют $D_P(\vec{x}_i)$ по формуле (3). После этого усредненная поточечная размерность рассчитывается по формуле [42, 147]

$$\langle D_P \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D_P(\vec{x}_i). \quad (4)$$

Поскольку при вычислении D_P имеется требование $r \rightarrow \infty$, строго говоря, для физических фракталов поточечную и усредненную поточечную размерности вычислять нельзя.

2.4.4. Корреляционная размерность

Корреляционная размерность была предложена П. Грассбергером и И. Прокачиа в 1983 г. [264].

Рассмотрим алгоритм вычисления корреляционной размерности [3, 42, 46, 47, 132, 147, 216, 217, 253, 261–263]. Берем то же самое множество из N_0 точек, что и в предыдущем случае. Для всех существующих пар точек вычисляем расстояния между ними $s_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$. Для этого используют или обычную евклидову меру расстояния (квадратный корень из суммы квадратов компонент), или какую-либо эквивалентную меру (например, сумму абсолютных величин компонент вектора). Корреляционная функция (она же корреляционная сумма или корреляционный интеграл) традиционно определялась выражением

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left(\begin{array}{l} \text{число пар } (i, j), \\ \text{для которых } s_{ij} < r \end{array} \right).$$

Корреляционная размерность определяется как

$$D_G = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}. \quad (5)$$

Впоследствии выяснилось [42, 45, 262, 264], что корреляционную функцию $C(r)$ лучше вычислять, описав вокруг каждой точки \vec{x}_i сферу радиуса r (или куб с ребром r) и подсчитав число точек в каждой сфере, т. е.

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^N H\left(r - \left| \bar{x}_i - \bar{x}_j \right| \right), \quad i \neq j,$$

где функция Хэвисайда задается соотношением

$$H(s) = \begin{cases} 1, & s > 0; \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Этот алгоритм получил название “алгоритм Грассбергера–Прокаччия”. Достаточно долгое время именно он считался одним из самых относительно простых и эффективных алгоритмов при оценивании фрактальных размерностей [45, 262].

Вычисленная таким образом корреляционная размерность D_G отличается от поточечной размерности D_P тем, что в первом случае суммирование проводится вокруг каждой точки.

2.4.5. Информационная размерность

Рассмотрим алгоритм вычисления информационной размерности [3, 42, 46, 47, 132, 147, 216, 217, 253]. Как и в случае вычисления емкостной размерности D_C , покроем множество исследуемых точек N кубами с ребром длиной ε . Подсчитаем количество точек N_i в каждом кубе отдельно. Оценим вероятность найти точку в i -й ячейке:

$$P_i = \frac{N_i}{N_0}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \sum_{i=1}^N P_i = 1,$$

где N_0 – общее количество точек во множестве. Подчеркнем, что $N_0 \neq N$.

Информационная энтропия определяется выражением

$$I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^N P_i \log P_i.$$

Как известно, если логарифм берется по основанию 2, то $I(\varepsilon)$ измеряется в битах.

Информационная размерность имеет вид:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N P_i \log P_i}{\log \varepsilon}.$$

Информационная размерность D_I связана с емкостной размерностью D_C соотношением [42, 216, 253]

$$D_I \leq D_C.$$

Более того, было установлено [42, 216, 217, 253], что

$$D_G \leq D_I \leq D_C \leq D_{HB}.$$

Другими словами, информационная и корреляционная размерности ограничивают снизу емкостную размерность, а она сама – размерность Хаусдорфа–Безиковича.

2.4.6. Обобщенные размерности Реньи

В 1983 г. П. Грассбергер, Х. Хэнтчел и И. Прокаччия [45, 208, 217, 264–266] предложили использовать в нелинейной динамике семейство обобщенных размерностей Реньи, которые были введены в 1961 г. венгерским математиком А. Реньи для иных целей в теории информации [254, 267].

В статистической механике и в теории информации вводится определение информации порядка q [3, 42, 67, 68, 254]:

$$I_q = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^N P_i^q,$$

где P_i – вероятность найти точки во множестве N покрывающих кубов. Если ε – длина ребра покрывающего куба, то можно определить размерности порядка q или обобщенные размерности Реньи:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_q(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

При $q = 0$

$$I_0 = \frac{1}{1-0} \log \sum_{i=1}^N P_i^0 = \log N,$$

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_0(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = D_C,$$

и мы получаем емкостную размерность D_C . Для удобства обычно используется натуральный логарифм.

При $q = 1$ (полагая, что $q = 1 + \eta$, и устремляя $\eta \rightarrow 0$)

$$I_1 = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \log \sum_{i=1}^N P_i^{1+\eta} = - \sum_{i=1}^N P_i \log P_i,$$

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_1(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N P_i \log P_i}{\log \varepsilon} = D_I,$$

и получаем информационную размерность D_I .

При $q = 2$

$$I_2 = \frac{1}{1-2} \log \sum_{i=1}^N P_i^2 = \lim_{N_0 \rightarrow 0} \log(2N_0 C(\varepsilon)),$$

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_2(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lim_{N_0 \rightarrow 0} \log(2N_0 C(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)} = D_G.$$

Таким образом, емкостная размерность D_C не учитывает распределения точек между покрывающими множество ячейками, в то время как информационная размерность D_I измеряет вероятность найти точки в ячейке. Наконец, корреляционная размерность D_G учитывает вероятность найти в одной и той же ячейке две точки [42].

Обратим особенное внимание на то, что поточечную D_p , корреляционную D_G и информационную D_I размерности можно и нужно вычислять для физических фракталов. Для этого следует строить соответствующие определениям логарифмические зависимости и находить размерности по углу наклона соответствующей прямой. Минимальный размер покрывающего куба не следует устремлять к нулю. Он должен быть таким, чтобы в него попадала хотя бы одна соседняя точка. Понятно, что в этом случае емкостная D_G размерность превращается в кластерную D_K , а поточечная D_p , информационная D_I и корреляционная D_G – в свои аналоги, построенные по такому же принципу.

Следует также заметить [42], что для размерности D_q при $q \rightarrow \infty$ в сумме, стоящей в числителе, единственным значимым числом становится наибольшая вероятность P_{\max} . Отсюда

$$D_\infty = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln P_{\max}}{\ln r}.$$

И наоборот, при $q \rightarrow -\infty$ значение суммы определяется наименьшей вероятностью P_{\min} , откуда получаем

$$D_{-\infty} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln P_{\min}}{\ln r}.$$

Заметим, что $D_{-\infty} \geq D_\infty$. И вообще, для двух любых размерностей с различными q справедливо неравенство

$$D_q \geq D_{q'}, \text{ при } q < q'.$$

Таким образом, D_q – монотонно невозрастающая функция от q . Только в исключительных случаях D_q не зависит от q и принимает одно и то же значение во всем диапазоне $-\infty \leq q \leq \infty$. Примером такого фрактала является канторово множество (рис. 2, а) [42].

Отметим, что на практике иногда отдельно изучаются размерности D_{-1} и $D_{1/2}$ [96].

2.4.7. Гомотетическая размерность

Вернемся к понятиям самоподобия и самоаффинности. Определим эти понятия более строго с помощью теории множеств (см., например, [21, 31, 32, 207]).

Преобразование называется преобразованием подобия, если каждая точка $\vec{x} = (x_1, \dots, x_E)$ E -мерного пространства преобразуется в точку $\vec{x}' = (rx_1, \dots, rx_E)$ с одинаковым для всех координат значением коэффициента подобия r .

Говорят, что ограниченное фрактальное множество \mathfrak{S} самоподобно с отношением подобия r , если \mathfrak{S} является объединением N непересекающихся подмножеств $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_N$, каждое из которых конгруэнтно множеству $r(\mathfrak{S})$, получаемому из \mathfrak{S} с помощью преобразования подобия с $0 < r < 1$.

Свойство конгруэнтности означает, что множество точек \mathfrak{S}_i совпадает с множеством точек $r(\mathfrak{S})$ после переноса и/или поворота.

Гомотетическая размерность множества \mathfrak{S} равна

$$D_S = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}.$$

Множество \mathfrak{S} называется статистически автомодельным, если оно является объединением N отдельных подмножеств, каждое из которых получено из \mathfrak{S} преобразованием подобия с коэффициентом r ($0 < r < 1$) и обладает в точности теми же статистическими свойствами, что и $r(\mathfrak{S})$.

Преобразование называется аффинным преобразованием, если переводит точку $\vec{x} = (x_1, \dots, x_E)$ в точку с координатами $\vec{x}' = (r_1x_1, \dots, r_Ex_E)$, где не все коэффициенты подобия r_1, \dots, r_E одинаковы.

Ограниченное множество \mathfrak{S} самоаффинно по отношению к вектору подобия $\vec{r} = (r_1, \dots, r_E)$, если \mathfrak{S} является объединением N непересекающихся подмножеств $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_N$, каждое из которых конгруэнтно множеству $\vec{r}(\mathfrak{S})$, получаемому из \mathfrak{S} с помощью аффинного преобразования, которое определяется вектором \vec{r} .

Множество \mathfrak{S} называется статистически самоаффинным, если оно является объединением N отдельных подмножеств, каждое из которых получено из \mathfrak{S} с помощью \vec{r} и обладает в точности теми же статистическими свойствами, что и $\vec{r}(\mathfrak{S})$.

Часто случайные множества, например береговая линия, являются самоподобными не только для некоторого определенного значения r , но и для целого ряда его значений, превышающих микромасштаб физического фрактала и меньших его макромасштаба. Для самоподобных множеств метод покрытия множества кубами (или сферами) дает эффективную оценку фрактальной размерности множества – кластерную размерность D_K , и эта оценка совпадает с D_S .

Гомотетическую размерность называют также размерностью подобия [21, 26–29, 147, 155, 197, 206, 207, 246]. Кстати, нужно помнить, что иногда под размерностью подобия подразумевают кластерную размерность (см. пункт 2.4.1), что приводит к путанице.

Однако не все фрактальные множества являются строго самоподобными. А значит, гомотетическую размерность удастся определить только в очень редких случаях.

2.4.8. Глобальная размерность

Фрактальная размерность даже простейших самоаффинных фракталов не определяется однозначно, что в свое время было установлено Б. Мандельбротом [1, 3, 207].

Проблема состоит в следующем [207]. Во-первых, гомотетическую размерность D_S для самоаффинных множеств принципиально невозможно вычислить, поскольку она существует только для самоподобных фракталов. Во-вторых, не совсем ясно, что даст метод покрытия при вычислении фрактальной размерности самоаффин-

ного процесса. Разумеется, в этом случае мы будем вычислять емкостную размерность D_C для математического фрактала и кластерную размерность D_K для физического фрактала.

В качестве модели самоаффинного фрактального процесса возьмем график фрактальной броуновской функции $B_H(t)$, соответствующей модели классического броуновского движения (рис. 16).

Покроем этот график клетками с шириной $b\tau$ вдоль оси абсцисс и длиной ba вдоль оси ординат так, что самая мелкая клетка имеет размеры $\tau \times a$. Тогда емкостная размерность D_C определяется из соотношения

$$N(b; a, \tau) \sim b^{-D_C},$$

где $N(b; a, \tau)$ – число клеток, необходимое для покрытия кривой. Численные оценки дают $D_K = 1.51 \pm 0.02$. Обратим внимание на то, что здесь мы получили именно кластерную размерность D_K , а не искомую емкостную размерность D_C , потому что на графике величина b отнюдь не стремится к нулю, а ограничена вполне конечным значением. Если же положить $a = 1$, т. е. сделать минимальную длину клетки равной типичной длине шага τ , то получим $D_K = 1.03 \pm 0.02$.

Итак, обнаружено весьма существенное различие в оценках D_K . Причина его состоит в следующем.

Пусть длительность рассматриваемого периода времени равна T . Тогда для того чтобы покрыть ось времени, нужно взять $T/b\tau$ отрезков длиной $b\tau$. Но исследуемая функция самоаффинна, а потому в пределах каждого отрезка диапазон изменения функции имеет порядок величины

$$\Delta X(b\tau) = b^H \Delta X(\tau),$$

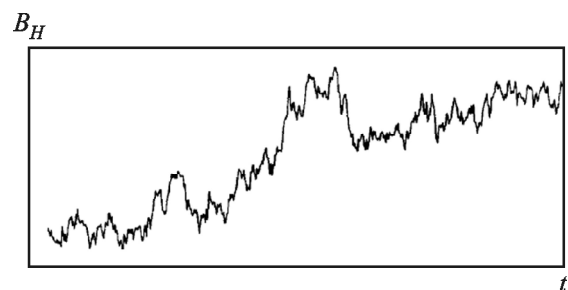


Рис. 16. График броуновского сигнала [229]

где H – показатель Херста. (Последний вводится для фрактальных сигналов и будет подробно рассмотрен нами во второй части настоящей работы.) Чтобы покрыть такой размах кривой, необходимо взять $b^H \Delta X(\tau)/ba$ рядов клеток высотой ba каждая. Тогда для покрытия всей кривой нужно взять количество клеток порядка

$$N(b; a, \tau) = \frac{b^H \Delta X(\tau) T}{ba} \frac{T}{b\tau} \sim b^{H-2} \sim b^{-D_K}.$$

Отсюда для самоаффинных кривых имеем $D_K = D_C = 2 - H$. Этот результат хорошо известен из модели обобщенного броуновского движения (ОБД), которая еще будет рассмотрена нами ниже. Важно то, что указанное соотношение справедливо, когда структура кривой, описывающей фрактальную функцию, исследуется с высоким разрешением, т. е. в локальном пределе. Поскольку для гауссовского (классического) броуновского движения с независимыми шагами показатель Херста $H = 0.5$, мы ожидаем получить для него $D_C = 1.5$, что вполне согласуется с полученным выше первым результатом $D_K = 1.51 \pm 0.02$.

Однако все эти рассуждения оказываются неприменимыми, если для покрытия кривой используются клетки, размер которых не мал по сравнению с размахом кривой. В частности, если выбрать величину a порядка характерной длины шага ($a = 1$), то в каждом временном отрезке длительностью $b\tau$ для покрытия кривой размахом $\Delta B_H(b\tau)$ потребуется всего лишь один ряд клеток, и мы получаем

$$N(b; a, \tau) \sim 1 \cdot \frac{T}{b\tau} \sim b^{-1}.$$

Тогда $D_K = 1 \neq D_C$. Именно этот результат и был получен во втором случае. И теперь кластерная размерность D_K уже не является аппроксимацией емкостной размерности D_C , которая, как показано выше, имеет значение $D_C = 1.5$. Теперь $D_K = D_{C_{gl}} = 1$, где $D_{C_{gl}}$ – глобальная емкостная размерность самоаффинной кривой, часто называемая просто глобальной размерностью, и она равна $D_{C_{gl}} = 1$, т. е. самоаффинные кривые нефрактальны в глобальном смысле. Таким образом мы еще раз подтверждаем, что физические фракталы обладают фрактальными свойствами только в ограниченном диапазоне своих масштабов.

Тогда емкостную размерность D_C , введенную в пункте 2.4.2, в этом смысле можно назвать локальной емкостной размерностью.

Итак, для самоаффинных кривых следует различать локальную емкостную фрактальную размерность $D_C = 2 - H$ и глобальную емкостную фрактальную размерность $D_{C_{gl}} = 1$.

2.4.9. Внутренняя размерность

Еще один вид фрактальной размерности, который можно вычислить непосредственно, получил название “внутренняя размерность” [3, 21, 207].

Внутреннюю размерность D_D получают, когда для измерения длины кривой вдоль нее укладывается эталон или линейка длиной δ [21, 207]. В случае самоаффинных фрактальных кривых вводится “странная” линейка, размерность которой совпадает с размерностями времени, когда она укладывается вдоль оси t , и длины, когда она ориентирована вдоль оси x . Выбрав линейку длиной δ , расположенную так, чтобы она покрывала временной шаг $b\tau$, мы получим следующий вклад в общую длину кривой:

$$\delta = \left[b^2 \tau^2 + b^{2H} (\Delta B_H(\tau)/a)^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Если выбрать достаточно сильное увеличение вдоль оси x , чему соответствует достаточно малое a , то второе слагаемое под корнем станет преобладающим и мы получим $\delta \sim b^H$. Число таких отрезков вдоль оси времени составляет $T/(b\tau) \sim b^{-1} \sim \delta^{-1/H}$, и общая длина $L \sim \delta^{1-1/H} \sim \delta^{1-D_D}$.

Итак, в локальном пределе мы получили, что внутренняя размерность равна $D_D = 1/H$. Кстати, обратим внимание на то, что для процесса, например, с $H = 2/5$ имеем $D_D = 5/2$.

Если же растянуть ось времени, то в соотношении (6) уже первое слагаемое станет определяющим. Тогда $\delta \sim b$, $L \sim \delta \cdot T/b \sim b^0$, откуда $D_{D_{gl}} = 1$. Это глобальная внутренняя размерность самоаффинной кривой.

Иногда локальную внутреннюю размерность называют также скрытой фрактальной размерностью [21].

2.4.10. Массовая размерность

Для многих целей емкостную размерность D_C оказывается вычислять не слишком удобно.

Один из таких примеров – “фигура Лихтенберга” (рис. 17) – один из первых физических фракталов, созданных человеком [67, 68].

Этот узор, образованный электрическим разрядом на металлическом острие, помещенном на изолятор, впервые наблюдался в г. Геттингене (Германия) в 1777 г. физиком Г. К. Лихтенбергом (1742–1799 гг.). Оказывается, что площадь светлой области фигуры Лихтенберга возрастает с увеличением характеристического радиуса R согласно простому однородному степенному закону [67, 68]

$$M \sim R^{D_m}.$$

Однако показатель D_m здесь не равен 2, как в случае сплошной однородной фигуры на плоскости (например, диска с площадью $M = \pi R^2$). Для фигуры Лихтенберга показатель D_m заключен в интервале от 1.7 до 1.9. Его называют массовой размерностью [21, 24, 67, 68, 132, 207, 216].

В [252] показано, что, как и в случае емкостной размерности, для массовой размерности можно определить глобальную массовую размерность и локальную массовую размерность. Для самоаффинных фракталов эти размерности, как правило, совпадают с соответствующими глобальной и локальной емкостными размерностями.

Для самоподобных математических фракталов массовая размерность D_m совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} . Однако для физических фракталов, хотя в основном она

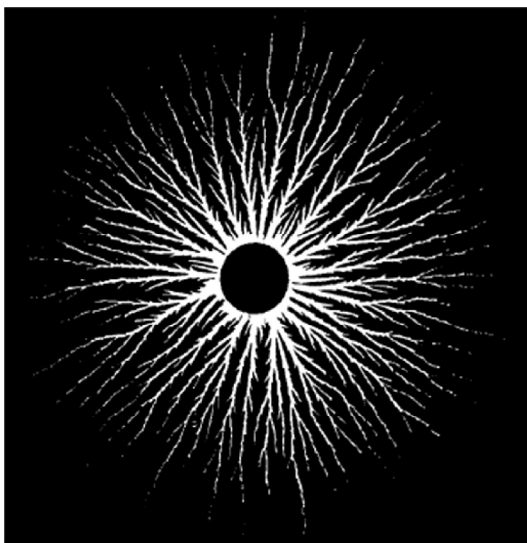


Рис. 17. Фигура Лихтенберга [67, 68]

совпадает, например, с кластерной и емкостной размерностями [216, 252], но иногда может отличаться от других фрактальных размерностей.

2.4.11. Размерность, основанная на эвристике Липшица–Гельдера

Рассмотрим фрактальный процесс $s(t)$. Для него можно оценить локальный и глобальный показатели Липшица–Гельдера [26]. Показатель Липшица–Гельдера называют также показателем сингулярности, экспонентой сингулярности или экспонентой Гельдера [215].

Обратим внимание на то, что в литературе слово “экспонента” часто рассматривается как синоним слова “размерность” (см., например, [37]).

Локальный показатель Липшица–Гельдера α определяется из условия

$$s(t) - s(t_0) \sim |t - t_0|^\alpha \quad \text{при} \quad 0 < |t - t_0| < \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Глобальный показатель Липшица–Гельдера λ на интервале $[t', t'']$ имеет вид:

$$\lambda[t', t''] = \inf_{t' \leq t \leq t''} \alpha.$$

Если известен показатель α , то количество квадратов со стороной r , необходимых для покрытия графика функции $s(t)$ между моментами времени t и $t+r$, приблизительно равно $r^{\alpha-1}$. Таким образом, можно покрыть график функции $s(t)$ на участке $t \in (0, 1)$ с помощью N квадратов и приблизительно оценить размерность функции как $D_{LG} = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$. Этот способ оценки фрактальной размерности D_{LG} , основанной на локальном показателе Липшица–Гельдера α , называется эвристикой Липшица–Гельдера. Считается, что этот способ является устойчивым и весьма эффективным [26].

Б. Мандельброт полагал, что данная размерность D_{LG} эквивалентна поточечной размерности D_p , рассмотренной в пункте 2.4.3 [215].

2.4.12. Размерность, основанная на показателе Херста

Размерность D_H , основанная на показателе Херста H , связана с моделью ОБД [26, 28, 29].

Считается, что гауссов сигнал $X(t)$ со стандартным отклонением σ подчиняется модели ОБД, если приращение

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1), \quad t_2 > t_1,$$

имеет гауссовское распределение, характеризуемое выражением

$$F_{\Delta X}(x) \equiv P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2 - t_1)^H} \times \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma(t_2 - t_1)^H}\right)^2\right] du. \quad (7)$$

Дельта-дисперсия в модели ОБД равна

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2 |t_2 - t_1|^{2H}. \quad (8)$$

Параметр H , входящий в выражения (7) и (8), называется показателем Херста. Его значения удовлетворяют соотношению $0 < H < 1$. При $H = 1/2$ модель ОБД совпадает с классической моделью броуновского движения. Показатель Херста называют также коэффициентом Херста, экспонентой Херста и R/S -показателем [26, 28, 29].

Математическое ожидание приращения сигнала (структурная функция первого порядка) определяется выражением

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma(t_2 - t_1)^H. \quad (9)$$

Формула (9) допускает обобщение на структурные функции порядка q ($q \in \mathbb{N}$). Используя соотношение (7), можно показать, что

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|^q] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma(t_2 - t_1)^{qH}.$$

Приращения обладают свойством статистического самоподобия, которое математически выражается следующим образом:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{r^H} (X(t + \Delta t) - X(t)),$$

для любого $r > 0$.

В рамках модели ОБД показано, что $D_H = 2 - H$ [26, 28, 29].

Видно, что при $H = 1/2$ мы получаем фрактальную размерность классического броуновского сигнала $D_H = 3/2$ [26, 28, 29].

На сегодня существует несколько различных методов определения показателя Херста H . Они будут подробно рассмотрены нами во второй части настоящей работы.

2.4.13. Размерность Фурье

Пусть имеется некоторый фрактальный процесс $s(t)$. Установлено (см., например, [1, 42, 46, 47, 132, 189, 206, 212, 216]), что его энергетический спектр Фурье $W(f)$ убывает при $f \rightarrow \infty$ по закону $|f|^{-\beta}$. В рамках модели ОБД показатель β связан с показателем Херста соотношением $\beta = 2H + 1$. Величину $D_F = 2 - H = (5 - \beta)/2$ Б. Мандельброт назвал размерностью Фурье исходного процесса $s(t)$ [26]. Для фрактальных процессов величина β удовлетворяет неравенству $1 < \beta < 3$. Такой фрактальный процесс является нестационарным.

Кроме того, в рамках модели дробного гауссовского шума величина β может удовлетворять неравенству $-1 < \beta < 1$. При этом связь с показателем Херста задается соотношением $\beta = 2H - 1$, а размерность Фурье определяется выражением $D_F = 2 - H = (3 - \beta)/2$ [216]. Такой фрактальный процесс оказывается стационарным.

Поскольку величина D_F во многих случаях легко определяется из экспериментальных данных, ее часто используют в качестве оценки фрактальной размерности D физических фракталов [206, 211]. Отметим также, что некоторые авторы размерность Фурье называют также спектральной размерностью [3].

2.4.14. Делительная размерность

Еще один вид фрактальной размерности D_{div} , называемый делительной размерностью (divider dimension), известный также как компасная размерность (compass dimension) [216] или линейная размерность (ruler dimension) [57], вычисляется для кривых на плоскости. Для этого используется следующий алгоритм (см., например, [57, 147, 165, 211, 212, 216]).

Выбирается направление обхода исследуемой кривой и ее начальная точка. Начальная точка используется в качестве центра окружности, и проводится дуга радиусом λ . Находится ближайшая точка пересечения дуги с кривой. Найденная точка используется в качестве центра окружности, и снова проводится дуга того же ра-

диуса λ и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет пройдена вся кривая. После этого подсчитывается количество построенных дуг N и вычисляется длина кривой $L = N\lambda$ на данном этапе итерационного процесса. Затем величина λ уменьшается и весь процесс повторяется сначала. В результате получается дискретная зависимость $L = f(\lambda)$, которую следует построить в двойных логарифмических координатах, т. е. $\log L$ от $\log \lambda$. После построения методом наименьших квадратов аппроксимирующей прямой получается так называемый график Ричардсона. Угловым коэффициентом S этой прямой связан с делительной размерностью D_{div} простым соотношением $D_{div} = 1 - S$. Поскольку $S < 0$, получаем $D_{div} > 1$.

Обратим внимание, что в приведенном алгоритме имеется следующая тонкость [216]. Получаемый результат зависит от выбора стартовой точки и от определения точки пересечения дуги с кривой. Дело в том, что точек пересечения может быть больше одной. Тогда можно поступить как минимум тремя разными способами: 1) выбрать первую точку пересечения при обходе дуги по часовой стрелке, 2) сделать то же самое, но при обходе дуги в противоположном направлении, 3) поступить иным способом (если точек пересечения больше двух). В последнем случае можно выбирать, например, ближайшую точку пересечения при обходе дуги по часовой стрелке или точку пересечения, лежащую между крайними. Целесообразно одновременно использовать все имеющиеся варианты, а также выбрать несколько разных стартовых точек, после чего усреднить полученные значения фрактальной размерности.

Следует также помнить, что исследуемая кривая не обязательно является монофракталом. Поэтому может потребоваться больше одной аппроксимирующей прямой для разных масштабов λ . Такая кривая будет уже мультифракталом. (Мультифракталы будут описаны ниже, в главе 3.)

Отметим, что алгоритм оценки делительной размерности уже успешно обобщен для кривой в трехмерном пространстве [216].

2.4.15. Площадно-периметровые размерности

Площадно-периметровые размерности (area-perimeter dimensions) принято вычислять для фраг-

ментированных изображений. К этому классу фрактальной размерности относятся периметровая размерность, площадная размерность и пейзажная размерность [192, 216].

Периметровая размерность (perimeter dimension) D_{per} определяется соотношением

$$D_{per} = 2 \frac{\log P}{\log A},$$

где P – общий периметр фрагмента изображения, A – его общая площадь. Поскольку на практике разговор идет о цифровых изображениях, величины P и A измеряются в пикселях.

Площадная размерность (area dimension) D_a была введена в 1988 г. Р. Фоссом для описания фрактальных свойств фрагментов изображений путем модификации стандартного алгоритма вычисления емкостной размерности D_c . Она задается соотношением

$$D_a = \frac{\log A}{\log L},$$

где A – общая площадь фрагмента изображения (в пикселях), L – максимальное из всех чисел пикселей по вертикали и по горизонтали.

Пейзажная размерность (landscape/seascape dimension) D_{sc} , предложенная в 1993 г. Е. Ольсеном, является обобщением идей двух предыдущих размерностей. Ее можно определить, пользуясь соотношением

$$D_{sc} = 2 \frac{\log [P + 2(A-1)N/(N-1)]}{\log A},$$

где N – количество примыкающих друг к другу фрагментов изображений.

2.4.16. Размерность вложения

До этого момента мы рассматривали случаи, когда оценка той или иной фрактальной размерности производилась непосредственно для самого исследуемого фрактального объекта. Это кажется вполне логичным.

Однако здесь опять свою роль играет история развития фрактальных представлений. В этой статье мы шли от фрактальной геометрии к фрактальной физике. Но это далеко не единственный возможный путь. Другой не менее логичный и обоснованный путь пролегает через область не-

линейной физики, а точнее, через ее раздел “Детерминированный хаос и самоорганизация” (см., например, [43, 44, 224, 268–270]). В этой области представления о фрактальных размерностях возникли совсем из других соображений [42, 46, 47, 68, 269].

При изучении системы, в которой возникает детерминированный хаос, используется метод фазового пространства. Траектории такой системы в фазовом пространстве имеют очень сложный вид и сложное поведение. Существует структура, называемая аттрактором фазовых траекторий (от *to attract* – притягивать), к которой притягиваются фазовые траектории. Оказывается, что пока детерминированного хаоса нет, размерность аттрактора является целым числом, но когда возникает хаос, она становится дробной. В последнем случае аттрактор называют странным (*strange attractor*), а в некоторых работах [96] – фрактальным. Он сам и его сечения плоскостями являются фракталами. Здесь следует отметить, что размерность фазового пространства, в которое погружен странный аттрактор, отнюдь не равна 2. Поэтому и размерность странного аттрактора не лежит в диапазоне от 1 до 2, а зависит от размерности этого фазового пространства. Специалисты по хаосу именно размерность этого странного аттрактора называют фрактальной размерностью. Важно, что это размерность странного аттрактора, а не исходного сигнала. В рамках статьи авторы обычно не имеют возможности пояснять вещи, которые среди специалистов в этой области и так являются общепринятыми. Поэтому вкратце рассмотрим, как именно из реализации физического процесса получают фрактальную размерность аттрактора d [21, 42, 45–47, 68, 96, 222, 253, 262, 269, 271]. Следует также отметить, что специалистами (см., например, [96]) были обнаружены нехаотические системы, аттракторы которых тем не менее оказались странными.

Итак, пусть моделируется динамика некоторой нелинейной диссипативной системы, для чего необходимо N дифференциальных уравнений первого порядка. Хотя число N и неизвестно, но известно, что фрактальная размерность d аттрактора этой системы должна удовлетворять условию $d < N$. Следовательно, определив каким-то способом d , мы тем самым определим минимум для N .

Не имея значения N , мы не знаем, сколько физических переменных подлежат измерению. Имеется одна-единственная реализация некоторого физического процесса $x(t)$, относящаяся к моделируемой системе.

Мы строим псевдофазовое пространство, или пространство вложения, используя значения этого процесса, взятые со сдвижкой во времени:

$$x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots$$

Например, векторы трехмерного псевдофазового пространства мы вычисляем, используя три последовательные компоненты процесса $x(t)$:

$$\vec{x}_n = \{x(t_0 + n\tau); x(t_0 + (n+1)\tau); x(t_0 + (n+2)\tau)\}.$$

Теперь с помощью соотношений (4) или (5) вычисляем усредненную поточечную или корреляционную размерность для оценки фрактальной размерности d нашего аттрактора.

Чтобы определить минимальное значение N , мы строим псевдофазовые пространства все более высокой размерности, используя для этого процесс $x(t)$, до тех пор, пока фрактальная размерность аттрактора не достигнет своего асимптотического значения $d = M + \mu$, $0 < \mu < 1$. Тогда минимальную размерность фазового пространства для исследуемого хаотического аттрактора можно принять равной $N = M + 1$. Если же асимптотическое значение не появляется, то исследуемая реализация представляет собой просто случайный шум, а не детерминированный хаос.

Определенные технические сложности, возникающие при использовании описанного подхода, хорошо разобраны, например, в [21, 45].

Заметим также, что согласно теореме Такенса [21, 42, 43, 45–47, 68, 262], если аттрактор существует внутри N -мерного пространства, то для описания всех его топологических особенностей пространство вложения (которое мы строили) должно иметь размерность $2N + 1$. Таким образом, размерность вложения определяется соотношением

$$D_A = 2[d] + 3,$$

где $[\cdot]$ – операция вычисления целой части числа.

Важно отметить, что, поскольку величина D_A описывает размерность пространства вложения, в котором находится аттрактор исходного процесса, а не сам процесс, ее нельзя сравнивать с

фрактальными размерностями, которые были рассмотрены выше.

2.4.17. Другие размерности

Из других фрактальных размерностей, которые используются на практике, следует также отметить размерность ветвления (ramification dimension), используемую при описании фрактальных древовидных структур, и поверхностные размерности (surface dimensions), применяемые для изучения фрактальных свойств поверхностей в пространстве. К поверхностным размерностям относятся размерность поперечного сечения (transect dimension), контурная размерность (contour dimension), геостатистическая размерность (geostatistical dimension) и высотная размерность (elevation dimension) [216].

К тому же в 1996 г. Д. Сорне предложил использовать комплекснозначные фрактальные размерности [272], однако этот вопрос, судя, например, по работе [273], до сих пор остается открытым.

В 1982 г. С. Александер и Р. Орбах ввели фрактонную размерность [274] как спектральную размерность, которая описывает масштабные свойства плотности состояний, связанной с оператором Лапласа во фрактале. Впоследствии особого распространения она не получила, хотя время от времени и встречается в публикациях (см., например, [272, 275]). Возможно, причиной явилось достаточно прохладное отношение к ней Б. Мандельброта [276]. Заметим, что иногда некоторые авторы (см., например, [273]) фрактонную размерность называют просто “фрактонном”, что явно неудачно, поскольку, как уже было сказано выше, так называется фонон во фрактальной среде.

2.4.18. Корамерность

Для того чтобы можно было сравнивать между собой фрактальные объекты с разными топологическими размерностями, была введена так называемая корамерность (codimension) C_o (см., например, [177]), которая вычисляется по формуле

$$C_o = 1 + D_T - D,$$

где D_T – топологическая размерность анализируемого фрактального объекта, D – его фрак-

тальная размерность. Поскольку $D \geq D_T$ и $0 \leq (D - D_T) \leq 1$, то $0 \leq C_o \leq 1$. Это означает, что при $C_o = 1$ у объекта нерегулярность полностью отсутствует и он не является фракталом. И наоборот, чем ближе значение C_o к нулю, тем более нерегулярным является объект.

Отметим, что все приведенные выше размерности преднамеренно были рассмотрены нами на физическом уровне строгости. Более строго материал по оценке ряда фрактальных размерностей множеств изложен, например, в [253].

2.5. Примеры физических фракталов

Поскольку рассмотрению фрактальных сигналов и процессов, а также их фрактальному и мультифрактальному анализам посвящена вторая часть нашей работы, здесь мы вкратце остановимся на иных примерах физических фракталов.

2.5.1. Береговая линия

Первоначально тем, что потом станет известным как физический фрактал, ученые заинтересовались сразу после второй мировой войны в связи с задачей об определении длины береговой линии Великобритании [25, 26]. При ее решении неожиданно возникла проблема. Оказалось, что результаты измерений, проведенных различными группами, отличались в разы. Попытка объяснить этот факт была предпринята английским физиком и математиком Л. Ф. Ричадсоном (1881–1953). Он предположил, что при измерении длины береговой линии результат зависит от длины того инструмента, с помощью которого проводятся измерения: чем короче инструмент, тем больше полученная длина. Однако опубликована эта идея была только в 1961 г. [277]. Более того, Ричардсон собрал экспериментальные данные обнаруженных им зависимостей для разных побережий, но, к сожалению, не дал никакой теоретической интерпретации этим результатам [1, 26, 28, 29]. В 1967 г. данной проблемой заинтересовался Б. Мандельброт [278]. Современное объяснение этого “парадокса береговой линии” заключается в следующем [1, 26, 28, 29, 279].

Пусть, например, расстояние по прямой между расположенными на береговой линии точками A и B равно R (рис. 18). Тогда, чтобы измерить длину береговой линии между этими точками, мы расставим на берегу жестко связанные меж-

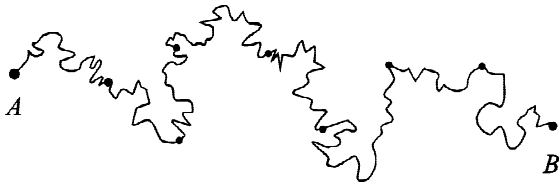


Рис. 18. Определение длины береговой линии между точками A и B [67, 68]

ду собой вешки так, что расстояние между соседними вешками равнялось бы, например, $l = 10$ км. Длину береговой линии в километрах между точками A и B мы примем тогда равной числу вешек минус одна, помноженному на 10. Следующее измерение этой длины мы произведем подобным же образом, но расстояние между соседними вешками сделаем $l = 1$ км.

Оказывается, что результат этих измерений будет различным. При уменьшении масштаба l мы будем получать все большие и большие значения длины. В отличие от гладкой кривой, линия морского побережья оказывается зачастую настолько изрезанной (вплоть до самых маленьких масштабов), что с уменьшением длины звена l величина L – длина береговой линии – не стремится к конечному пределу, а увеличивается по степенному закону:

$$L \approx l \left(\frac{R}{l} \right)^D,$$

где $D > 1$ – фрактальная размерность береговой линии. Чем больше величина D , тем более изрезанной является эта береговая линия. Происхождение данной зависимости интуитивно понятно: чем меньший масштаб мы используем, тем меньшие детали побережья будут учтены и дадут вклад в измеряемую длину. Наоборот, увеличивая масштаб, мы “спрямляем” побережье, уменьшая длину L . Если бы береговая линия была гладкой, то у таким образом измеряемой длины при $l \rightarrow 0$ существовал бы конечный предел, собственно говоря, и равный длине кривой. Тогда $L \approx R$ и $D = 1$.

Таким образом, мы видим, что для определения длины береговой линии L с помощью жесткого масштаба l (например, с помощью циркуля с фиксированным раствором) необходимо сделать $N = L/l$ шагов, причем величина L меняется с l так, что N зависит от l по закону

$$N \approx \left(\frac{R}{l} \right)^D.$$

Таким образом, с уменьшением масштаба длина береговой линии неограниченно возрастает. Это обстоятельство резко отличает фрактальную кривую от обычной гладкой кривой, для которой предел длины аппроксимирующей ломаной L при $l \rightarrow 0$ является конечным. В результате для гладкой кривой ее фрактальная размерность, $D = 1$, совпадает с топологической.

Это хорошо демонстрирует модель береговой линии как физического фрактала – математический фрактал – кривая Коха (см. пункт 2.1.3, рис. 2, б).

Впоследствии были оценены фрактальные размерности D для различных береговых линий [26]. Например, для Британских островов $D \approx 1.3$, а для Норвегии $D \approx 1.5$. Последний факт опосредованно известен из курса физической географии, где рассказывается о глубоких норвежских фьордах. В то же время фрактальная размерность побережья Австралии составляет только $D \approx 1.1$. Близкими к единице оказываются и фрактальные размерности других побережий. Однако топологическая размерность любой береговой линии по-прежнему остается равной $D_T = 1$, а евклидова размерность пространства, куда она помещена равна $E = 2$.

Вместе с тем напомним, что береговая линия – это физический фрактал, потому что у нее есть ненулевой нижний предел масштабов, на которых наблюдаются фрактальные свойства. Можно утверждать также, что для оценок фрактальной размерности береговой линии использовалась локальная емкостная размерность D_C (см. пункт 2.4.2), которая, в свою очередь, вычислялась с помощью кластерной размерности D_K (см. пункт 2.4.1) с соответствующим выбором максимального размера клетки (см. пункт 2.4.8).

2.5.2. Траектория броуновской частицы

Классическим примером стохастического физического фрактала является траектория броуновской частицы [26, 28, 29, 67, 68]. На рис. 19 показано, как выглядит под микроскопом типичная траектория частицы пыльцы, совершающей броуновское движение [67, 68].

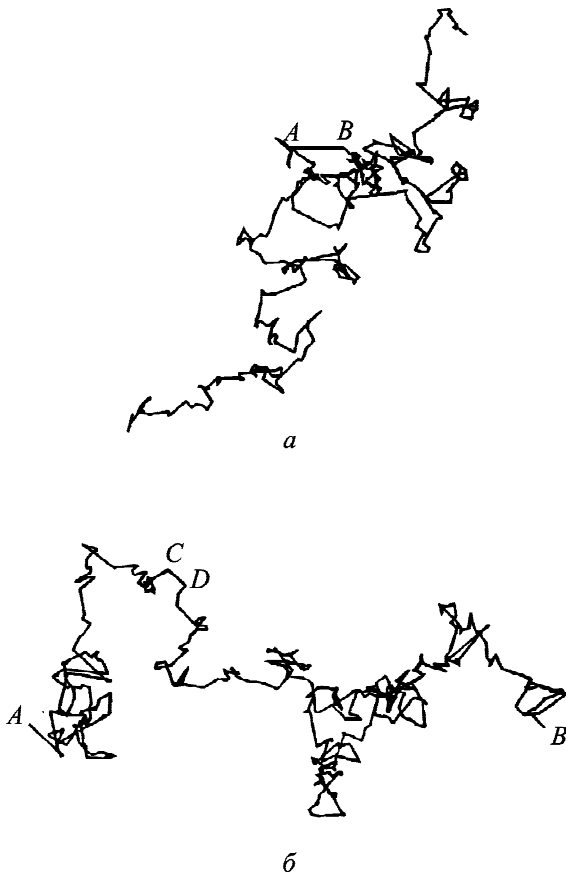


Рис. 19. Траектория броуновской частицы: *а* – уменьшенный масштаб, *б* – увеличенный масштаб [67, 68]

Однако приведенная на рис. 19, *а* траектория является лишь грубым приближением. Если мы увеличим разрешение микроскопа в сто раз, то участок траектории между точками *A* и *B*, будучи увеличенным в 10 раз, примет вид, показанный на рис. 19, *б*. Аналогичная ситуация будет наблюдаться при более точной регистрации движения частицы между точками *C* и *D* на рис. 19, *б*. Если увеличить разрешение еще в сто раз, а затем подвергнуть полученные траектории 10-кратному увеличению, то полученная картина будет статистически подобна той, которая видна на рис. 19, *б*. Именно поэтому и принято называть броуновское движение статистически самоподобным.

В случае броуновского движения диапазон масштабов, в пределах которого сохраняется статистическое самоподобие, очень велик – от размеров сосуда с жидкостью (допустим, 0.1 м) до длины свободного пробега молекул между столкновениями, которая для малых пробных частиц может достигать 10^{-9} м.

Во многих случаях объекты исследования называются самоподобными, если их можно масштабировать с коэффициентом подобия 10 или даже меньше, скажем, за три дискретных шага. Броуновское же движение выдерживает преобразование подобия с коэффициентом до 10^8 .

Важно, что след, оставляемый броуновской частицей, в конце концов заполняет всю плоскость. Это означает, что топологическая размерность траектории равна D_T , а фрактальная достигает значения евклидовой размерности пространства ($E = 2$), в котором находится данный фрактал, т. е. оказывается равной $D = 2$ [26, 28, 29].

2.5.3. Другие примеры физических фракталов

Физические фракталы существуют повсюду – от масштабов наноструктур до масштабов Вселенной [30]. Так, например, структура колец Сатурна представляет собой концентрические кольца, щели между которыми имеют закон распределения, связанный с канторовой пылью [280]. Такому же закону подчиняются спектры некоторых органических молекул [281]. Более того, фрактальность успешно обнаружена в оптике [282], физике элементарных частиц [283], в квантовой механике [134, 284, 285], в физике полимеров [130], механике сплошных сред [286], физике твердого тела [134].

Начиная примерно с 1983 г., фракталы успешно обнаруживаются в области астрономии [141]. Фрактальным является распределение галактик во Вселенной (так называемые мегафракталы [30]). Одной из попыток отразить этот факт является рассмотренная в пункте 2.1.3 модель Фурнье. Существуют и другие модели Вселенной, например, модель Шарнье, модель Хойла, модели Мандельброта и др. [1, 26, 28, 29]. Экспериментальное значение фрактальной размерности распределения галактик составляет $D \approx 1.2 \div 2.5$ [26, 28–30]. Фрактальные свойства имеют поверхности планет и многих их спутников, кольца Сатурна, Юпитера и Урана, подструктуры комет, распределения звезд и межзвездного вещества, изменения светимости звезд, распределения вещества после взрывов сверхновых звезд, структура галактик, распределение кратеров на поверхностях планет, структура межпланетного магнитного поля и др. [132, 136, 141].

Фрактальную структуру имеет сеть Интернет и многие процессы в ней (см., например, [142]).

Фрактальными свойствами обладают различные объекты и характеристики, относящиеся к турбулентности. Ее фрактальная размерность находится в пределах $D \approx 2.5 \div 2.7$ [1, 26, 28, 29, 132, 216, 251]. Фрактальным является распределение по размерам вихрей в турбулентности [26, 28, 29, 132, 287]. Фрактальную структуру имеет область рассеяния, т. е. пространственное множество, на котором концентрируется турбулентное рассеяние [26, 28, 29].

Фракталами являются также [1, 24, 26, 28, 29, 165, 206, 207, 252] облака (как водяные, так и образуемые вулканическими извержениями или ядерными взрывами, а также аэрозоли возникающие при горении различных веществ; например, для грозовых облаков $D \approx 1.36$ [249]), кильватерные следы, реактивные струи, Красное пятно в атмосфере Юпитера, пейзажи кратеров на Луне и других небесных телах [272], течение Гольфстрим, кроны деревьев, кора деревьев ($D = 3$, $D_T = 2$), рельеф горных массивов, разломы камней и металлов [131, 132, 205, 288], поверхности микроскопических пор различных материалов, взлетно-посадочные полосы в аэропортах, края коррозионных отверстий в трубах [287], пространственные распределения нефти и многих других полезных ископаемых (например, алмазных залежей) в земной коре, многие процессы, связанные с землетрясениями [180, 217, 288], пожарами, наводнениями, оползнями и камнепадами [288], канал разряда линейной молнии, многие картины художников-абстракционистов (например, М. Эшера) [142].

Фрактальную структуру имеют транспортные, коммуникационные и социальные сети, распределение населения разных стран, а также границы различных административно-территориальных образований [177].

Физическими фракталами являются русла рек со всеми их притоками (например, для реки Миссури фрактальная размерность составляет $D \approx 1.2$) [26, 28, 29, 207], мозговые извилины млекопитающих ($D \approx 2.73 \div 2.79$) [249], альвеолярные и клеточные мембраны ($D \approx 2.17$), бернуллиевы кластеры, возникающие при перколяции ($D \approx 1.89$) [1], полимерные и мембранные структуры [1], контуры кипарисовых рош ($D \approx 1.6$), Эйфелева башня [67, 68, 87], дыхатель-

ная ($D \approx 2.9$) и кровеносная ($D = 3$, $D_T = 2$) системы человека и животных, возникающие при агрегации веществ структуры [1, 132], системы фрактальных нитей (фрактальные клубки) [289], аэрогели и даже шаровая молния [251], фононы в фрактальных средах, называемые фрактонами [1, 67, 68], и многое другое.

Фракталы встречаются также в теориях фазовых переходов, неупорядоченных систем, в процессах образования кластеров, роста дендритов и т. п. [33, 132]. Фрактальность широко встречается в физике конденсированного состояния [19].

Фрактальные свойства проявляются в геометрии и законах развития городов (см., например, [192]).

Установлено, что распределение по поверхности выпавших в результате аварии на Чернобыльской АЭС загрязнений после переноса радиоактивных элементов в турбулентной атмосфере оказалось фрактальным [82, 306].

Пространственные и временные фрактальные структуры возникают вблизи катода при работе вакуумных приборов [290].

Созданы и успешно применяются на практике фрактальные метаматериалы (см., например, [197]).

Фрактальными свойствами обладают всевозможные сигналы и процессы в различных областях науки и техники (см., например, [291, 292]), о чем более подробно пойдет речь во второй части нашей работы. В частности, заметим, что фрактальные структуры, относящиеся к физическим фракталам, были успешно обнаружены повсюду: например, в музыке [1, 79, 87, 189, 195, 197], голосе [293], физиологии мозга [154] и в процессах на Солнце [294]. Значительную популярность приобрели исследования фрактальных свойств трафика в телекоммуникационных сетях (см., например, [295, 296]).

К числу фракталов относятся также пространственные флуктуации различных параметров, например, флуктуации температуры, плотности и т. п. [33].

Более того, французский астроном Л. Ноталле в целом цикле работ отстаивает гипотезу о том, что пространство-время должно быть непрерывным, но нигде не дифференцируемым, а следовательно, и фрактальным [30, 285, 297]. Такой подход имеет своих сторонников (см., например, [197, 298]).

Не менее удивительна гипотеза Д. Пфеннигера о том, что темная материя прячется в виде фракталов [30].

Здесь же хочется отметить оригинальную типизацию фракталов, приведенную в [144], согласно которой фракталы делятся на фрактальную пыль ($0 < D < 1$), фрактальные сигналы ($1 < D < 2$), фрактальные поверхности или изображения ($2 < D < 3$), фрактальные объемы ($3 < D < 4$) и фрактальное время (fractal time) ($4 < D < 5$). Последнее оставляем без комментариев.

3. Мультифракталы

3.1. Определение мультифрактала

Считается (см., например, [30]), что термин “мультифрактал” был введен У. Фришем и Дж. Паризи в работе [299] в 1985 г., хотя турбулентные структуры с подобными свойствами исследовались Б. Мандельбротом еще в 1969 г. [30, 215] (по другим данным – в 1974 г. [1, 183]). Более того, уже в работах [26, 28, 29] он рассматривал неоднородные фракталы, понимая под ними сумму (или разность) множеств с различными фрактальными и топологическими размерностями. В 1989 г. Б. Мандельброт в работе [183] выступил с критикой подхода Фриша и Паризи, доказывая, что он является менее общим, чем тот, что был опубликован им в 1974 г., и сообщил, что на самом деле указанные исследования были начаты им еще в 1962 г.

Между тем, как утверждается в [300], годом рождения концепции мультифрактала следует считать 1983 г., поскольку именно тогда состоялась тематическая летняя школа, материалы которой в виде [299] были изданы двумя годами позже. Первая же статья [301], в которой впервые встретился термин “мультифрактал”, была опубликована участниками упомянутой школы в 1984 г.

Кроме указанных выше специалистов, существенный вклад в становление и развитие концепции мультифракталов внесли также П. Грасбергер, Х. Хентшель, И. Прокачиа, Р. Бенци, Р. Бадии, А. Полити, М. Енсен, Д. Бенсимон, Т. Хэлси, Л. Каданофф, Дж. Глазье, М. Фейгенбаум и многие другие (см., например, [207, 215]).

Мультифракталы – это неоднородные фрактальные объекты, для полного описания которых, в отличие от монофракталов, недостаточно введения всего лишь одной фрактальной размер-

ности D , а необходим целый спектр фрактальных размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно [1, 45, 67, 68, 96]. Причина этого заключается в том, что наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми величиной D , такие фракталы обладают еще и некоторыми статистическими свойствами. Мультифракталы являются неоднородными фракталами, а монофракталы – однородными. Мультифрактал можно рассматривать, как объект, образованный как взаимосвязь нескольких фрактальных подмножеств с разными фрактальными размерностями.

Как и в случае монофракталов, мультифракталами могут быть и математические, и физические фракталы.

Б. Мандельброт, как и в случае с определением фрактала, в 1999 г. отказался от попыток дать строгую математическую формулировку понятия “мультифрактал” [215]. Эту его позицию поддержали и другие исследователи (см, например, [211]), хотя отдельные попытки дать строгое определение делаются до сих пор (см, например, [229]).

Некоторые авторы (см., например, [177]) иногда рассматривают так называемые полуфракталы (semifractals), которые, по нашему мнению, логичнее было бы называть, например, бимонофракталами (bimonofractals). Под полуфракталом понимают фрактал, который в каждом из двух диапазонов масштабов проявляет чисто монофрактальные свойства, а потому может быть описан только двумя фрактальными размерностями. Между тем формально полуфрактал относится к мультифракталам, поскольку для его описания нужно более одного значения фрактальной размерности.

Здесь следует также отметить, что иногда (см., например, [156, 166, 167]) фрактальный анализ, проводимый в предположении, что исследуемый объект является монофракталом, называют одиноким фрактальным анализом (single-fractal analysis), в случае полуфракталов его именуют двойным фрактальным анализом (dual-fractal analysis), а если искомых исследуемых диапазонов монофрактального поведения предполагается три – то тройным фрактальным анализом (triple-fractal analysis). Однако, судя по последним публикациям, эти названия особого распространения и поддержки среди специалистов пока не получили.

Говоря о мультифракталах, следует также упомянуть о так называемых параболических и логопериодических фракталах.

Модель параболического фрактала (parabolic fractal) была предложена в 1996 г. Ж. Лахеррер [302]. Ее основная идея состоит в том, чтобы в процессе поиска фрактальной размерности (например, кластерной или емкостной) при аппроксимации экспериментальных данных в двойных логарифмических координатах вместо прямой использовать более сложную кривую – параболу. Оказывается, что многие фрактальные объекты и процессы хорошо описываются именно такой моделью (см., например, [177]). Их и называют параболическими фракталами.

Развитием идеи модели параболического фрактала является модель логопериодического фрактала (log-periodic fractal), которую создали в 2007 г. М. Форриз и П. Мартин [303]. Вместо параболы в ней используется периодическая функция, а соответствующие фракталы называют логопериодическими. Удивительно, но и таких природных фрактальных объектов существует достаточно (см., например, [177]).

3.2. Примеры математических мультифракталов

Разобраться в сути понятия “мультифрактал” попытаемся на примере неоднородного канторова множества и неоднородной салфетки Серпинского, сравнивая их с соответствующими монофрактальными аналогами.

3.2.1. Неоднородное канторово множество

Изменим ставшую уже классической процедуру построения канторова множества, которая была детально рассмотрена в пункте 2.1.3 [45, 67, 68].

В классическом случае на первом шаге итерационного процесса заселенность обоих отрезков является абсолютно одинаковой. Поэтому вероятность для отдельной точки оказаться в правом (p_2) или в левом (p_1) отрезке одинакова: $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1 - p_1 = 1/2$. Значит, из N имеющихся точек в обоих отрезках находятся по $N/2$ точек.

Теперь пусть $p_1 \neq p_2$. Тогда в левом отрезке оказывается $p_1 N$ точек, а правом, соответственно, $p_2 N$ точек. Вот в этом и будет состоять коррекция нашего алгоритма (рис. 20). У него появи-

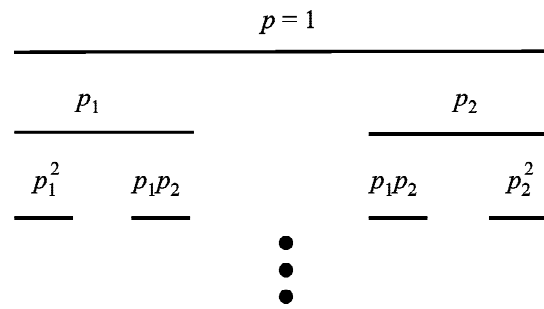


Рис. 20. Неоднородное множество Кантора [229]

лась статистическая зависимость. Уже на втором шаге этого алгоритма мы имеем 4 отрезка длиной $1/9$, заселенных с вероятностями (слева направо) p_1^2 , $p_1 p_2$, $p_2 p_1$, p_2^2 (рис. 20). На n -ом шаге итерационного процесса наше множество состоит из 2^n отрезков длиной $1/3^n$, заселенных с вероятностями $p_1^n, p_1^{n-1} p_2, p_1^{n-2} p_2^2, \dots, p_2^n$ (не в порядке их расположения!). При этом число отрезков, характеризуемых вероятностью $p_1^{n-m} p_2^m$ оказывается равным числу сочетаний C_n^m из n элементов по m . В результате при $n \rightarrow \infty$ и $p_1 \neq 1/2$ мы в конце концов приходим к неоднородному фрактальному множеству.

Интересно, что биномиальные коэффициенты появились здесь не случайно. Процесс построения множеств подобного рода называется биномиальным мультипликативным процессом или процессом Безиковича [3, 45]. Получающийся мультифрактал Б. Мандельброт назвал биномиальным [183].

Важно, что если к этому множеству (мультифракталу) применить стандартную процедуру определения размерности Хаусдорфа–Безиковича, то выяснится, что она ничем не отличается от размерности однородного канторова множества (монофрактала), равной $D_{HB} = \ln 2 / \ln 3 \approx 0.6309$. Это и неудивительно, поскольку алгоритм определения размерности Хаусдорфа–Безиковича никак не учитывает статистические свойства данного мультифрактала. Поэтому необходима иная характеристика, которая позволила бы отличать мультифрактал от монофрактала.

3.2.2. Неоднородная салфетка Серпинского

Неоднородное канторово множество не удается наглядно отобразить на рисунке, чтобы продемонстрировать неоднородность фрактала. Поэтому

рассмотрим еще один пример – неоднородную салфетку Серпинского [45].

Вернемся к рассмотренной в пункте 2.2.3 игре в хаос и несколько изменим ее правила. Допустим, что в методе случайных итераций мы стали отдавать предпочтение одной из вершин треугольника (рис. 11, а), например, вершине А, и стали выбирать ее по отношению к вершинам В и С с вероятностью 90 %. Две остальные вершины, В и С, остались по-прежнему равноценными. Результат использования такого алгоритма с неравными возможностями приведен на рис. 21, а. Здесь четко видно, что точки внутри треугольника ABC распределены теперь крайне неравномерно. Большая их часть группируется у вершины А и ее прообразов. В то же время у вершин В и С (и их прообразов) их имеется крайне мало. Тем не менее в обычной терминологии данное множество точек при стремлении числа итераций к бесконечности непременно является фракталом, поскольку сохранилось главное свойство фрактала – самоподобие. Действительно, треугольник DFE, хотя в нем в 20 раз меньше точек, по своим статистическим и геометрическим свойствам полностью подобен треугольнику ABC. Так же, как и в большом треугольнике, точки в нем концентрируются вблизи вершины D – аналоге вершины А. Распределение точек по салфетке Серпинского поясняют также рис. 21, б, в.

Важно отметить, что, несмотря на неравномерность распределения точек по фракталу, его размерность Хаусдорфа–Безиковича осталась при этом прежней, $D_{HB} = \ln 3 / \ln 2$. Итак, формально для мультифрактала можно посчитать фрактальную размерность, которая используется для мо-

нофрактала, но она никак не учитывает статистических свойств мультифрактала.

3.2.3. Мультифрактал, построенный по ренормализационной схеме

Рассмотрим еще один более сложный пример мультифрактала (рис. 22) [45]. Единичный квадрат (рис. 22, а) на нулевом этапе полностью покрывает собой некоторое множество М. На первом этапе (рис. 22, б) показано, как то же самое множество можно покрыть тремя меньшими квадратами со сторонами $l_1 = 1/2$, $l_2 = l_3 = 5/16$, в которых соответственно находится доля $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$, и $p_3 = 1/6$ всех точек. Следующий этап покрытия (рис. 22, в) содержит уже 9 квадрати-ков со сторонами $l_1^2 = 1/4$, $l_1 l_2 = l_1 l_3 = 5/32$ (в нижнем правом углу) и $l_2 l_1 = 5/32$, $l_2^2 = l_2 l_3 = 25/256$ (вверху справа и слева). Относительная заселенность этих квадратиков точками множества показана на рисунке. Она соответствует произведению факторов заселенности (вероятностей): $p_1^2 = 1/4$, $p_1 p_2 = 1/6$, $p_1 p_3 = 1/12$ – для нижней правой группы; $p_2 p_1 = 1/6$, $p_2^2 = 1/9$, $p_2 p_3 = 1/18$ – для верхней левой и $p_3 p_1 = 1/12$, $p_3 p_2 = 1/18$, $p_3^2 = 1/36$ – для верхней правой группы. Отметим, что имеется строгое соответствие между заселенностью квадратика $p_j p_i$ и его размерами $l_j l_i$. Дальнейший процесс разбиения и покрытия множества М осуществляется в соответствии с этой ренормализационной схемой. Каждый квадратик, имеющий на n-ом шаге размер l и заселенность p, заменяется на n + 1 шаге на три квадратика с размерами ll_1 , ll_2 и ll_3 с заселенностями pp_1 , pp_2 и pp_3 соответственно, распо-

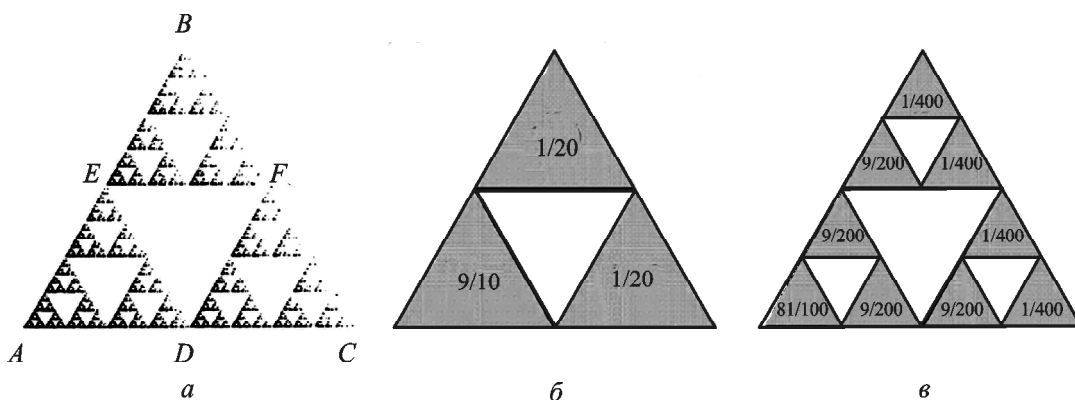


Рис. 21. Неоднородная салфетка Серпинского: внешний вид (а) [229], относительные заселенности на первой (б) и второй (в) итерациях [305]. Цифры в треугольниках показывают их относительную заселенность

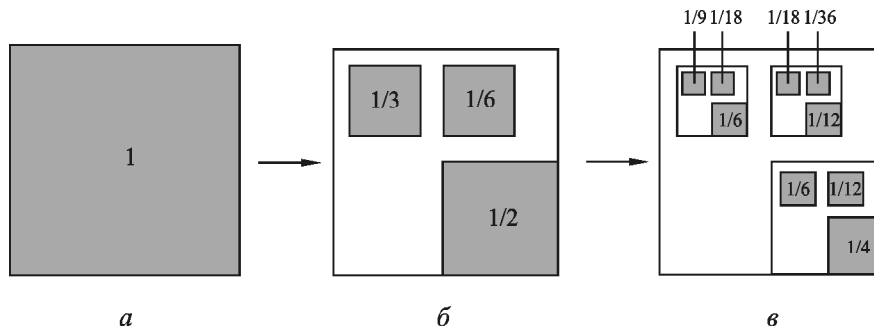


Рис. 22. Мультифрактал, построенный по ренормализационной схеме [305]. Цифры в квадратах показывают их относительную заселенность

ложенных относительно друг друга, как показано на рис. 22, в.

Кстати, ренормализационная схема может успешно использоваться и при построении неоднородной салфетки Серпинского. В этом случае мы могли бы использовать $l_1 = l_2 = l_3 = 0.5$ и $p_1 = 0.9$, $p_2 = p_3 = 0.05$ [45].

Итак, рассмотренные выше три примера являются примерами неоднородных фракталов, называемых мультифракталами. Причина неоднородности во всех случаях – разные вероятности заполнения геометрически одинаковых элементов фрактала, или в общем случае – несоответствие вероятностей заполнения геометрическим размерам соответствующих областей

3.2.4. Стохастические математические мультифракталы

В пункте 2.2.7 мы рассмотрели, как из регулярных математических монофракталов при введении в алгоритм их построения какого-либо случайного фактора получаются стохастические монофракталы. Аналогичным способом из регулярных математических мультифракталов (алгоритм которых четко детерминирован) могут быть получены стохастические математические мультифракталы [183].

Важно отметить, что вероятности в биномиальном мультипликативном процессе и ренормализационной схеме никакого отношения к указанному случайному фактору не имеют. Они описывают статистическими методами неоднородность заселенности разных областей мультифрактала, но сами они – чисто детерминированные величины. А случайный фактор можно ввести в алгоритм, если от итерации к итерации случайным образом менять, например, величины p_i или l_j . Разумеет-

ся, полученная структура стохастического мультифрактала будет еще более сложной, чем у регулярного мультифрактала.

3.3. Традиционный мультифрактальный формализм (Р-модель)

Поскольку мультифрактал по своей структуре значительно сложнее монофрактала, числовые характеристики, описывающие мультифрактал, оказываются гораздо сложнее, многочисленнее и многообразнее числовых характеристик монофрактала.

Существует несколько общепринятых различных подходов к определению этих числовых характеристик: традиционный мультифрактальный формализм (или Р-модель), мультифрактальный формализм Чабри и Дженсена, информационная интерпретация мультифрактального формализма и L-модель мультифрактального формализма. На сегодня существуют и другие модели мультифрактального формализма, например, стохастическое описание мультифракталов [21, 226].

Рассмотрим на уровне физической строгости традиционный мультифрактальный формализм (или Р-модель) [229, 262, 304], который известен также как стандартная процедура мультифрактального анализа или термодинамический формализм [45]. Более строгое изложение мультифрактального формализма можно найти, например, в [305].

Отдельно обратим внимание на оригинальный подход, разработанный Б. Мандельбротом.

3.3.1. Основные понятия

Имеется фрактальный объект, занимающий некоторую ограниченную область ζ в евклидовом пространстве с размерностью E . Пусть на каком-

то этапе его построения он представляет собой множество из $N \gg 1$ точек, как-то распределенных в этой области. Будем предполагать, что в конце концов $N \rightarrow \infty$. Разобьем всю область ζ на кубические ячейки со стороной $\varepsilon \ll L$ и объемом ε^E . Далее нас будут интересовать только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка. Пусть номер занятых ячеек i изменяется в пределах $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ – суммарное количество занятых ячеек, которое, разумеется, зависит от размера ячейки ε .

Пусть $n_i(\varepsilon)$ представляет собой количество точек в ячейке с номером i . Тогда величина

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$$

представляет собой вероятность того, что наугад взятая точка из нашего множества находится в ячейке с номером i . Другими словами, вероятности p_i характеризуют относительную заселенность ячеек. Из условия нормировки вероятности следует, что

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1. \tag{10}$$

Заметим, что определение заселенностей ячеек мы уже рассматривали в пункте 2.4.5, когда говорили об информационной размерности монофрактала. Далее увидим, что это было совсем не случайно.

3.3.2. Обобщенная статистическая сумма

Стандартный метод мультифрактального анализа основан на рассмотрении обобщенной статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$,

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \tag{11}$$

в которой показатель степени q может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$.

3.3.3. Спектр обобщенных фрактальных размерностей. Скейлинговая экспонента

Спектр обобщенных размерностей D_q , называемых также размерностями Реньи, характеризующих данное распределение точек в области ζ , определяется с помощью соотношения

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \tag{12}$$

где нелинейная функция $\tau(q)$, именуемая скейлинговой экспонентой или показателем массы, имеет вид

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \tag{13}$$

Заметим, что несколько в иных обозначениях мы получили соотношения, ранее рассмотренные в пункте 2.4.6.

Считается (см., например, [45, 67, 68]), что размерности Реньи не являются фрактальными размерностями в общепринятом понимании этого слова. Именно потому их и называют обобщенными размерностями.

Итак, мультифрактал в общем случае характеризуется скейлинговой экспонентой $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \tag{14}$$

Для однородного фрактала, который характеризуется только одной фрактальной размерностью D , относительные заселенности всех ячеек будут одинаковы и равны

$$p_i(\varepsilon) = p(\varepsilon) = \frac{1}{N(\varepsilon)}.$$

Тогда обобщенная статистическая сумма примет вид:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{N^q(\varepsilon)} = \frac{N(\varepsilon)}{N^q(\varepsilon)} = N^{1-q}(\varepsilon).$$

С другой стороны, мы знаем, что из определения емкостной размерности D_C (а именно с ней мы и ассоциируем здесь фрактальную размерность D) следует, что

$$D = D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

Откуда

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D} \quad \text{и}$$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{N^q(\varepsilon)} = \frac{N(\varepsilon)}{N^q(\varepsilon)} = N^{1-q}(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D(1-q)}.$$

В таком случае скейлинговая экспонента (13) запишется в виде:

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon^{-D(1-q)}}{\ln \varepsilon} = D(q-1).$$

Таким образом, для монофрактала скейлинговая экспонента является линейной функцией q :

$$\tau(q) = D(q-1).$$

Но в этом случае все размерности Реньи оказываются одинаковыми и вообще не зависят от q :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{D(q-1)}{q-1} = D.$$

Теперь становится понятным, почему однородный фрактал называют именно монофракталом: для его описания действительно достаточно всего лишь одной размерности D .

В случае мультифрактала распределение точек по ячейкам оказывается неодинаковым. Тогда скейлинговая экспонента становится нелинейной функцией, и для характеристики мультифрактала нужен целый спектр обобщенных фрактальных размерностей D_q , число которых в общем случае бесконечно.

Так, например, при $q \rightarrow +\infty$ основной вклад в обобщенную статистическую сумму (11) вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц n_i , и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью заполнения p_i . И наоборот, при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в сумму (11) дают самые разреженные ячейки с малыми значениями заселенностей p_i . Таким образом, функция D_q показывает, насколько неоднородным является множество точек ζ .

3.3.4. Информационная размерность

Выясним теперь, какой физический смысл имеют обобщенные фрактальные размерности D_q при некоторых конкретных значениях q . Так, при $q = 0$

$$Z(0, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^0(\varepsilon) = N(\varepsilon).$$

С другой стороны,

$$D_0 = \frac{\tau(0)}{0-1} = -\tau(0), \quad Z(0, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-D_0}.$$

Отсюда следует, что

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_0}.$$

Это означает, что величина D_0 представляет собой обычную размерность Хаусдорфа–Безиковича D_{HB} множества ζ . Она соответствует монофракталу, который называют носителем (support) исходного мультифрактального множества (см., например, [45, 67, 68]). По этой же причине величину D_0 часто называют размерностью носителя мультифрактала. Она является наиболее грубой характеристикой мультифрактала, и именно ее мы получим, если к мультифракталу применим монофрактальный анализ. Кстати, здесь можно сделать важный для нас вывод: монофрактальный анализ к мультифрактальному объекту применять можно, если понимать, что получается в результате.

Теперь выясним смысл D_1 . Поскольку при $q = 1$ в силу условия нормировки вероятности (10) имеем $Z(1, \varepsilon) = 1$, то $\tau(1) = 0$. Следовательно, в выражении

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}$$

при $q \rightarrow 1$ имеем неопределенность. Раскрывают эту неопределенность следующим образом:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \exp[(q-1) \ln p_i].$$

Теперь при $q \rightarrow 1$, разлагая экспоненту и учитывая условие нормировки (10), получаем:

$$Z(q \rightarrow 1, \varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i [1 + (q-1) \ln p_i] = 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i,$$

$$\tau(q \rightarrow 1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q \rightarrow 1, \varepsilon)}{\ln \varepsilon} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i \right]}{\ln \varepsilon}, \\
 D_1 &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\tau(q)}{q-1} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \left[1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i \right]}{\ln \varepsilon} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}.
 \end{aligned}$$

В числителе с точностью до знака стоит знакомая нам из пункта 2.4.5 информационная энтропия фрактального множества

$$I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i.$$

Поскольку энтропия является мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором состоянии, можно сказать, что величина D_1 характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. Именно благодаря этому свойству величину D_1 назвали информационной размерностью.

3.3.5. Корреляционная размерность

Теперь рассмотрим обобщенную фрактальную размерность D_2 . Для нее справедливо выражение

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon}.$$

Оказывается, величина D_2 тесно связана с поведением корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$, введенного нами в пункте 2.4.4. Обобщенная размерность D_2 определяет зависимость корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$ от ε в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. По этой причине ее называют корреляционной размерностью.

В пункте 2.4.6 мы указали, что D_q является монотонно невозрастающей функцией своего аргумента q , ее максимальное значение $D_{\max} = D_{-\infty}$, а минимальное значение $D_{\min} = D_{\infty}$.

3.3.6. Функция мультифрактального спектра. Показатель сингулярности

Часто наряду с обобщенными фрактальными размерностями D_q для характеристики мультифрактального множества используют так называемую функцию мультифрактального спектра $f(\alpha)$ (хаусдорфов мультифрактальный спектр, спектр сингулярностей, скейлинг-спектр или просто $f(\alpha)$ -спектр) [45, 226].

Как уже отмечалось ранее, одной из основных характеристик мультифрактала является зависимость вероятности (меры) p_i от размера ячейки ε . Эта зависимость имеет степенной характер,

$$p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha_i}, \tag{15}$$

где α_i представляет собой некоторый показатель степени, вообще говоря, разный для разных ячеек i . Этот показатель называют показателем сингулярности, индексом сингулярности, экспонентой сингулярности, показателем Липшица–Гельдера или экспонентой Гельдера. Чем меньше значение α_i , тем более сингулярной является мера.

Известно, что для монофрактала все показатели степени α_i одинаковы и равны его фрактальной размерности D :

$$p_i = \frac{1}{N(\varepsilon)} \approx \varepsilon^D.$$

Для мультифрактала из-за его неоднородности вероятности заполнения ячеек p_i в общем случае неодинаковы, и потому показатель степени α_i принимает различные значения для разных ячеек. Как мы увидим позже, достаточно типичной является ситуация, когда эти значения непрерывно заполняют некоторый интервал $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, причем

$$p_{\min} \approx \varepsilon^{\alpha_{\max}}, \quad p_{\max} \approx \varepsilon^{\alpha_{\min}}.$$

Несложно показать, что

$$\left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = D_{\infty} = \alpha_{\min}, \quad \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = D_{-\infty} = \alpha_{\max},$$

т. е. интервал возможных значений α_i определяется предельными значениями обобщенных фрактальных размерностей D_q .

Перейдем теперь к вопросу о распределении вероятностей различных значений α_i . Пусть $n(\alpha)d\alpha$ есть вероятность того, что α_i находится в интервале $(\alpha, \alpha + d\alpha)$. Другими словами, $n(\alpha)d\alpha$ представляет собой число ячеек i , обладающих одной и той же мерой p_i с α_i , лежащими в этом интервале. В случае монофрактала, для которого все α_i одинаковы и равны фрактальной размерности D , это число, очевидно, пропорционально полному количеству ячеек $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^D$, которое зависит от размера ячейки ε по степенному закону.

Для мультифрактала, однако, это не так, и разные значения α_i встречаются с вероятностью, характеризуемой не одной и той же величиной D , а разными (в зависимости от α) значениями показателя степени $f(\alpha)$,

$$n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (16)$$

Таким образом, физический смысл функции $f(\alpha)$ заключается в том, что она представляет собой хаусдорфову размерность некоего однородного фрактального подмножества ζ_α из исходного множества ζ , характеризуемого одинаковыми вероятностями заполнения ячеек $p_i \approx \varepsilon^\alpha$. Поскольку фрактальная размерность подмножества всегда меньше или равна фрактальной размерности исходного множества D_0 , имеет место важное неравенство для функции $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) \leq D_0.$$

В результате мы приходим к выводу, что набор различных значений функции $f(\alpha)$ (при разных α) представляет собой спектр фрактальных размерностей однородных подмножеств ζ_α , на которые можно разбить исходное множество ζ . Отсюда становится понятным термин “мультифрактал”. Его можно понимать как объединение различных однородных фрактальных подмножеств ζ_α , каждое из которых имеет свое собственное значение фрактальной размерности $f(\alpha)$.

Поскольку любому подмножеству принадлежит лишь часть от общего числа ячеек $N(\varepsilon)$, на которое разбито исходное множество ζ , условие нормировки вероятностей (10) не выполняется при суммировании только по этому подмножеству. Сумма этих вероятностей оказывается меньше единицы. Поэтому и сами вероятности p_i с одним и тем же значением α_i очевидно меньше

(или в крайнем случае одного порядка), чем величина $\varepsilon^{f(\alpha)}$, которая обратно пропорциональна числу имеющихся ячеек, покрывающих данное множество (напомним, что в случае монофрактала $p_i \approx 1/N(\varepsilon)$). В результате приходим к следующему важному неравенству для функции $f(\alpha)$, а именно, при всех значениях α

$$f(\alpha) \leq \alpha.$$

Знак равенства имеет место, например, для монофрактала, $f(\alpha) = \alpha = D$.

3.3.7. Связь функции мультифрактального спектра со скейлинговой экспонентой

Установим связь функции мультифрактального спектра $f(\alpha)$ с введенной ранее скейлинговой экспонентой $\tau(q)$. Вычислим для этого обобщенную статистическую сумму $Z(q, \varepsilon)$. Подставляя в выражение (11) формулу (15) и переходя от суммирования по i к интегрированию по α с плотностью вероятности (16), получаем

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q \approx \int n(\alpha) \varepsilon^{q\alpha} d\alpha \approx \int \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha. \quad (17)$$

Для интеграла (17) с учетом малости величины ε справедлива оценка

$$Z(q, \varepsilon) \approx \varepsilon^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))} \quad (18)$$

при выполнении соотношения

$$q = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}. \quad (19)$$

Сравнивая выражения (18) и (14), приходим к выводу, что

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)). \quad (20)$$

Это и есть связь функции мультифрактального спектра $f(\alpha)$ со скейлинговой экспонентой $\tau(q)$ [45].

3.3.8. Преобразование Лежандра

Ранее мы записали соотношение (12), которое описывает связь между обобщенными размерностями D_q и скейлинговой экспонентой $\tau(q)$. С использованием соотношения (20) можно получить, что [45]

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}{q-1}. \quad (21)$$

Таким образом, если известна функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$, то с помощью соотношений (19) и (21) можно получить D_q . И наоборот, зная D_q , можно найти зависимость $\alpha(q)$ с помощью уравнения

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q], \quad (22)$$

после чего из соотношения (21) найти зависимость $f(\alpha(q))$. Эти два уравнения в параметрическом виде определяют функцию $f(\alpha)$.

Формально переход от переменных $\{q, \tau(q)\}$ к переменным $\{\alpha, f(\alpha)\}$, задаваемый соотношениями (21), (22), может быть осуществлен при помощи следующих преобразований Лежандра, хорошо известных в термодинамике:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau. \end{cases} \quad (23)$$

Уравнения (23) определяют в параметрическом виде зависимость $f(\alpha(q))$.

Обратное преобразование Лежандра, осуществляющее обратный переход от $\{\alpha, f(\alpha)\}$ к $\{q, \tau(q)\}$, определяется формулами

$$\begin{cases} q = \frac{df}{d\alpha}, \\ \tau(q) = \alpha \frac{df}{d\alpha} - f. \end{cases} \quad (24)$$

3.3.9. Свойства функции мультифрактального спектра

Рассмотрим свойства функции мультифрактального спектра [45]. Для однородного фрактала $D_q = D = \text{const}$. Поэтому

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq} = D,$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) = qD - D(q-1) = D.$$

В этом случае график функции $f(\alpha)$ вырождается в одну точку с координатами (D, D) .

Обратимся теперь к более интересным случаям, когда график функции $f(\alpha)$ на плоскости $(\alpha, f(\alpha))$ состоит не из дискретных точек, а представляет собой некоторую непрерывную линию.

Проанализируем поведение функции $f(\alpha)$ для различных значений α .

В точке $\alpha_0 = \alpha(0)$ функция $f(\alpha)$, являясь всюду выпуклой, имеет максимум. Значение функции в максимуме легко определить, если воспользоваться выражением (21). Положив в нем $q = 0$, получаем, что $f(\alpha_0) = D_0$, т. е. максимальное значение $f(\alpha)$ равно хаусдорфовой размерности мультифрактала D_0 . Качественно эта ситуация отражена на рис. 23, где показаны границы интервала $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, на котором задана функция $f(\alpha)$. Заметим, что обращение функции $f(\alpha)$ в нуль на этих границах вовсе не обязательно, и в ряде случаев $f(\alpha)$ в одной из этих точек (или даже в обеих) может быть отлична от нуля. Обязательным условием, однако, является обращение в бесконечность производной $f'(\alpha)$ в этих двух точках.

Несложно показать, что $D_1 = \alpha(1) = f(\alpha(1))$, т. е. информационная размерность D_1 лежит на кривой $f(\alpha)$ в точке, где $\alpha = f(\alpha)$ и $f'(\alpha) = 1$. Этот факт позволяет определять информационную размерность D_1 графическим методом непосредственно из графика $f(\alpha)$.

В свою очередь $D_2 = 2\alpha(2) - f(\alpha(2))$, или $f(\alpha(2)) = 2\alpha(2) - D_2$.

Следовательно, и корреляционную размерность можно определять графически непосредственно из графика $f(\alpha)$.

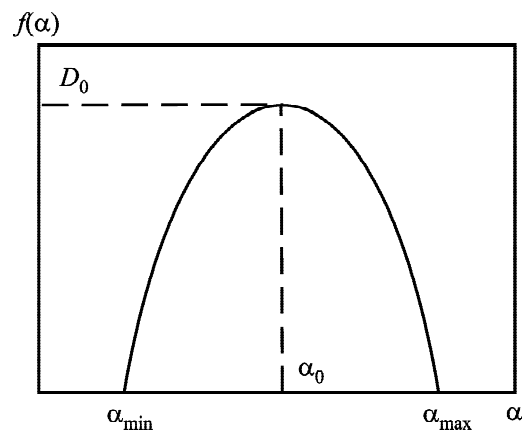


Рис. 23. Типичный график функции $f(\alpha)$ [229]

При проведении мультифрактального анализа в дополнение к описанным выше характеристикам и параметрам иногда выделяют и другие информационные характеристики.

Так, величина

$$K = \alpha_{\max} - \alpha_{\min} = D_{-\infty} - D_{\infty}$$

служит количественной мерой стохастичности исследуемой системы.

Величину $f(q = \infty) = f_{\infty}$ или ее оценку f_Q , где Q – некоторое положительное достаточно большое значение q , задаваемое в конкретных расчетах, часто используют как меру однородности системы.

3.4. Мультифрактальный формализм Чабры и Дженсена

Среди иных версий мультифрактального формализма получила распространение версия, предложенная А. Б. Чаброй и Р. В. Дженсеном (см., например, [216, 229]). Подход Чабры и Дженсена не требует применения преобразований Лежандра (23) или (24) и основан на использовании для построения мультифрактального спектра следующих выражений:

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_{i\varepsilon}(q) \ln p_i}{\ln \varepsilon}, \quad (25)$$

где

$$\mu_{i\varepsilon}(q) = \frac{p_i^q}{\chi(q)}, \quad \chi(q) = \sum_{i=1}^N p_i^q,$$

$$f(q) = q\alpha(q) - \tau(q) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q \sum_{i=1}^N \mu_{i\varepsilon}(q) \ln p_i - \ln \chi(q)}{\ln \varepsilon}. \quad (26)$$

Авторы утверждают, что рассчитанные с помощью соотношений (25) и (26) мультифрактальные спектры $f(\alpha)$, заданные фактически в параметрической форме, где параметром является q , с высокой точностью совпадают с аналогичными спектрами, полученными на основе стандартной процедуры. Заметим также, что здесь функция $\chi(q)$ полностью совпадает со статистической суммой $Z(q, \varepsilon)$, которую мы вводи-

ли ранее. Более того, по умолчанию считается, что $N = N(\varepsilon)$, $p_i = p_i(\varepsilon)$ и $\chi = \chi(\varepsilon)$.

3.5. Информационная интерпретация мультифрактального формализма

В литературе встречается также так называемая информационная интерпретация мультифрактального формализма (см., например, [229]). Здесь вместо статистической суммы (11) вводится в рассмотрение информация мультифрактального преобразования:

$$I(q) = \sum_{i=1}^N p_i \ln \frac{p_i}{\mu_{i\varepsilon}(q)}.$$

Существует простая связь между информацией мультифрактального преобразования и спектром обобщенных размерностей Реньи:

$$D_q = D_1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(q)}{(q-1) \ln \varepsilon}.$$

Преобразование Лежандра экспоненты мультифрактальной информации

$$\tau_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(q)}{\ln \varepsilon} = (q-1)(D_1 - D_q)$$

дает для мультифрактального спектра $f(\alpha)$ следующее представление:

$$\alpha_I(q) = \frac{d\tau_I}{dq} = \alpha(q) - D_1,$$

$$f_I(q) = q\alpha_I - \tau_I(q) = f(q) - D_1,$$

где $\alpha(q)$ и $f(q)$ определяются формулами (25) и (26). Таким образом, используя информационную интерпретацию мультифрактального формализма, следует учитывать, что получающаяся в результате формальных преобразований структура спектра сингулярностей будет смещена на величину D_1 относительно структуры соответствующего спектра, рассчитанного с помощью стандартной процедуры или метода Чабры и Дженсена.

3.6. L-модель мультифрактального формализма

Рассмотрим еще один важный вариант мультифрактального формализма, который позволяет осуществлять анализ неоднородных структур,

характеризующихся несколькими пространственными масштабами. В основе этого варианта лежит так называемая L-модель мультифрактальных представлений (см, например, [229]).

Для общей характеристики L-модели рассмотрим фрактальное множество, расположенное в ограниченной области E-мерного евклидового пространства. Предположим, что на некотором этапе его разбиения мы разделили его на некоторое количество M достаточно малых непересекающихся кусочков S_1, S_2, \dots, S_M так, что каждый из этих кусочком имеет меру p_i и лежит внутри сферы радиуса I_i . При этом все I_i ограничены сверху условием $I_i \leq I$. Определим обобщенную статистическую сумму следующим образом:

$$\Gamma(q, \tau, \{S_i\}, I) = \sum_{i=1}^M \frac{p_i^q}{\Gamma_i^\tau}$$

Справедливо утверждение, согласно которому при достаточно большом M величина Γ будет порядка единицы, только если выполнено условие

$$\tau = \tau(q) = (q-1)D_q.$$

Обратим внимание, что выражение (12) является частным вариантом данного подхода, когда все I_i одинаковы и равны ϵ .

Рассмотрим случай, когда к нашему множеству применима так называемая рекурсионная процедура разбиения. Она заключается в следующем. Пусть вначале мы имеем множество с мерой 1 и размером 1 (например, отрезок единичной длины). Разделим это множество на подмножества $S_i, i = \overline{1, m}$, с мерами p_i и размерами $I_i < 1$. На этом первом шаге запишем функцию Γ в виде

$$\Gamma_1(q, \tau) = \sum_{i=1}^m \frac{p_i^q}{\Gamma_i^\tau}$$

На втором шаге каждое из этих m подмножеств, в свою очередь, делится на m частей с мерами, уменьшенными на множители p_j , и размерами, уменьшенными на множители $I_j, j = \overline{1, m}$. В результате мы получим уже m^2 частей. Функция Γ на этом шаге, очевидно, равна

$$\Gamma_2(q, \tau) = [\Gamma_1(q, \tau)]^2.$$

На n-ом шаге по индукции получаем m^n частей и

$$\Gamma_n(q, \tau) = [\Gamma_1(q, \tau)]^n.$$

В пределе при достаточно большом числе n таких последовательных разбиений наша статистическая сумма будет стремиться либо к нулю, либо к бесконечности. И лишь в одном случае она будет порядка единицы. Это произойдет, если

$$\Gamma_1(q, \tau) = 1.$$

Это и есть уравнение для функции $\tau(q)$. Используемая для определения зависимости $\tau(q)$ функция $\Gamma_1(q, \tau)$ называется генератором для такого мультипликативного процесса разбиения множества.

3.7. Подход Мандельброта

По нашему мнению, было бы несправедливым не описать кратко, что именно критиковал в 1989 г. Б. Мандельброт [136, 183] в признанной на сегодня концепции Фриша и Паризи.

Излагая собственный подход к мультифракталам и сравнивая его с термодинамическим подходом Фриша и Паризи, он утверждал следующее.

1. Мультифрактал принципиально является не множеством, а мерой, а потому наиболее верным является именно вероятностный подход к его описанию.

2. Функция $\tau(q)$, называемая в термодинамическом подходе скейлинговой экспонентой или показателем массы, на самом деле имеет смысл кумулянтной генерирующей функции (cumulant generating function).

3. Величину α , называемую экспонентой Гельдера, не следует называть размерностью, как это делали Хентшел и Прокаччиа [266], поскольку если мультифрактал – это мера, а не множество, то к нему понятие размерности неприменимо.

4. Функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$ не является принципиально новой концепцией, созданной Фришем и Паризи. Если носитель мультифрактала имеет размерность, равную единице, то функция $f(\alpha)$ просто равна $f(\alpha) = \rho(\alpha) + 1$, где $\rho(\alpha)$ – предельная функция распределения вероятностей, построенная в двойных логарифмических координатах.

5. Подход Фриша и Паризи плох тем, что они формально использовали известные в термодинамике преобразования Лежандра, не поясняя сущности функции $f(\alpha)$. В то же время, интуитивно ни один специалист не может себе представить, какой именно вид может (или не может) иметь эта функция.

6. Функцию $f(\alpha)$ не следует трактовать в качестве размерности, поскольку не ясно, что же тогда делать с отрицательными значениями $f(\alpha)$, а тем более α .

7. Мультифракталы являются сингулярной мерой, третьим путем описания случайной величины (СВ), в отличие от функции распределения, плотности вероятности (для непрерывной СВ) с одной стороны и ряда распределения (для дискретной СВ) с другой стороны.

Для немультифрактальной СВ мера, определенная на интервале от 0 до t и обозначаемая как $\mu([0, t])$, является непрерывной и дифференцируемой функцией t , а ее производная дает плотность вероятности $\mu'(t)$ этой СВ, т. е.

$$\mu'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu([t, t + \Delta t])}{\Delta t},$$

где $\mu([t, t + \Delta t]) \equiv \mu([0, t + \Delta t]) - \mu([0, t])$.

Разумеется, по известной плотности вероятности $\mu'(t)$ можно построить функцию распределения:

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^t \mu'(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Однако возможна ситуация, когда мера $\mu([0, t])$ оказывается непрерывной, но не дифференцируемой функцией переменной t . Тогда ее производная по t принципиально не существует, а потому не существуют плотность вероятности и функция распределения. При этом одновременно СВ не является и дискретной. Такая мера $\mu([0, t])$ называется сингулярной. (Б. Мандельброт настаивает, что мультифрактал и есть такой мерой.)

8. Для количественного описания сингулярных мер следует поступать следующим образом. Строится последовательность $\Delta_k t$ уменьшающихся величин Δt . Для каждого $\Delta_k t$ производится замена его меры $\mu([\Delta_k t])$ на величину $\alpha_k = \log \mu([\Delta_k t]) / \log \Delta_k t$, называемую экспонентой Гельдера. Для величин α_k формируется плотность

вероятности и сразу же заменяется величиной $\rho_k(\alpha) = -\log(\text{плотность вероятности } \alpha_k) / \log \Delta_k t$. Установлено, что при $\Delta t \rightarrow \infty$ величина $\rho_k(\alpha)$ не обращается ни в 0, ни в ∞ .

Предел $\rho_k(\alpha)$ при $k \rightarrow \infty$ обозначим через $\rho(\alpha)$. Именно свойство $\rho_k(\alpha) \rightarrow \rho(\alpha)$ и должно использоваться для введения понятия мультифрактала.

Установлено, что $\rho(\alpha) < 0$ для любых α , за исключением случая, когда $\rho(\alpha)$ достигает своего максимума. Фактически Фриш и Паризи ограничились случаем, когда $\rho(\alpha) \geq -1$, а потому и $f(\alpha) = \rho(\alpha) + 1 \geq 0$. Именно поэтому они трактовали $f(\alpha)$ как размерность соответствующего множества. Замена $\rho(\alpha)$ на $f(\alpha)$ может быть полезна в ряде случаев, но в целом она скрывает природу мультифракталов.

9. Значения α , для которых $f(\alpha) \geq 0$, называются явными (manifest), а те, для которых $f(\alpha) < 0$, – латентными (latent). Последнее означает, что они, хотя и скрыты, но существуют. Латентные значения α негативно влияют на оценивание $\tau(q)$ и D_q по $f(\alpha)$ при больших значениях $|q|$, приводя к их искажению.

Как уже говорилось выше, в 1999 г. Б. Мандельброт отказался от попытки дать точное определение мультифрактала [215], а несколько позднее (в 2004 г.) назвал свой подход к мультифракталам “анализом Гельдера” [86].

Отметим, что трактовка мультифрактала как фрактальной меры нашла поддержку у многих ведущих специалистов (см., например, [37]).

3.8. Мультифрактальный анализ математических мультифракталов

3.8.1. Неоднородное канторово множество (P-модель)

В качестве примера расчета спектра обобщенных фрактальных размерностей проведем его для неоднородного канторова множества, которое мы рассматривали в пункте 3.2.1 [82, 229].

Можно показать, что на n -ом шаге процедуры построения этого множества обобщенная сумма (11) имеет вид обычного бинома Ньютона:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{m=0}^n C_n^m (p_1^{n-m} p_2^m)^q = (p_1^q + p_2^q)^n.$$

Поскольку на этом шаге размер ячейки $\varepsilon = 3^{-n}$, то

$$Z(q, \varepsilon) = (p_1^q + p_2^q)^n \approx \varepsilon^{\tau(q)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n\tau(q)}.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получаем

$$D_q = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 3}. \tag{27}$$

Проанализируем полученный результат. Если $p_1 = p_2 = 1/2$, то неоднородное канторово множество превращается в однородное и все обобщенные размерности Реньи оказываются одинаковыми и равными размерности носителя мультифрактала D_0 :

$$\begin{aligned} D_q &= -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 3} = -\frac{\ln\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^q\right)}{(q-1)\ln 3} = \\ &= -\frac{\ln(2^{1-q})}{(q-1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = D_0. \end{aligned}$$

Если же $p_1 \neq 1/2$, то канторово множество является неоднородным. На рис. 24 изображена зависимость D_q (27) для значений вероятностей $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.75$.

Корреляционная размерность данного мультифрактала равна

$$D_1 = -\frac{p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2}{\ln 3} = 0.5118.$$

Она, как и следовало ожидать, меньше размерности D_0 , а корреляционная размерность $D_2 = 0.4278$, в свою очередь, меньше, чем D_1 .

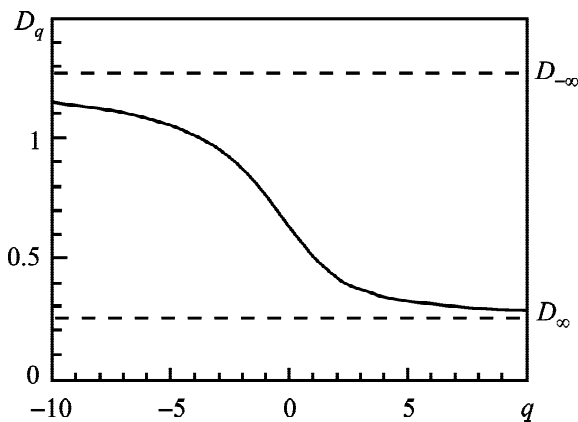


Рис. 24. Спектр обобщенных размерностей для неоднородного канторова множества с $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.75$ [229]

Предельных значений функция D_q достигает при $q = \pm\infty$. Они равны соответственно

$$D_\infty = -\frac{\ln p_2}{\ln 3} = 0.2618, \quad D_{-\infty} = -\frac{\ln p_1}{\ln 3} = 1.2618.$$

Напомним, что $D_{\min} = D_\infty$ соответствует самым густозаселенным ячейкам, а $D_{\max} = D_{-\infty}$ – самым разреженным.

Интересно также отметить, что носитель мультифрактала может сам и не являться фракталом. Например, если мы исходный единичный отрезок будем делить не на три равные части, а на две, и припишем первой части меру p_1 , а второй p_2 , то спектр обобщенных фрактальных размерностей будет иметь вид

$$D_q = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 2}.$$

Тогда $D_0 = 1$, так как теперь носителем нашего мультифрактала является весь единичный отрезок целиком, т. е. объект с топологической размерностью $D_T = 1$. Это не фрактал, поскольку $D_0 = D_T$. Между тем все остальные обобщенные фрактальные размерности заключены в интервале между

$$D_\infty = -\frac{\ln p_2}{\ln 2} \quad \text{и} \quad D_{-\infty} = -\frac{\ln p_1}{\ln 2}, \quad p_1 < p_2.$$

Теперь изучим поведение функции мультифрактального спектра $f(\alpha)$. Скейлинговая экспонента имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau(q) &= (q-1)D_q = \\ &= (q-1) \frac{(-1)\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 3} = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= \frac{d\tau}{dq} = \frac{d}{dq} \left[-\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 3} \right] = \\ &= -\frac{1}{\ln 3} \frac{1}{p_1^q + p_2^q} (p_1^q \ln p_1 + p_2^q \ln p_2). \end{aligned} \tag{28}$$

С учетом этого имеем

$$f(\alpha(q)) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau = -\frac{q}{\ln 3} \frac{p_1^q \ln p_1 + p_2^q \ln p_2}{p_1^q + p_2^q} + \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 3}. \quad (29)$$

Итак, пара соотношений (28) и (29) в параметрической форме задает функцию мультифрактального спектра $f(\alpha)$. Для случая $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.75$ она изображена на рис. 25 (кривая a). Положение ее максимума α_0 определяется выражением

$$\alpha_0 = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q=0} = -\frac{1}{\ln 3} \frac{1}{p_1^0 + p_2^0} (p_1^0 \ln p_1 + p_2^0 \ln p_2) = -\frac{\ln p_1 + \ln p_2}{2 \ln 3} \approx 0.7618.$$

Если несколько сблизить значения вероятностей p_1 и p_2 , сделав их равными $p_1 = 0.45$, $p_2 = 0.55$, то спектр сингулярностей станет более узким (рис. 25, кривая b).

3.8.2. Неоднородное канторово множество (L-модель)

В качестве иллюстрации возможностей рассмотренной L-модели мультифрактального формализма применим ее для анализа мультифрактальной структуры неоднородного канторова множества, неоднородность которого в отличие от ранее рассмотренных случаев проявляется не в разли-

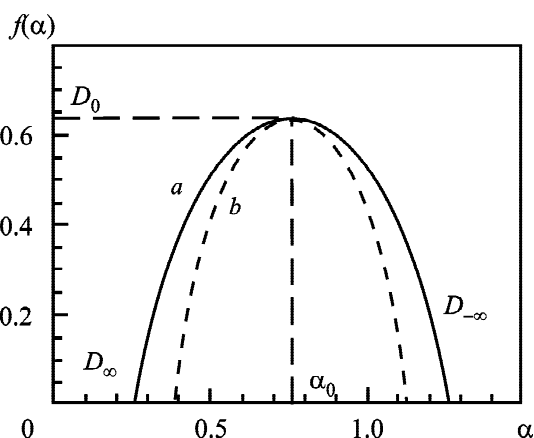


Рис. 25. Зависимость $f(\alpha)$ для неоднородного канторова множества: кривая a – $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.75$; кривая b – $p_1 = 0.45$, $p_2 = 0.55$ [229]

чий вероятностных мер p_i (теперь они считаются одинаковыми), а в различии длин элементов, образующихся на каждом шаге построения (см, например, [229]).

На нулевом шаге построения такого множества возьмем отрезок единичной длины. На первом шаге заменим его двумя отрезками с длинами $l_1 = 0.25$ и $l_2 = 0.5$, примыкающими соответственно к левому и правому концам. Обоим отрезкам припишем одинаковую меру $p = 1/2$. Затем повторим ту же процедуру с каждым из этих двух отрезков. В результате получится уже четыре отрезка с длинами l_1^2 , $l_1 l_2$, $l_2 l_1$ и l_2^2 и одинаковыми мерами, равными $1/4$. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим в конце концов неоднородное канторово множество с двумя характерными масштабами длины, т. е. мультифрактал. Первые шаги процесса его построения изображены на рис. 26.

В этом конкретном примере канторова множества $m = 2$, и генератор равен

$$\Gamma_1(q, \tau) = \frac{p_1^q}{l_1^\tau} + \frac{p_2^q}{l_2^\tau}.$$

Подставляя сюда имеющиеся у нас значения p_1 , l_1 , p_2 и l_2 , получим уравнение для $\tau(q)$:

$$2^\tau + 4^\tau = 2^{q\tau},$$

откуда

$$\tau(q) = \frac{\ln(\sqrt{1 + 2^{q+2}} - 1)}{\ln 2} - 1.$$

Весь спектр обобщенных фрактальных размерностей в этом случае заключен в интервале $1/2 \leq D_q \leq 1$. Это легко показать, учитывая то, что

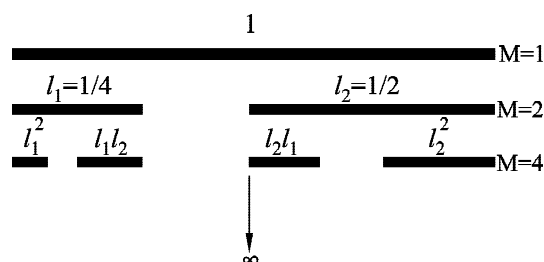


Рис. 26. Неоднородное канторово множество с двумя характерными масштабами длины $l_1 = 1/4$, $l_2 = 1/2$ и $p_1 = p_2 = 1/2$ [229]

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{\ln(\sqrt{1+2^{q+2}} - 1) - \ln 2}{(q-1)\ln 2}.$$

Тогда

$$D_{\max} = D_{-\infty} = \lim_{q \rightarrow -\infty} \frac{\ln(\sqrt{1+2^{q+2}} - 1) - \ln 2}{(q-1)\ln 2} = \lim_{q \rightarrow -\infty} \frac{\ln 2^q}{(q-1)\ln 2} = 1,$$

$$D_{\min} = D_{+\infty} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{1+2^{q+2}} - 1)}{(q-1)\ln 2} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{(q+2)\ln 2}{2(q-1)\ln 2} = \frac{1}{2}.$$

График функции D_q приведен на рис. 27. Размерность носителя такого мультифрактала составляет

$$D_0 = \frac{\ln(\sqrt{1+2^2} - 1) - \ln 2}{(0-1)\ln 2} = 1 - \frac{\ln(\sqrt{5} - 1)}{\ln 2} \approx 0.6942.$$

3.9. Примеры физических мультифракталов

Согласно фрактальной парадигме (см., например, [82, 83]) фрактальность наряду с нелинейностью [270] является одним из фундаментальных свойств окружающего мира. Поэтому физические фракталы, созданные природой, по количеству

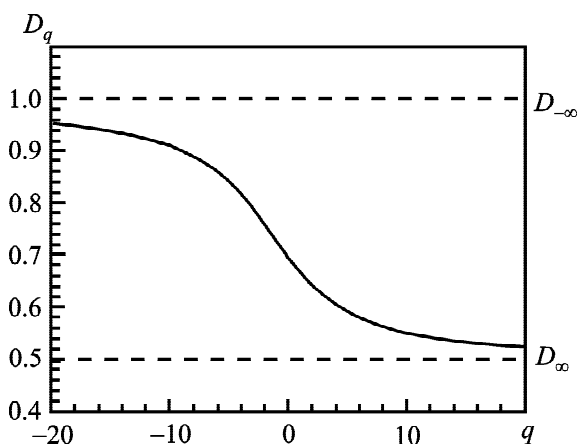


Рис. 27. Спектр обобщенных размерностей для неоднородного канторова множества [229], изображенного на рис. 26

и разнообразию существенно превосходят математические фракталы, придуманные человеком. Большинство физических фракталов оказываются мультифракталами, а потому их мультифрактальный анализ является актуальным и единственно адекватным. В этих целях используются все рассмотренные выше методы мультифрактального анализа, но с учетом особенности физических фракталов – наличия конечного минимального масштаба.

Мультифрактальными свойствами обладают, например, процессы на переходе Андерсона (переход металл–диэлектрик) [45], многие среды и процессы в геофизике [136, 169, 172, 178, 180, 181, 207, 288], процессы разрушения геологических структур (например, в [33] землетрясение рассматривается как явление фрактального разрушения). Много мультифрактальных структур обнаружено при изучении турбулентности (см., например, [136, 197]), в финансовой сфере (см., например, [80, 197]), в климатологии (см., например, [197]) и т. п.

В радиофизике часто объектами изучения являются сигналы и процессы, у которых подозревают наличие монофрактальных или мультифрактальных свойств. Особенности соответствующих методов фрактального и мультифрактального анализа будут рассмотрены во второй части этой работы.

Выводы

1. Хотя первое определение фрактала появилось только в 1975 г. (Б. Мандельброт), но подготовка к этому началась примерно на сто лет ранее в работах великих математиков прошлого (К. Вейерштрасс, Г. Риман, А. Лебег, К. Менгер, Г. Кантор, В. Ф. Серпинский, Ф. Хаусдорф, А. С. Безикович, Г. Жюлиа, П. Фату и др.).

В развитии фрактальной геометрии можно выделить четыре этапа: эпоху “монстров”, подготовительный этап, этап становления и развития и современный этап.

2. Евклидова и топологическая размерности, принимающие только целочисленные значения, принципиально не способны описывать фракталы. Поэтому для корректного описания фракталов было предложено использовать размерность Хаусдорфа–Безиковича, которая может принимать и нецелочисленные значения.

3. Фракталы делятся на математические и физические. Первые придуманы людьми и существуют лишь в их воображении, вторые – в большинстве своем созданы природой и находятся в окружающем нас мире. В последнее время люди научились создавать некоторые физические фракталы и использовать их на практике.

Основное отличие физических фракталов от математических состоит в том, что физические фракталы принципиально ограничены в диапазоне своих масштабов (пространственных, временных и т. п.) как сверху, так и снизу.

4. Монофрактал – это фрактал, для описания которого достаточно одной фрактальной размерности. Монофракталы делятся на регулярные и стохастические (или нерегулярные, случайные). Алгоритм построения регулярного фрактала строго детерминирован, а стохастического – содержит в себе по крайней мере один случайный фактор.

Регулярные фракталы делятся на геометрические и алгебраические. У геометрических фракталов самоподобие (или самоаффинность) проявляется в самой геометрической структуре, у алгебраических – в самоподобию (или самоаффинности) тех или иных их числовых характеристик.

У стохастических фракталов самоподобие и самоаффинность проявляются не в буквальном смысле, а в статистическом.

5. Для математических монофракталов в качестве фрактальной размерности используется размерность Хаусдорфа–Безиковича. Для нефрактальных объектов топологическая и фрактальная размерности равны и совпадают с евклидовой размерностью пространства, в которое погружен такой объект.

Фрактальная размерность фрактальных объектов может быть как дробной, так и целой, главное, чтобы она была больше их топологической размерности.

Из равенства фрактальных размерностей двух объектов абсолютно не следует подобие их структуры.

6. При описании толстых фракталов как регулярных монофракталов вместо размерности Хаусдорфа–Безиковича применяются показатели скейлинга.

7. Кроме однородных фракталов, монофракталов, существуют также неоднородные фракталы, мультифракталы, требующие использова-

ния не одной, а целого набора фрактальных размерностей.

Мультифракталы принципиально обладают определенными статистическими свойствами, учет которых и делает их неоднородными фракталами.

8. Введение случайного фактора в алгоритм построения регулярного мультифрактала позволяет создавать стохастические мультифракталы.

9. В заключение приведем слова Б. Мандельброта: “Фракталы – не панацея. Я вовсе не рекомендую фрактальные методы всем подряд и уж тем более никогда не пытался навязывать их кому бы то ни было” [84].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gouyet J.-F. *Physics and Fractal Structures*. New York: Springer-Verlag, 1996. 234 p.
2. Mandelbrot B. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Paris: Flammarion, 1975. 190 p.
3. Горобець Ю. І., Кучко А. М., Вавилова І. Б. *Фрактальна геометрія у природознавстві: Навчальний посібник*. Київ: Наукова думка, 2008. 232 с.
4. Tarasov V. E. *Fractional dynamics. Applications of fractal Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. New York: Springer, 2011. 522 p.
5. Oldham K. B. and Spanier J. *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. San Diego: Academic Press, 1974. 234 p.
6. Ross B., ed. *Fractional Calculus and Its Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1975. 381 p.
7. Miller K. and Ross B. *An Introduction to the Fractional calculus and Fractional Differential Equations*. New Jersey: Wiley-Interscience, 1993. 366 p.
8. Hilfer R., ed. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore, New Jersey, et al.: World Scientific Publ., 2000. 85 p.
9. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
10. Bayin S. *Mathematical Methods in Science and Engineering*. New Jersey: Wiley-Interscience, 2006. 679 p.
11. Hirschweiler R. and MacGregor T. H. *Fractional Cauchy Transforms*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006. 235 p.
12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., and Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. New York: Elsevier, 2006. 523 p.
13. Sabatier J., Agrawal O. P., and Tenreiro Machado J. A., eds. *Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. New York: Springer, 2007. 552 p.
14. Васильев В. В., Симак Л. А. *Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем*. Киев: НАН Украины, 2008. 256 с.

15. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Из-во "Артишок", 2008. 512 с.
16. Saichev A. I. and Woyczynski W. A. *Distributions in the Physical and Engineering Sciences: Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets*. Boston: Birkhäuser, 1997. 336 p.
17. Gil'mutdinov A. K., Ushakov P. A., and El-Kharazi R. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ., 2017. 252 p.
18. *Фракталы и дробные операторы*. Под ред. А. Х. Гильмутдинова. Казань: Изд-во "Фэн" Академии наук РТ, 2010. 488 с.
19. Nakayama T. and Yakubo K. *Fractal Concepts in Condensed Matter Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 203 p.
20. Потапов А. А. *Фракталы в радиофизике и радиолокации*. Москва: Логос, 2002. 664 с.
21. Потапов А. А. *Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки*. Москва: Университетская книга, 2005. 848 с.
22. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения*. Киев: Наукова думка, 1992. 205 с.
23. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика. *Успехи физических наук*. 1985. Т. 146, Вып. 3. С. 493–506.
24. Peitgen H.-O. and Saupe D., eds. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag, 1988. 312 p.
25. Mandelbrot B. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Paris: Flammarion, 1989. 196 p.
26. Mandelbrot B. B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1977. 468 p.
27. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1982. 468 p.
28. Mandelbrot B. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Paris: Flammarion, 2010. 216 p.
29. Мандельброт Б. *Фрактальная геометрия природы*. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
30. Baryshev Y. and Teerikorpi P. *Discovery of Cosmic Fractals*. New Jersey: World Scientific Publ., 2002. 373 p.
31. Crownover R. M. *Introduction to Fractals and Chaos*. Boston: Jones and Bartlett Publ., 1995. 299 p.
32. Кроновер Р. М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*. Москва: Постмаркет, 2000. 352 с.
33. Булат А. Ф., Дырда В. И. *Фракталы в геомеханике*. Киев: Наукова думка, 2005. 357 с.
34. Hausdorff F. Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.* 1918. Vol. 79, Is. 1-2. P. 157–179. DOI: 10.1007/BF01457179
35. Thim J. *Continuous Nowhere Differentiable Functions. Master's Thesis*. Lulea: Lulea University of Technology, 2003. 94 p.
36. Massopust P. R. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. San Diego, New York et al.: Academic Press, 1994. 383 p.
37. Bandt C., Barnsley M., Devaney R., Falconer K. J., Kanнан V., and Vinod Kumar P. B., eds. *Fractals, Wavelets, and their Applications: Contributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)*. Switzerland: Springer Int. Publ., 2014. 508 p.
38. Du Bois-Reimond P. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1875. Vol. 79. P. 21–37.
39. Потапов А. А., Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Пахомов А. А., Герман В. А. *Новейшие методы обработки изображений*. Под ред. А. А. Потапова. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с.
40. Cellérier M. C. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Darboux Bull.* 1890. Vol. 14. P. 142–160.
41. Бржечка В. Ф. О функции Больцано (к столетию со дня смерти чешского математика Бернарда Больцано). *Успехи математических наук*. 1949. Т. 4, Вып. 2(30). С. 15–21.
42. Мун Ф. *Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров*. Москва: Мир, 1990. 312 с.
43. McCauley J. L. *Chaos, Dynamics and Fractals*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 323 p.
44. Lasota A. and Mackey M. C. *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1994. 474 p.
45. Кузнецов С. П. *Динамический хаос*. Саратов: Саратовский государственный университет, 2001. 295 с.
46. Moon F. C. *Chaotic and Fractal Dynamics. An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2004. 508 p.
47. Moon F. C. *Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. New Jersey: Wiley-Interscience, 2004. 309 p.
48. Mandelbrot B. B. *Fractals and Chaos. The Mandelbrot Sets and Beyond*. New York: Springer-Verlag, 2004. 308 p.
49. Peitgen H.-O., Jürgens H., and Saupe D. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Second Edition*. New York: Springer-Verlag, 2004. 864 p.
50. Szeplinska-Stupnicka W. *Chaos. Bifurcations and Fractals Around Us. A Brief Introduction*. New Jersey: World Scientific Publ., 2004. 107 p.
51. Гринченко В. В., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. *Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы*. Москва: Издательство ЛКИ, 2010. 280 с.
52. Feldman D. P. *Chaos and Fractals. An Elementary Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2012. 408 p.
53. Pickover C. A., ed. *Chaos and Fractals: A Computer Graphical Journey. Ten Year Compilation of Advanced Research*. Amsterdam, Lausanne et al.: Elsevier, 1998. 452 p.
54. Gulick D. *Encounters with Chaos and Fractals*. College Park: University of Maryland, 2012. 371 p.
55. Crilly A. J., Earnshaw R. A., and Jones H., eds. *Fractals and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1991. 277 p.
56. Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., Maletsky E., Perciante T., and Yunker L. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Two*. New York: Springer-Verlag, 1992. 187 p.
57. Peitgen H.-O., Jürgens H., and Saupe D. *Fractals for the Classroom. Part One Introduction to Fractals and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1992. 450 p.

58. Scheinerman E. R. *Invitation to Dynamical Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995. 373 p.
59. Lesne A. *Méthodes de renormalisation: Phénomènes critiques – Chaos – Structures fractales*. Paris: Eyrolles Sciences, 1995. 388 p.
60. Klages R. *Microscopic Chaos, Fractals and Transport in Nonequilibrium Statistical Mechanics*. New Jersey, London et al.: World Scientific Publ., 2007. 441 p.
61. Melin P. and Castillo O. *Modelling, Simulation and Control of Non-Linear Dynamical Systems: An Intelligent Approach Using Soft Computing and Fractal Theory*. Boca Raton, London et al.: Taylor and Francis Publ., 2002. 246 p.
62. Kivotides D. The Impact of Kinematic Simulations on Quantum Turbulence Theory. In: F. C. G. A. Nicolleau, C. Cambon, J.-M. Redondo, J. C. Vassilicos, M. Reeks, and A. F. Nowakowski, eds. *New Approaches in Modeling Multiphase Flows and Dispersion in Turbulence, Fractal Methods and Synthetic Turbulence*. Dordrecht, Heidelberg et al.: Springer, 2012. 152 p.
63. Gaponov-Grekhov A. V. and Rabinovich M. I. *Nonlinearities in Action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. 191 p.
64. Lesne A. *Renormalization Methods: Critical Phenomena, Chaos, Fractal Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 1998. 374 p.
65. Castillo O. and Melin P. *Soft Computing and Fractal Theory for Intelligent Manufacturing*. Heidelberg: Physica-Verlag, 2003. 283 p.
66. Flake G. W. *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*. Cambridge, MA: MIT Press, 1998. 493 p.
67. Schroeder M. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite*. New York: W. H. Freeman and Company, 1991. 429 p.
68. Шредер М. *Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая*. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 528 с.
69. Peano G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Math. Ann.* 1890. Vol. 36, No. 1. P. 157–160. DOI: 10.1007/BF01199438
70. Von Koch H. Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysic.* 1904. Vol. 1. P. 681–702.
71. Smith H. J. S. On the integration of discontinuous functions. *Proc. London Math. Soc.* 1874. Vol. s1-6, Is. 1. P. 140–153. DOI: 10.1112/plms/s1-6.1.140
72. Du Bois-Reymond P. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung. *Math. Ann.* 1880. Vol. 16, Is. 1. P. 115–128. DOI: 10.1007/BF01459233
73. Volterra V. Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. [Some observations on point-wise discontinuous function]. *Giornale di Matematiche.* 1881. Vol. 19. P. 76–86.
74. Cantor G. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V. [On infinite, linear point-manifolds (sets), Part 5]. *Math. Ann.* 1883. Vol. 21, Is. 4. P. 545–591. DOI: 10.1007/BF01446819
75. Perrin J. Movement brownien et réalité moléculaires. *Annales de chimie et de physique.* 1909. Vol. 18, No. 8. P. 5–114.
76. Perrin J. *Les Atomies*. Paris: Librairie Feléx Alcan, 1913. 296 p.
77. Газале М. *Гномон. От фараонов до фракталов*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 272 с.
78. Barnsley M. F. *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press, 1988. 394 p.
79. Fauvel J., Flood R. and Wilson R., eds. *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*. Oxford: Oxford University Press, 2006. 189 p.
80. Mandelbrot B. B. *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. Selecta Volume E*. New York: Springer-Verlag, 1997. 541 p.
81. Яновский В. В. Фракталы. Возникновение новой парадигмы в физике. *Universitates.* 2003. № 3. С. 32–47.
82. Яновский В. В. *Лекции о нелинейных явлениях. Том 1*. Харьков: Институт монокристаллов, 2006. 456 с.
83. Losa G. A., Merlini D., Nonnenmacher T. F., and Weibel E. R., eds. *Fractals in Biology and Medicine. Volume IV*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2005. 314 p.
84. Мандельброт Б. *Фракталы, случай и финансы*. Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 256 с.
85. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. *Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем*. Москва: Мир, 1993. 176 с.
86. Мандельброт Б. *Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. 392 с.
87. Деменок С. Л. *Просто фрактал*. Санкт-Петербург: ООО “Страта”, 2012. 168 с.
88. Wicks K. R. *Fractals and Hyperspaces*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. 168 p.
89. Bandt C., Graf S., and Zähle M., eds. *Fractal Geometry and Stochastics*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1995. 245 p.
90. Bandt C., Falconer K., and Zähle M., eds. *Fractal Geometry and Stochastics V*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2015. 339 p.
91. Bandt C., Graf S., and Zähle M., eds. *Fractal Geometry and Stochastics II*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. 286 p.
92. Bandt C., Mosko U., and Zähle M., eds. *Fractal Geometry and Stochastics III*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2004. 264 p.
93. Przytycki F. and Urbański M. *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 362 p.
94. Blei R. *Analysis in Integer and Fractional Dimensions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 556 p.
95. Kigami J. *Analysis on Fractals*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 226 p.
96. Lowen S. B. and Teich M. C. *Fractal-Based Point Processes*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005. 626 p.
97. Lévy-Véhel J. and Lutton E., eds. *Fractals in Engineering: New Trends in Theory and Applications*. London: Springer-Verlag, 2005. 290 p.

98. Afraimovich V., Ugalde E., and Urias J. *Fractal Dimensions for Poincare Recurrences, Volume 2*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 258 p.
99. Jorgensen P. E. T. *Analysis and Probability: Wavelets, Signals, Fractals*. New York: Springer-Verlag, 2006. 280 p.
100. Lapidus M. L. and van Frankenhuijsen M. *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions: Geometry and Spectra of Fractal Strings*. New York: Springer-Verlag, 2013. 570 p.
101. Lipscomb S. L. *Fractals and Universal Spaces in Dimension Theory*. New York: Springer-Verlag, 2009. 242 p.
102. Barral J. and Seuret S., eds. *Recent Developments in Fractals and Related Fields*. Boston: Birkhäuser, 2010. 419 p.
103. Rosenberg E. *A Survey of Fractal Dimensions of Networks*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ., 2018. 84 p.
104. Kirillov A. A. *A Tale of Two Fractals*. Basel: Birkhäuser, 2013. 138 p.
105. Lindström T. Brownian Motion on Nested Fractals. *Mem. Am. Math. Soc.* 1990. Vol. 83, No. 420. P. 1–128. DOI: 10.1090/memo/0420
106. Chen G. and Huang Y. *Chaotic Maps. Dynamics, Fractals, and Rapid Fluctuations*. San Rafael, USA: Morgan and Claypool Publ., 2011. 227 p.
107. Edgar G. A., ed. *Classics on Fractals*. Boulder: Westview Press, 2004. 366 p.
108. Mazzola G., Milmeister G., and Weissmann J. *Comprehensive Mathematics for Computer Scientists 2*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 355 p.
109. Weinberger S. *Computers, Rigidity, and Moduli. The Large-Scale Fractal Geometry of Riemannian Moduli Space*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2005. 174 p.
110. Strichartz R. S. *Differential Equations on Fractals. A Tutorial*. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2006. 192 p.
111. Mayer V., Skorulski B., and Urbański M. *Distance Expanding Random Mappings, Thermodynamical Formalism, Gibbs Measures and Fractal Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 112 p.
112. Lapidus M. L. and van Frankenhuijsen M., eds. *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot. Part I: Analysis, Number Theory, and Dynamical Systems*. Providence, RI: American Mathematical Society Publ., 2004. 518 p.
113. Carfi D., Lapidus M. L., Pearse E. P. J., and van Frankenhuijsen M., eds. *Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics II: Fractals in Applied Mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society Publ., 2013. 373 p.
114. Lapidus M. L. and van Frankenhuijsen M. *Fractal Geometry and Number Theory: Complex Dimensions of Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions*. Basel: Birkhäuser, 2000. 268 p.
115. Lapidus M., Radunović G., Žubrinić D. *Fractal Zeta Functions and Fractal Drums: Higher-Dimensional Theory of Complex Dimensions*. New York: Springer Int. Publ., 2017. 655 p.
116. Triebel H. *Fractals and Spectra: Related to Fourier Analysis and Function Spaces*. Basel: Birkhäuser, 1997. 272 p.
117. Grabner P. and Woess W., eds. *Fractals in Graz 2001: Analysis – Dynamics – Geometry – Stochastics*. Basel: Birkhäuser, 2003. – 284 p.
118. Bishop C. J. and Peres Y. *Fractals in Probability and Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. 402 p.
119. David G and Semmes S. *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self-Similar Geometry through Metric and Measure*. Oxford: Clarendon Press, 1997. 212 p.
120. Barral J. and Seuret S., eds. *Further developments in fractals and related fields: mathematical foundations and connections*. Basel: Birkhäuser, 2013. 288 p.
121. De-Jun Feng and Ka-Sing Lau, eds. *Geometry and Analysis of Fractals: Hong Kong, December 2012*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. 358 p.
122. Mattila P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 343 p.
123. Su W. *Harmonic Analysis and Fractal Analysis over Local fields and Applications*. Singapore: World Scientific Publ., 2018. 318 p.
124. Pesin Y. and Climenhaga V. *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*. New York: American Mathematical Society Publ., 2009. 314 p.
125. Yamaguti M., Hata M., Kigami J., and Hudson K. *Mathematics of Fractals*. Providence, RI: American Mathematical Society Publ., 1997. 78 p.
126. Changpin Li, Yujiang Wu, and Ruisong Ye., eds. *Recent Advances in Applied Nonlinear Dynamics with Numerical Analysis: Fractional Dynamics, Network Dynamics, Classical Dynamics and Fractal Dynamics with their Numerical Simulations*. Singapore: World Scientific Publ., 2013. 416 p.
127. Dobrushin R. L. and Kusuoka S. *Statistical Mechanics and Fractals*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 102 p.
128. Falconer K. J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 162 p.
129. Kalmykov Y. P., Coffee W. T., and Rice S. A., eds. *Fractals, Diffusion, and Relaxation in Disordered Complex Systems: Advances in Chemical Physics, Part A, Volume 133*. New Jersey: Wiley-Interscience, 2006. 570 p.
130. Kozlov G. V. and Yanovskii Yu. G. *Fractal mechanics of polymers: chemistry and physics of complex polymeric materials*. Toronto: Apple Academic Press, 2015. 370 p.
131. Burde A. and Havlin S., eds. *Fractals and Disordered Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. 408 p.
132. Takayasu H. *Fractals in the physical sciences*. Manchester, New York: Manchester University Press, 1990. 170 p.
133. Pietronero L. and Tosatti E., eds. *Fractals in Physics*. Amsterdam, Oxford et al.: North-Holland, 1986. 476 p.
134. Amann A., Cederbaum L., and Gans W., eds. *Fractals, Quasicrystals, Chaos, Knots and Algebraic Quantum Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1988. 331 p.

135. Meakin P. *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 674 p.
136. Pietronero L., ed. *Fractals' Physical Origin and Properties*. New York: Springer Science, 1989. 370 p.
137. Stauffer D. and Stanley H. E. *From Newton to Mandelbrot: A Primer in Theoretical Physics with Fractals for the Macintosh (R)*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. 211 p.
138. Stanley H. E. and Ostrowsky N., eds. *On Growth and Form: Fractal and Non-fractal Patterns in Physics*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986. 308 p.
139. Pickover C. A., ed. *The Pattern Book: Fractals, Art and Nature*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ., 1995. 427 p.
140. Novak M. M., ed. *Thinking in Patterns: Fractals and Related Phenomena in Nature*. New Jersey, London et al.: World Scientific Publ., 2004. 323 p.
141. Heck A. and Perdang J. M., eds. *Applying Fractals in Astronomy*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. 210 p.
142. Lesmoir-Gordon N., ed. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. London: Springer-Verlag, 2010. 207 p.
143. Lung C. W. and March N. H. *Mechanical Properties of Metals: Atomistic and Fractal Continuum Approaches*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ., 1999. 415 p.
144. Al-Akaidi M. *Fractal Speech Processing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 224 p.
145. Barnsley M. F., Saupe D., and Vrscay E. R., eds. *Fractals in Multimedia*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 259 p.
146. Bunde A. and Havlin S., eds. *Fractals in Science*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994. 300 p.
147. Addison P. S. *Fractals and Chaos. An Illustrated Course*. Bristol, Philadelphia: IOP Publishing Ltd., 1997. 256 p.
148. Birdi K. S. *Fractals in Chemistry, Geochemistry, and Biophysics: An Introduction*. New York: Springer Science, 1993. 264 p.
149. Kozlov G. V., Doblin I. V., and Zaikov G. E. *The Fractal Physical Chemistry of Polymer Solutions and Melts*. Toronto, New Jersey: Apple Academic Press, 2013. 307 p.
150. Kozlov G. V., Mikitaev A. K., and Zaikov G. E. *The Fractal Physics of Polymer Synthesis*. Toronto, New Jersey: Apple Academic Press, 2013. 345 p.
151. Kaandorp J. A. *Fractal Modelling, Growth and Form in Biology*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994. 209 p.
152. Liebovitch L. S. *Fractals and Chaos: Simplified for the Life Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 1998. 249 p.
153. Исаева В. В., Каретин Ю. А., Чернышев А. В., Шкуратов Д. Ю. *Фракталы и хаос в биологическом морфогенезе*. Владивосток: Институт биологии моря ДВО РАН, 2004. 128 с.
154. Di Ieva A., ed. *The Fractal Geometry of the Brain*. New York: Springer-Verlag, 2016. 585 p.
155. Brambila F., ed. *Fractal Analysis. Applications in Health Sciences and Social Sciences*. Rijeka, Croatia: InTech, 2017. 216 p.
156. Sadana A. *Fractal Binding and Dissociation Kinetics for Different Biosensor Applications*. Amsterdam, Boston et al.: Elsevier, 2005. 650 p.
157. Bassingthwaight J. B., Liebovitch L. S., and West B. J. *Fractal Physiology*. Oxford, New York et al.: Oxford University Press, 1994. 354 p.
158. West B. J. *Fractal Physiology and Chaos in Medicine*. Singapore: World Scientific Publ., 2013. 344 p.
159. West B. Fractal Physiology and the Fractional Calculus: A Perspective. *Front. Physiol.* 2010. Vol. 1. id. 12. DOI: 10.3389/fphys.2010.00012
160. Kumar D., Arjunan S. P., and Aliahmad B. *Fractals: Application in Biological Signalling and Image Processing*. Boca Raton: CRC Press, 2017. 174 p.
161. Nonnenmacher T. F., Losa G. A., and Weibel E. R., eds. *Fractals in Biology and Medicine*. Basel: Birkhäuser, 1994. 397 p.
162. Losa G. A., Merlini D., Nonnenmacher T. F., and Weibel E. R., eds. *Fractals in Biology and Medicine: Volume 3*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 2002. 362 p.
163. Takahashi T. *Microcirculation in Fractal Branching Networks*. Japan: Springer, 2014. 138 p.
164. Dewey T. G. *Fractals in Molecular Biophysics*. Oxford, New York: Oxford University Press, 1997. 276 p.
165. Senesi N. and Wilkinson K. J., eds. *Biophysical Chemistry of Fractal Structures and Processes in Environmental Systems*. New York: John Wiley & Sons Inc., 2008. 340 p.
166. Sadana A. *Biosensors: Kinetic of Binding and Dissociation Using Fractal*. Amsterdam: Elsevier, 2003. 418 p.
167. Sadana A. and Sadana N. *Fractal Analysis of the Binding and Dissociation Kinetics for Different Analytes on Biosensor Surfaces*. Amsterdam: Elsevier, 2008. 372 p.
168. Banerji A. *Fractal Symmetry of Protein Exterior*. Basel: Springer, 2013. 55 p.
169. Addison P. S. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*. Bristol, Philadelphia: IOP Publishing Ltd., 2002. 359 p.
170. Ionescu C. M. *The Human Respiratory System: An Analysis of the Interplay between Anatomy, Structure, Breathing and Fractal Dynamics*. London: Springer-Verlag, 2013. 217 p.
171. Barabási A.-L. and Stanley H. E. *Fractal Concept in Surface Growth*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 366 p.
172. Quadfeul S.-A., ed. *Fractal Analysis and Chaos in Geosciences*. Rijeka, Croatia: InTech Press, 2012. 174 p.
173. Turcotte D. L. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 398 p.
174. Kruhl J. Y., ed. *Fractals and Dynamic Systems in Geoscience*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1994. 421 p.
175. Barton C. C. and La Pointe P. R., eds. *Fractals in Petroleum Geology and Earth Processes*. Boston, MA: Springer, 1995. 317 p.
176. Barton C. C. and La Pointe P. R., eds. *Fractals in the Earth Sciences*. New York: Springer, 1995. 265 p.
177. Dauphiné A. *Fractal Geography*. London, Hoboken: John Wiley & Sons, 2012. 241 p.

178. Chandrasekhar E., Dimri V. P., and Garde V. M., eds. *Wavelets and Fractals in Earth System Sciences*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2014. 286 p.
179. Dimri V. P. *Fractal Solutions for Understanding Complex Systems in Earth Sciences*. Cham, Heidelberg, at al.: Springer Int. Publ., 2016. 152 p.
180. Dimri V. P., ed. *Fractal Behavior of the Earth System*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 208 p.
181. Dimri V. P., Srivastava R. P., and Vedanti N. *Fractal Models in Exploration Geophysics: Applications to Hydrocarbon Reservoirs*. Oxford, UK: Elsevier Science & Technology, 2012. 184 p.
182. Ghanbarian B. and Hunt A. G., eds. *Fractals: Concepts and Applications in Geosciences*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2017. 351 p.
183. Scholz C. H. and Mandelbrot B. B., eds. *Fractals in Geophysics*. Basel: Birkhäuser, 1989. 314 p.
184. Лукк А. А., Дещеревский А. В., Сидорин А. Я., Сидорин И. А. *Вариации геофизических полей как проявление детерминированного хаоса в фрактальной среде*. Москва: ОИФЗ РАН, 1996. 200 с.
185. Baveye P., Parlange J.-Y., and Stewart B. A., eds. *Fractals in Soil Science*. Boca Raton: CRC Press, 1998. 377 p.
186. McNutt B. *The Fractal Structure of Data Reference: Applications to the Memory Hierarchy*. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publ., 2000. 132 p.
187. Farmer M. E. *Application of Chaos and Fractals to Computer Vision*. Sharjah: Bentham Sci. Publ. Ltd., 2014. 323 p.
188. Мандельброт Б., Хадсон Р. Л. *(Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах*. Москва: Издательский дом "Вильямс", 2006. 400 с.
189. Crilly A. J., Earnshaw R., and Jones H., eds. *Applications of Fractals and Chaos: The Shape of Things*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 277 p.
190. Mandelbrot B. B. and Hudson R. L. *The Misbehavior of Markets: A fractal View of Risk, Ruin and Reward*. New York: Basic Books, 2006. 300 p.
191. Eglash R. *African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design*. New Brunswick, NJ: Rutgers University Press, 1999. 258 p.
192. Batty M. and Longley P. *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function*. London, San Diego et al.: Academic Press, 1994. 394 p.
193. Bovill C. *Fractal Geometry in Architecture and Design*. Basel: Birkhäuser, 1996. 195 p.
194. Кулак М. И. *Фрактальная механика материалов*. Минск: Вышэйшая школа, 2002. 304 с.
195. Gardner M. *Fractal Music, Hypercards and more...: Mathematical Recreations from Scientific American Magazine*. New York: W. H. Freeman and Company, 1992. 327 p.
196. Encarnacao J. L., Peitgen H.-O., Sakas G., and Englert G., eds. *Fractal Geometry and Computer Graphics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. 257 p.
197. Frame M. and Urry A. *Fractal Worlds: Grown, Built, and Imagined*. New Haven, London: Yale University Press, 2016. 515 p.
198. Frantz M. and Crannell A. *Viewpoints: Mathematical Perspective and Fractal Geometry in Art*. Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2011. 232 p.
199. Николаева Е. В. *Фракталы городской культуры*. Санкт-Петербург: Страта, 2014. 264 с.
200. Marks-Tarlow T. *Psyche's Veil: Psychotherapy, Fractals and Complexity*. London, New York: Routledge, Taylor and Francis Group, 2008. 343 p.
201. Warnecke H.-J. *The Fractal Company: A Revolution in Corporate Culture*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 228 p.
202. Hoverstadt P. *The Fractal Organization: Creating sustainable organizations with the Viable System Model*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd., 2008. 320 p.
203. Robbins B. *Microscope: A Fractal Role-playing Game of Epic Histories*. New York: Lame Mage Productions, 2011. 80 p.
204. Král F. *Social Invisibility and Diasporas in Anglophone Literature and Culture: The Fractal Gaze*. Basingstoke, UK: Palgrave Macmillan, 2014. 230 p.
205. Ghosh B., Sinha S., and Kartikeyan M. V. *Fractal Apertures in Waveguides, Conducting Screens and Cavities: Analysis and Design*. Switzerland: Springer Int. Publ., 2014. 201 p.
206. Jadczyk A. *Quantum Fractals: From Heisenberg's Uncertainty to Barnsley's Fractality*. Hackensack, NJ; London, UK: World Scientific Publ., 2014. 345 p.
207. Федер Е. *Фракталы*. Москва: Мир, 1991. 254 с.
208. Li J. M., Lu L., Lai M. O., and Ralph B. *Image-Based Fractal Description of Microstructures*. New York: Springer, 2003. 272 p.
209. Mandelbrot B. B. Self-affine fractal sets. In: L. Pietronero and E. Tosatti, eds. *Fractals in Physics*. Amsterdam, Oxford et al.: North-Holland, 1986. P. 3–28.
210. Морозов А. Д. *Введение в теорию фракталов*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 160 с.
211. Falconer K. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Second Edition*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd., 2003. 337 p.
212. Falconer K. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Third Edition*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd., 2014. 398 p.
213. Falconer K. *Techniques in Fractal Geometry*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd., 1997. 274 p.
214. Fisher Y. *Fractal Image Compression: Theory and Application*. New York: Springer-Verlag, 1995. 342 p.
215. Mandelbrot B. B. *Multifractals and 1/f Noise: Wild Self-Affinity in Physics (1963–1976)*. New York: Springer-Verlag, 1999. 442 p.
216. Seuront L. *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2010. 344 p.
217. Goltz C. *Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. 182 p.
218. Пасынков Б. А., Федорчук В. В. *Топология и теория размерности*. Москва: Знание, 1984. 64 с.
219. Ефремович В. А. Основные топологические понятия. *Энциклопедия элементарной математики: Том 5. Геометрия*. Под ред. П. С. Александрова. Москва: Наука, 1966. С. 476–556.
220. Гуревич В., Волмэн Г. *Теория размерности*. Москва: Гос. из-во иностранной литературы, 1948. 231 с.

221. Edgar G. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. New York: Springer-Verlag, 2008. 272 p.
222. Чуличков А. И. *Математические методы нелинейной динамики*. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 296 с.
223. Le Méhauté A. *Fractal geometries: theory and applications*. Boca Raton: CRC Press, 1991. 200 p.
224. Devaney R. L. and Keen L., eds. *Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1989. 148 p.
225. Tricot C. Douze définitions de la densité logarithmique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1981. Vol. 293. P. 549–552.
226. Abry P., Gonçalves P., and Lévy Véhel J., eds. *Scaling, Fractals and Wavelets*. New York: John Wiley & Sons, 2009. 504 p.
227. Franceschetti G. and Riccio D. *Scattering, Natural Surfaces and Fractals*. New York: Elsevier, 2007. 289 p.
228. Пашенко Р. Э. *Основы теории формирования фрактальных сигналов*. Харьков: ХООО “НЭО Экоперспектива”, 2005. 296 с.
229. Короленко П. В., Маганова М. С., Меснянкин А. В. *Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования: Учебное пособие*. Москва: НИИЯФ МГУ, 2004. 82 с.
230. Малла С. *Вэйвлеты в обработке сигналов*. Москва: Мир, 2005. 671 с.
231. Prusinkiewicz P. and Hanan J. *Lindenmayer systems, Fractals, and Plants*. New York: Springer-Verlag, 1989. 122 p.
232. Feder J. *Fractals*. New York and London: Springer, 1988. 284 p.
233. Данилов Ю. А. *Лекции по нелинейной динамике: Элементарное введение*. Москва: КомКнига, 2006. 208 с.
234. Gulick D. and Scott J., eds. *The Beauty of Fractals: Six Different Views*. New York: The Mathematical Association of America Publ., 2010. 95 p.
235. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. *Нелинейная радиофизика: Сборник задач*. Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019. 168 с.
236. Mishra J. and Mishra S. N., eds. *L-System Fractals*. Amsterdam, Boston et al.: Elsevier, 2007. 258 p.
237. Barnsley M. F. and Demko S. Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1985. Vol. 399, Is. 1817. P. 243–275. DOI: 10.1098/rspa.1985.0057
238. Barnsley M. F., Elton J. H., and Hardin D. P. Recurrent Iterated Function Systems Fractal Approximation. *Constr. Approx.* 1989. Vol. 5, Is. 1. P. 3–31.
239. Barnsley M. F. *Superfractals*. New York: Cambridge University Press, 2006. 453 p.
240. Barnsley M. and Sloan A. A Better Way to Compress Images. *Byte*. 1988. Vol. 13, Is. 1. P. 215–223.
241. Welstead S. *Fractal and Wavelet Image Compression Techniques*. Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press, 1999. 232 p.
242. Barnsley M. F. *The Desktop Fractal Design Handbook*. Boston, San Diego et al.: Academic Press, 1989. 38 p.
243. Barnsley M., Hegland M., and Massopust P. Self-referential functions. *arXiv:1610.01369v1 [math.CA]*. 2016.
244. Massopust P. R. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. Amsterdam, Boston et al.: Academic Press, 2016. 405 p.
245. Levy Vehel J., Lutton E., and Tricot C., eds. *Fractals in Engineering: From Theory to Industrial Applications*. London: Springer-Verlag, 1997. 402 p.
246. Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., Maletsky E., Perciante T., and Yunker L. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities. Volume One*. New York: Springer-Verlag, 1991. 129 p.
247. Peitgen H.-O., Jürgens H., and Saupe D. *Fractals for the Classroom: Part Two. Complex Systems and Mandelbrot Set*. New York: Springer-Verlag, 1992. 500 p.
248. Katunin A. *A Concise Introduction to Hypercomplex Fractals*. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2017. 93 p.
249. Осташков В. Н. *Диалоги о фракталах*. Тюмень: ТюмГНГУ, 2011. 292 с.
250. Stoyan D. and Stoyan H. *Fractals, Random Shapes and Point Fields: Methods of Geometrical Statistics*. Chichester: John Wiley & Sons, 1994. 406 p.
251. Смирнов Б. М. *Физика фрактальных кластеров*. Москва: Наука, 1991. 136 с.
252. Family F. and Vicsek T., eds. *Dynamics of Fractal Surfaces*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ., 1991. 480 p.
253. Tong H., ed. *Dimension Estimation and Models*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ., 1993. 223 p.
254. Holschneider M. *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford: Calderon Press, 1995. 423 p.
255. Kolmogorov A. N. and Tikhomirov V. M. ε -entropy and ε -capacity of sets in function spaces. *Uspekhi Mat. Nauk.* 1959. Vol. 14, Is. 2(86). P. 3–86.
256. Minkowski H. Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 1901. Vol. 9, Is. 1. P. 115–121.
257. Bouligand G. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. *Bull. Sci. Math.* 1928. Vol. 52, Is. 2. P. 320–344, 361–376.
258. Lam L. *Nonlinear Physics for Beginners: Fractals, Chaos, Solitons, Pattern Formation, Cellular Automata and Complex Systems*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ., 1998. 338 p.
259. Helmbert G. *Getting Acquainted with Fractals*. Berlin: Walter de Gruyter, 2007. 177 p.
260. Falconer K. *Fractals: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2013. 153 p.
261. Kantz H. and Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis*. New York: Cambridge University Press, 2003. 369 p.
262. Hilborn R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. New York: Oxford University Press, 2000. 650 p.
263. Павлов А. Н. *Методы анализа сложных сигналов: Учебное пособие*. Саратов: Научная книга, 2008. 120 с.
264. Grassberger P. and Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D.* 1983. Vol. 9, Is. 1-2. P. 189–208. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90298-1
265. Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors. *Phys. Lett. A.* 1983. Vol. 97, Is. 6. P. 227–230. DOI: 10.1016/0375-9601(83)90753-3

266. Hentschel H. G. E. and Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*. 1983. Vol. 8, Is. 3. P. 435–444. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90235-X
267. Rényi A. On measures of entropy and information. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Vol. 1*. Univ. of Calif. Press, 1961. P. 547–561.
268. Becker K.-H. and Dörfler M. *Dynamical systems and fractals: Computer graphics experiments in Pascal*. New York: Cambridge University Press, 1989. 397 p.
269. Болотин Ю. Л., Тур А. В., Яновский В. В. *Конструктивный хаос*. Харьков: Институт монокристаллов, 2005. 420 с.
270. Черногор Л. Ф. *Нелинейная радиофизика. Учебник*. Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2010. 173 с.
271. Ильяшенко Ю. С. *Аттракторы и их фрактальная размерность*. Москва: МЦНМО, 2005. 16 с.
272. Sornette D. *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 528 p.
273. Ben-Avraham D. and Havlin S. *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 316 p.
274. Alexander S. and Orbach R. Density of states on fractals: “fractons”. *J. Phys. (Paris) Lett.* 1982. Vol. 43, Is. 17. P. 625–631.
275. Roy A. and Sood A. K. Fracton dimension of porous silicon as determined by low-frequency Raman scattering. *Solid State Commun.* 1995. Vol. 93, Is. 12. P. 995–998. DOI: 0.1016/0038-1098(94)00919-8
276. Mandelbrot B. Self-Affine Fractals and Fractal Dimension. *Phys. Scr.* 1985. Vol. 32, Is. 4. P. 257–260. DOI: 10.1088/0031-8949/32/4/001
277. Richardson L. F. The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels. *Gen. Syst.* 1961. Vol. 6. P. 139–187.
278. Mandelbrot B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*. 1967. Vol. 156, Is. 3775. P. 636–638. DOI: 10.1126/science.156.3775.636
279. Kaye B. H. *A Random Walk Through Fractal Dimensions*. Weinheim, New York et al.: VCH, 1994. 427 p.
280. Stone E. C. and Miner E. D. Voyager I Encounter with the Saturnian system. *Science*. 1981. Vol. 212, Is. 4491. P. 159–163. DOI: 10.1126/science.212.4491.159
281. Harter W. G. and Patterson C. W. Theory of hyperfine and superfine levels in symmetric polyatomic molecules. Trigonal and tetrahedral molecules: Elementary spin-1/2 cases in vibronic ground states. *Phys. Rev. A*. 1979. Vol. 19, Is. 6. P. 2277–2303. DOI: 10.1103/PhysRevA.19.2277
282. Yu F. T. S. and Jutamulia S., eds. *Optical Storage and Retrieval: Memory, Neural Networks, and Fractals*. New York, Basel, Hong Kong: Marsel Dekker, Ink., 1996. 325 p.
283. Окорочков В. А., Сандракова Е. В. *Фракталы в фундаментальной физике. Фрактальные свойства множества образования частиц и топология выборки*. Москва: МИФИ, 2009. 460 с.
284. Kroegeer H. Fractal geometry in quantum mechanics, field theory and spin systems. *Phys. Rep.* 2000. Vol. 323, Is. 2. P. 81–181. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00051-4
285. Nottale L. *Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ., 1993. 333 p.
286. Carpinteri A. and Mainardi F., eds. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Wien: Springer-Verlag, 1997. 348 p.
287. Sakai Y. and Vassilicos C., eds. *Fractal Flow Design: How to Design Bespoke Turbulence and Why*. New York: Springer Int. Publ., 2016. 177 p.
288. Cello G. and Malamud B. D., eds. *Fractal Analysis for Natural Hazards. Geological Society Special Publication No. 261*. London: Geological Society Publ., 2006. 172 p.
289. Смирнов Б. М. Фрактальный клубок – новое состояние вещества. *Успехи физических наук*. 1991. Т. 161, № 8. С. 141–153.
290. Anders A. *Cathodic Arcs: From Fractal Spots to Energetic Condensation*. New York: Springer-Verlag, 2008. 544 p.
291. Wornell G. *Signal Processing with Fractals: A Wavelet-Based Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall PTR, 1996. 177 p.
292. Громов Ю. Ю., Земской Н. А., Иванова О. Г., Лагутин А. В., Тютюнник В. М. *Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях: Учебное пособие*. Тамбов: Из-во ТГТУ: 2007. 107 с.
293. Maragos P. and Potamianos A. Fractal dimensions of speech sounds: Computation and application to automatic speech recognition. *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. Vol. 105, Is. 3. P. 1925–1932. DOI: 10.1121/1.426738
294. Могилевский Э. И. *Фракталы на Солнце*. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 152 с.
295. *Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов. Коллективная монография*. Под ред. Р. Э. Пашенко. Харьков: ХОО «НЭО “ЭкоПерспектива”», 2006. 348 с.
296. Шелухин О. И., Тенякшев А. В., Осин А. В. *Фрактальные процессы в телекоммуникациях: Монография*. Под ред. О. И. Шелухина. Москва: Радиотехника, 2003. 480 с.
297. Nottale L. *Scale Relativity and Fractal Space-Time: A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics*. London: Imperial College Press, 2011. 742 p.
298. Vrobel S. *Fractal Time: Why a Watched Kettle Never Boils*. Singapore: World Scientific Publ., 2011. 297 p.
299. Parisi G. and Frisch U. On the singularity structure of fully developed turbulence. In: M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, eds. *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Amsterdam, New York: North-Holland Publ. Co., 1985. P. 84–87.
300. Boffetta G., Mazzino A., and Vulpiani A. Twenty-five years of multifractals in fully developed turbulence: a tribute to Giovanni Paladin. *J. Phys. A*. 2008. Vol. 41, Is. 36. id. 363001. DOI: 10.1088/1751-8113/41/36/363001
301. Benzi R., Paladin G., Parisi G., and Vulpiani A. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys. A*. 1984. Vol. 17, Is. 18. P. 3521–3531. DOI: 10.1088/0305-4470/17/18/021
302. Laherrère J. Distributions de type “fractal parabolique” dans la Nature. [“Parabolic fractal” distributions in Nature]. *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1996. Vol. 322, Series II a. P. 535–542.

303. Forriez M. and Marthin P. Structures hierarchiques en geographie: des modeles lineaires aux modeles non lineaires (lois de puissance et corrections log-periodiques). *Huitièmes Rencontres de ThéoQuant des 10–12 janvier 2007 à Besançon, France*. Besançon, France, 2007. P. 192–195.
304. Божокин С. В., Паршин Д. А. *Фракталы и мультифракталы*. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 128 с.
305. Harte D. *Multifractals. Theory and Applications*. Boca Raton, London et al.: Chapman & Hall/CRC Press, 2001. 248 p.
306. Барьяхтар В. Г., Гончар В. Ю., Яновский В. В. Природа сложной структуры пятна загрязнений радионуклидами в результате аварии на ЧАЭС. *Украинский физический журнал*. 1993. Т. 38, № 15. С. 967–975.
16. SAICHEV, A. I. and WOYCZYNSKI, W. A., 1997. *Distributions in the Physical and Engineering Sciences: Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets*. Boston: Birkhäuser.
17. GIL’MUTDINOV, A. K., USHAKOV, P. A. and EL-KHARAZI, R., 2017. *Fractal Elements and their Applications*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ.
18. GIL’MUTDINOV, A. K., ed., 2010. *Fractals and Fractional Operators*. Kazan, Russia: Fan Publ. of Academy of Sciences of RT. (in Russian).
19. NAKAYAMA, T. and YAKUBO, K., 2010. *Fractal Concepts in Condensed Matter Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
20. ПОТАПОВ, А. А., 2002. *Fractals in Radio Physics and Radar*. Moscow, Russia: Logos Publ. (in Russian).
21. ПОТАПОВ, А. А., 2005. *Fractals in Radio Physics and Radar. Sample Topology*. Moscow, Russia: Universitetskaya Kniga Publ. (in Russian).
22. TURBIN, A. F. and PRATSEVITYI, N. V., 1992. *Fractal Sets, Functions, Distributions*. Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka Publ. (in Russian).
23. ZEL’DOVICH, YA. B. and SOKOLOV, D. D., 1985. Fractals, Self-Similarity, Intermediate Asymptotic. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. vol. 146, is. 3, pp. 493–506. (in Russian).
24. PEINTGEN, H.-O. and SAUPE, D., eds., 1988. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag.
25. MANDELBROT, B., 1989. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Parise: Flammarion.
26. MANDELBROT, B. B., 1977. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.
27. MANDELBROT, B. B., 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company.
28. MANDELBROT, B., 2010. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Paris: Flammarion.
29. MANDELBROT, B. B., 2002. *The Fractal Geometry of Nature*. Moscow, Russia: Institut komp’yuternykh issledovaniy Publ. (in Russian).
30. BARYSHEV, Y. and TEERIKORPI, P., 2002. *Discovery of Cosmic Fractals*. New Jersey: World Scientific Publ.
31. CROWNOVER, R. M., 1995. *Introduction to Fractals and Chaos*. Boston: Jones and Bartlett Publ.
32. CROWNOVER, R. M., 2000. *Fractals and chaos in dynamic systems. Fundamentals of theory*. Moscow, Russia: Postmarket Publ. (in Russian).
33. BULAT, A. F. and DYRDA, V. I., 2005. *Frcatals in Geomechanics*. Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka Publ. (in Russian).
34. HAUSDORFF, F., 1918. Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.* vol. 79, is. 1-2, pp. 157–179. DOI: 10.1007/BF01457179
35. THIM, J., 2003. *Continuous Nowhere Differentiable Functions. Master’s Thesis*. Lulea, Sweden: Lulea University of Technology Publ.
36. MASSOPUST, P. R., 1994. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. San Diego, New York et al.: Academic Press.
37. BANDT, C., BARNSLEY, M., DEVANEY, R., FALCONER, K. J., KANNAN, V. and VINOD KUMAR, P. B., eds., 2014. *Fractals, Wavelets and their Applications: Con-*

- tributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). Switzerland: Springer Int. Publ.
38. DU BOIS-REIMOND, P. 1875. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. vol. 79, pp. 21–37.
 39. POTAPOV, A. A., GULYAEV, Yu. V., NIKITOV, S. A., PAKHOMOV, A. A. and GERMAN, V. A., 2008. *The Newest Methods of Image Processing*. Moscow, Russia: FIZMATLIT Publ. (in Russian).
 40. CELLÉRIER, M. C., 1890. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Darboux Bull.* vol. 14, pp. 142–160.
 41. BRZHECHKA, V. F., 1949. About Bolzano (On the centenary of the death of the Czech mathematician Bernard Bolzano). *Uspekhi matematicheskikh nauk*. vol. 4, is. 2(30), pp. 15–21. (in Russian).
 42. MOON, F., 1990. *Chaotic Oscillations: An Introductory Course for Scientists and Engineers*. Moscow, Russia: Mir Publ. (in Russian).
 43. MCCAULEY, J. L., 1993. *Chaos, Dynamics and Fractals*. Cambridge: Cambridge University Press.
 44. LASOTA, A. and MACKEY, M. C., 1994. *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
 45. KUZNETSOV, S. P., 2001. *Dynamical Chaos*. Saratov, Russia: Saratov State University Publ. (in Russian).
 46. MOON, F. C., 2004. *Chaotic and Fractal Dynamics. An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag.
 47. MOON, F. C., 2004. *Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. New Jersey: Wiley-Interscience.
 48. MANDELBROT, B. B., 2004. *Fractals and Chaos. The Mandelbrot Sets and Beyond*. New York: Springer-Verlag.
 49. PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. and SAUPE, D., 2004. *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Second Edition*. New York: Springer-Verlag.
 50. SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W., 2004. *Chaos. Bifurcations and Fractals Around Us. A Brief Introduction*. New Jersey: World Scientific Publ.
 51. GRINCHENKO, V. V., MATSYUPURA, V. T. and SNARSKYI, A. A., 2010. *Introduction to Nonlinear Dynamics. Chaos and Fractals*. Moscow, Russia: LKI Publ. (in Russian).
 52. FELDMAN, D. P., 2012. *Chaos and Fractals. An Elementary Introduction*. Oxford: Oxford University Press.
 53. PICKOVER, C. A., ed., 1998. *Chaos and Fractals: A Computer Graphical Journey. Ten Year Compilation of Advanced Research*. Amsterdam, Lausanne et al.: Elsevier.
 54. GULICK, D., 2012. *Encounters with Chaos and Fractals*. College Park, USA: University of Maryland Publ.
 55. CRILLY, A. J., EARNSHAW, R. A. and JONES, H., eds., 1991. *Fractals and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
 56. PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H., SAUPE, D., MALETSKY, E., PERCIANTE, T. and YUNKER, L., 1992. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities. Volume Two*. New York: Springer-Verlag.
 57. PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. and SAUPE, D., 1992. *Fractals for the Classroom. Part One. Introduction to Fractals and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
 58. SCHEINERMAN, E. R., 1995. *Invitation to Dynamical Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
 59. LESNE, A., 1995. *Méthodes de renormalisation: Phénomènes critiques – Chaos – Structures fractales*. Paris: Eyrolles Sciences.
 60. KLAGES, R., 2007. *Microscopic Chaos, Fractals and Transport in Nonequilibrium Statistical Mechanics*. New Jersey, London et al.: World Scientific Publ.
 61. MELIN, P. and CASTILLO, O., 2002. *Modelling, Simulation and Control of Non-linear Dynamical Systems: An Intelligent Approach Using Soft Computing and Fractal Theory*. Boca Raton, London et al.: Taylor and Francis Publ.
 62. KIVOTIDES, D., 2012. The Impact of Kinematic Simulations on Quantum Turbulence Theory. In: F. C. G. A. NICOLLEAU, C. CAMBON, J.-M. REDONDO, J. C. VASSILICOS, M. REEKS and A. F. NOWAKOWSKI, eds. *New Approaches in Modeling Multiphase Flows and Dispersion in Turbulence, Fractal Methods and Synthetic Turbulence*. Dordrecht, Heidelberg et al.: Springer, pp. 1–8.
 63. GAPONOV-GREKHOV, A. V. and RABINOVICH, M. I., 1992. *Nonlinearities in Action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
 64. LESNE, A., 1998. *Renormalization Methods: Critical Phenomena, Chaos, Fractal Structures*. Chichester: John Wiley & Sons.
 65. CASTILLO, O. and MELIN, P., 2003. *Soft Computing and Fractal Theory for Intelligent Manufacturing*. Heidelberg: Physica-Verlag.
 66. FLAKE, G. W., 1998. *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*. Cambridge, MA: MIT Press.
 67. SCHROEDER, M., 1991. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite*. New York: W. H. Freeman and Company.
 68. SCHROEDER, M., 2001. *Fractals, Chaos, Power Laws. Endless Paradise Miniatures*. Izhevsk, Russia: NITS “Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika” Publ. (in Russian).
 69. PEANO, G., 1890. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Math. Ann.* vol. 36, no. 1, pp. 157–160. (in French). DOI: 10.1007/BF01199438
 70. VON KOCH, H., 1904. Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik Astronomy, och Fisyc.* vol. 1, pp. 681–702.
 71. SMITH, H. J. S., 1874. On the integration of discontinuous functions. *Proc. London Math. Soc.*, vol. s1-6, is. 1, pp. 140–153. DOI: 10.1112/plms/s1-6.1.140
 72. DU BOIS-REYMOND, P., 1880. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung. *Math. Ann.* vol. 16, is. 1, pp. 115–128. DOI: 10.1007/BF01459233
 73. VOLTERRA, V., 1881. Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue [Some observations on point-wise discontinuous function]. *Giornale di Matematiche*. vol. 19, pp. 76–86. (in Italian).
 74. CANTOR, G., 1883. Über unendliche, lineare Punktmanigfaltigkeiten V. [On infinite, linear point-manifolds (sets), Part 5]. *Math. Ann.*, vol. 21, is. 4, pp. 545–591. (in German). DOI: 10.1007/BF01446819
 75. PERRIN, J., 1909. Movement brownien et réalité moléculaires. *Annales de chimie et de physique*. vol. 18, no. 8, pp. 5–114.

76. PERRIN, J., 1913. *Les Atomies*. Paris: Librairie Feléx Alcan.
77. GAZALE, M., 2002. *Gnomon. From Pharaohs to Fractals*. Moscow-Izhevsk, Russia: Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ. (in Russian).
78. BARNESLEY, M. F., 1988. *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press Publ.
79. FAUVEL, J., FLOOD, R. and WILSON, R., eds., 2006. *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*. Oxford: Oxford University Press.
80. MANDELBROT, B. B., 1997. *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. Selecta Volume E*. New York: Springer-Verlag.
81. YANOVSKY, V. V., 2003. The Emergence of a New Paradigm in Physics. *Universitates*. no. 3, pp. 32–47. (in Russian).
82. YANOVSKY, V. V., 2006. *Lectures on Nonlinear Phenomena. Volume I*. Kharkiv, Ukraine: Institut monokristallov Publ. (in Russian).
83. LOSA, G. A., MERLINI, D., NONNENMACHER, T. F. and WEIBEL, E. R., eds., 2005. *Fractals in Biology and Medicine. Volume IV*. Basel: Birkhäuser Verlag.
84. MANDELBROT, B., 2004. *Fractals, Case and Finance*. Moscow-Izhevsk, Russia: NITS “Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika” Publ. (in Russian).
85. PEINTGEN, H.-O. and RICHTER, P. H., 1993. *The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamic Systems*. Moscow, Russia: Mir Publ. (in Russian).
86. MANDELBROT, B., 2009. *Fractals and Chaos. Mandelbrot Sets and Other Wonders*. Moscow-Izhevsk, Russia: Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ. (in Russian).
87. DEMENOK, S. L., 2012. *Just Fractal*. St. Petersburg, Russia: Strata Publ. (in Russian).
88. WICKS, K. R., 1991. *Fractals and Hyperspaces*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
89. BANDT, C., GRAF, S. and ZÄHLE, M., eds., 1995. *Fractal Geometry and Stochastics*. Basel: Birkhäuser Verlag.
90. BANDT, C., FALCONER, K. and ZÄHLE, M., eds., 2015. *Fractal Geometry and Stochastics V*. Basel: Birkhäuser Verlag.
91. BANDT, C., GRAF, S. and ZÄHLE, M., eds., 2000. *Fractal Geometry and Stochastics II*. Basel: Birkhäuser Verlag.
92. BANDT, C., MOSKO, U. and ZÄHLE, M., eds., 2004. *Fractal Geometry and Stochastics III*. Basel: Birkhäuser Verlag.
93. PRZYTYCKI, F. and URBAŃSKI, M., 2010. *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*. Cambridge: Cambridge University Press.
94. BLEI, R., 2001. *Analysis in Integer and Fractional Dimensions*. Cambridge: Cambridge University Press.
95. KIGAMI, J., 2001. *Analysis on Fractals*. Cambridge: Cambridge University Press.
96. LOWEN, S. B. and TEICH, M. C., 2005. *Fractal-Based Point Processes*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
97. LÉVY-VÉHEL, J. and LUTTON, E., eds., 2005. *Fractals in Engineering. New Trends in Theory and Applications*. London: Springer-Verlag.
98. AFRAIMOVICH, V., UGALDE, E. and URIAS, J., 2006. *Fractal Dimensions for Poincare Recurrences, Volume 2*. Amsterdam: Elsevier.
99. JORGENSEN, P. E. T., 2006. *Analysis and Probability: Wavelets, Signals, Fractals*. New York: Springer-Verlag.
100. LAPIDUS, M. L. and VAN FRANKENHUIJSEN, M., 2013. *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions: Geometry and Spectra of Fractal Strings*. New York: Springer-Verlag.
101. LIPSCOMB, S. L., 2009. *Fractals and Universal Spaces in Dimension Theory*. New York: Springer-Verlag.
102. BARRAL, J. and SEURET, S., eds., 2010. *Recent Developments in Fractals and Related Fields*. Boston: Birkhäuser.
103. ROSENBERG, E., 2018. *A Survey of Fractal Dimensions of Networks*. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ.
104. KIRILLOV, A. A., 2013. *A Tale of Two Fractals*. Basel: Birkhäuser.
105. LINDSTRØM, T., 1990. Brownian Motion on Nested Fractals. *Mem. Am. Math. Soc.* vol. 83, no. 420, pp. 1–128. DOI: 10.1090/memo/0420
106. CHEN, G. and HUANG, Y., 2011. *Chaotic Maps. Dynamics, Fractals, and Rapid Fluctuations*. San Rafael, USA: Morgan and Claypool Publ.
107. EDGAR, G. A., ed., 2004. *Classics on Fractals*. Boulder: Westview Press.
108. MAZZOLA, G., MILMEISTER, G. and WEISSMANN, J., 2005. *Comprehensive Mathematics for Computer Scientists 2*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
109. WEINBERGER, S., 2005. *Computers, Rigidity, and Moduli. The Large-Scale Fractal Geometry of Riemannian Moduli Space*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
110. STRICHARTZ, R. S., 2006. *Differential Equations on Fractals. A Tutorial*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.
111. MAYER, V., SKORULSKI, B. and URBAŃSKI, M., 2011. *Distance Expanding Random Mappings, Thermodynamical Formalism, Gibbs Measures and Fractal Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
112. LAPIDUS, M. L. and VAN FRANKENHUIJSEN, M., eds., 2004. *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot. Part 1.: Analysis, Number Theory, and Dynamical Systems*. Providence, RI: American Mathematical Society Publ.
113. CARFI, D., LAPIDUS, M. L., PEARSE, E. P. J. and VAN FRANKENHUIJSEN, M., eds., 2013. *Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics II: Fractals in Applied Mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society Publ.
114. LAPIDUS, M. L. and VAN FRANKENHUIJSEN, M., 2000. *Fractal Geometry and Number Theory: Complex Dimensions of Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions*. Basel: Birkhäuser.
115. LAPIDUS, M., RADUNOVIĆ, G. and ŽUBRINIĆ, D., 2017. *Fractal Zeta Functions and Fractal Drums: Higher-Dimensional Theory of Complex Dimensions*. New York: Springer Int. Publ.
116. TRIEBEL, H., 1997. *Fractals and Spectra: Related to Fourier Analysis and Function Spaces*. Basel: Birkhäuser.
117. GRABNER, P. and WOESS, W., eds., 2003. *Fractals in Graz 2001: Analysis – Dynamics – Geometry – Stochastics*. Basel: Birkhäuser.

118. BISHOP, C. J. and PERES, Y., 2016. *Fractals in Probability and Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
119. DAVID, G. and SEMMES, S., 1997. *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self-Similar Geometry through Metric and Measure*. Oxford: Clarendon Press.
120. BARRAL, J. and SEURET, S., eds., 2013. *Further developments in fractals and related fields: mathematical foundations and connections*. Basel: Birkhäuser.
121. FENG, D.-J. and LAU, K.-S., eds., 2014. *Geometry and Analysis of Fractals: Hong Kong, December 2012*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
122. MATTILA, P., 1995. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge: Cambridge University Press.
123. SU, W., 2018. *Harmonic Analysis and Fractal Analysis over Local fields and Applications*. Singapore: World Scientific Publ.
124. PESIN, Y. and CLIMENHAGA, V., 2009. *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*. New York: American Mathematical Society Publ.
125. YAMAGUTI, M., HATA, M., KIGAMI, J. and HUDSON, K., 1997. *Mathematics of Fractals*. Providence, RI: American Mathematical Society Publ.
126. LI, C., WU, Y. and YE, R., eds., 2013. *Recent Advances in Applied Nonlinear Dynamics with Numerical Analysis: Fractional Dynamics, Network Dynamics, Classical Dynamics and Fractal Dynamics with their Numerical Simulations*. Singapore: World Scientific Publ.
127. DOBRUSHIN, R. L. and KUSUOKA, S., 1993. *Statistical Mechanics and Fractals*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
128. FALCONER, K. J., 1986. *The geometry of fractal sets*. Cambridge: Cambridge University Press.
129. KALMYKOV, Y. P., COFFEE, W. T. and RICE, S. A., eds., 2006. *Fractals, Diffusion, and Relaxation in Disordered Complex Systems: Advances in Chemical Physics, Part A, Volume 133*. New Jersey: Wiley-Interscience.
130. KOZLOV, G. V. and YANOVSKII, YU. G., 2015. *Fractal mechanics of polymers: chemistry and physics of complex polymeric materials*. Toronto: Apple Academic Press.
131. BURDE, A. and HAVLIN, S., eds., 1996. *Fractals and Disordered Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
132. TAKAYASU, H., 1990. *Fractals in the physical sciences*. Manchester, New York: Manchester University Press.
133. PIETRONERO, L. and TOSATTI, E., eds., 1986. *Fractals in Physics*. Amsterdam, Oxford et al.: North-Holland.
134. AMANN, A., CEDERBAUM, L. and GANS, W., eds., 1988. *Fractals, Quasicrystals, Chaos, Knots and Algebraic Quantum Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
135. MEAKIN, P., 1998. *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium*. Cambridge: Cambridge University Press.
136. PIETRONERO, L., ed., 1989. *Fractals' Physical Origin and Properties*. New York: Springer Science.
137. STAUFFER, D. and STANLEY, H. E., 1996. *From Newton to Mandelbrot: A Primer in Theoretical Physics with Fractals for the Macintosh (R)*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
138. STANLEY, H. E. and OSTROWSKY, N., eds. 1986. *On Growth and Form: Fractal and Non-fractal Patterns in Physics*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers.
139. PICKOVER, C. A., ed., 1995. *The Pattern Book: Fractals, Art and Nature*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ.
140. NOVAK, M. M., ed., 2004. *Thinking in Patterns. Fractals and Related Phenomena in Nature*. New Jersey, London et al.: World Scientific Publ.
141. HECK, A. and PERDANG, J. M., eds., 1991. *Applying Fractals in Astronomy*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
142. LESMOIR-GORDON, N., ed., 2010. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. London: Springer-Verlag.
143. LUNG, C. W. and MARCH, N. H., 1999. *Mechanical Properties of Metals: Atomistic and Fractal Continuum Approaches*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ.
144. AI-AKAIDI, M., 2004. *Fractal Speech Processing*. Cambridge: Cambridge University Press.
145. BARNSELY, M. F., SAUPE, D. and VRSCAY, E. R., eds., 2002. *Fractals in Multimedia*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
146. BUNDE, A. and HAVLIN, S., eds., 1994. *Fractals in Science*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
147. ADDISON, P. S., 1997. *Fractals and Chaos. An Illustrated Course*. Bristol, Philadelphia: IOP Publishing Ltd.
148. BIRDI, K. S., 1993. *Fractals in Chemistry, Geochemistry, and Biophysics: An Introduction*. New York: Springer Science.
149. KOZLOV, G. V., DOBLIN, I. V. and ZAIKOV, G. E., 2013. *The Fractal Physical Chemistry of Polymer Solutions and Melts*. Toronto, New Jersey: Apple Academic Press.
150. KOZLOV, G. V., MIKITAIEV, A. K. and ZAIKOV, G. E., 2013. *The Fractal Physics of Polymer Synthesis*. Toronto, New Jersey: Apple Academic Press.
151. KAANDORP, J. A., 1994. *Fractal Modelling, Growth and Form in Biology*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
152. LIEBOVITCH, L. S., 1998. *Fractals and Chaos: Simplified for the Life Sciences*. Oxford: Oxford University Press.
153. ISAYEVA, V. V., KARETIN, YU. A., CHERNYSHOV, A. V. and SHKURATOV, D. YU., 2004. *Fractals and Chaos in Biological Morphogenesis*. Vladivostok, Russia: Institut biologii morya DVO RAN Publ. (in Russian).
154. DI IEVA, A., ed., 2016. *The Fractal Geometry of the Brain*. New York: Springer-Verlag.
155. BRAMBILA, F., ed., 2017. *Fractal Analysis. Applications in Health Sciences and Social Sciences*. Rijeka, Croatia: InTech.
156. SADANA, A., 2005. *Fractal Binding and Dissociation Kinetics for Different Biosensor Applications*. Amsterdam, Boston et al.: Elsevier.
157. BASSINGTHWAIGHTE, J. B., LIEBOVICH, L. S. and WEST, B. J., 1994. *Fractal Physiology*. Oxford, New York et al.: Oxford University Press.
158. WEST, B. J., 2013. *Fractal Physiology and Chaos in Medicine*. Singapore: World Scientific Publ.
159. WEST, B., 2010. Fractal Physiology and the Fractional Calculus: A Perspective. *Front. Physiol.* vol. 1, id. 12. DOI: 10.3389/fphys.2010.00012
160. KUMAR, D., ARJUNAN, S. P. and ALIAHMAD, B., 2017. *Fractals: Application in Biological Signalling and Image Processing*. Boca Raton: CRC Press.

161. NONNENMACHER, T. F., LOSA, G. A. and WEIBEL, E. R., eds., 1994. *Fractals in Biology and Medicine*. Basel: Birkhäuser.
162. LOSA, G. A., MERLINI, D., NONNENMACHER, T. F. and WEIBEL, E. R., eds., 2002. *Fractals in Biology and Medicine. Volume 3*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.
163. TAKAHASHI, T., 2014. *Microcirculation in Fractal Branching Networks*. Japan: Springer.
164. DEWEY, T. G., 1997. *Fractals in Molecular Biophysics*. Oxford, New York: Oxford University Press.
165. SENESI, N. and WILKINSON, K. J., eds., 2008. *Biophysical Chemistry of Fractal Structures and Processes in Environmental Systems*. New York: John Wiley & Sons Inc.
166. SADANA, A., 2003. *Biosensors: Kinetic of Binding and Dissociation Using Fractal* Amsterdam: Elsevier.
167. SADANA, A. and SADANA, N., 2008. *Fractal Analysis of the Binding and Dissociation Kinetics for Different Analytes on biosensor Surfaces*. Amsterdam: Elsevier.
168. BANERJI, A., 2013. *Fractal Symmetry of Protein Exterior*. Basel: Springer.
169. ADDISON, P. S., 2002. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook. Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*. Bristol, Philadelphia: IOP Publishing Ltd.
170. IONESCU, C. M., 2013. *The Human Respiratory System: An Analysis of the Interplay between Anatomy, Structure, Breathing and Fractal Dynamics*. London: Springer-Verlag.
171. BARABÁSI, A.-L. and STANLEY, H. E., 1995. *Fractal Concept in Surface Growth*. Cambridge: Cambridge University Press.
172. QUADFEUL, S.-A., ed., 2012. *Fractal Analysis and Chaos in Geosciences*. Rijeka, Croatia: InTech Press.
173. TURCOTTE, D. L., 1997. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press.
174. KRUHL, J. Y., ed., 1994. *Fractals and Dynamic Systems in Geoscience*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
175. BARTON, C. C. and LA POINTE, P. R., eds., 1995. *Fractals in Petroleum Geology and Earth Processes*. Boston, MA: Springer.
176. BARTON, C. C. and LA POINTE, P. R., eds., 1995. *Fractals in the Earth Sciences*. New York: Springer.
177. DAUPHINÉ, A., 2012. *Fractal Geography*. London, Hoboken: John Wiley & Sons.
178. CHANDRASEKHAR, E., DIMRI, V. P. and GARDE, V. M., eds., 2014. *Wavelets and Fractals in Earth System Sciences*. Boca Raton, London, New York: CRC Press.
179. DIMRI, V. P., 2016. *Fractal Solutions for Understanding Complex Systems in Earth Sciences*. Cham, Heidelberg, at al.: Springer Int. Publ.
180. DIMRI, V. P., ed., 2005. *Fractal Behavior of the Earth System*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
181. DIMRI, V. P., SRIVASTAVA, R. P. and VEDANTI, N., 2012. *Fractal Models in Exploration Geophysics: Applications to Hydrocarbon Reservoirs*. Oxford, UK: Elsevier Science & Technology.
182. GHANBARIAN, B. and HUNT, A. G., eds., 2017. *Fractals: Concepts and Applications in Geosciences*. Boca Raton, London, New York: CRC Press.
183. SCHOLZ, C. H. and MANDELBROT, B. B., eds., 1989. *Fractals in Geophysics*. Basel: Birkhäuser.
184. LUKK, A. A., DESHCHEREVSKIY, A. V., SIDORIN, A. YA. and SIDORIN, I. A., 1996. *Variations of Geophysical Fields as a Manifestation of Deterministic Chaos in a Fractal Medium*. Moscow, Russia: OIFZ RAN Publ. (in Russian).
185. BAVEYE, P., PARLANGE, J.-Y. and STEWART, B. A., eds., 1998. *Fractals in Soil Science*. Boca Raton: CRC Press.
186. MCNUTT, B., 2000. *The Fractal Structure of Data Reference: Applications to the Memory Hierarchy*. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publ.
187. FARMER, M. E., 2014. *Application of Chaos and Fractals to Computer Vision*. Sharjah: Bentham Sci. Publ. Ltd.
188. MANDELBROT, B. and HUDSON, R. L., 2006. *(Un)obedient Markets: a Fractal Revolution in Finance*. Moscow, Russia: Vil'yams Publ. (in Russian).
189. CRILLY, A. J., EARNSHOW, R. and JONES, H., eds., 1993. *Applications of Fractals and Chaos: The Shape of Things*. Heidelberg: Springer-Verlag.
190. MANDELBROT, B. B. and HUDSON, R. L., 2006. *The Misbehavior of Markets. A fractal View of Risk, Ruin and Reward*. New York: Basic Books.
191. EGLASH, R., 1999. *African Fractals. Modern Computing and Indigenous Design*. New Brunswick, NJ: Rutgers University Press.
192. BATTY, M. and LONGLEY, P., 1994. *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function*. London, San Diego et al.: Academic Press.
193. BOVILL, C., 1996. *Fractal Geometry in Architecture and Design*. Basel: Birkhäuser.
194. KULAK, M. I., 2002. *Fractal Mechanics of Materials*. Minsk, Belarus: Vysheyschaya shkola Publ. (in Russian).
195. GARDNER, M., 1992. *Fractal Music, Hypercards and more...: Mathematical Recreations from Scientific American Magazine*. New York: W. H. Freeman and Company.
196. ENCARNACAO, J. L., PEITGEN, H.-O., SAKAS, G. and ENGLERT, G., eds., 1992. *Fractal Geometry and Computer Graphics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
197. FRAME, M. and URRY, A., 2016. *Fractal Worlds: Grown, Built, and Imagined*. New Haven, London: Yale University Press.
198. FRANTZ, M. and CRANNELL, A., 2011. *Viewpoints: Mathematical Perspective and Fractal Geometry in Art*. Princeton, Oxford: Princeton University Press.
199. NIKOLAYEVA, E. V., 2014. *Fractals of Urban Culture*. St. Petersburg, Russia: Strata Publ.
200. MARKS-TARLOW, T., 2008. *Psyche's Veil. Psychotherapy, Fractals and Complexity*. London, New York: Routledge, Taylor and Francis Group.
201. WARNECKE, H.-J., 1993. *The Fractal Company: A Revolution in Corporate Culture*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
202. HOVERSTADT, P., 2008. *The Fractal Organization: Creating sustainable organizations with the Viable System Model*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.
203. ROBBINS, B., 2011. *Microscope: A Fractal Role-playing Game of Epic Histories*. New York: Lame Mage Productions.

204. KRÁL, F., 2014. *Social Invisibility and Diasporas in Anglophone Literature and Culture: The Fractal Gaze*. Basingstoke, UK: Palgrave Macmillan.
205. GHOSH, B., SINHA, S. and KARTIKEYAN, M. V., 2014. *Fractal Apertures in Waveguides, Conducting Screens and Cavities: Analysis and Design*. Switzerland: Springer Int. Publ.
206. JADCZYK, A., 2014. *Quantum Fractals: From Heisenberg's Uncertainty to Barnsley's Fractality*. Hackensack, NJ; London, UK: World Scientific Publ.
207. FEDER, J., 1991. *Fractals*. Moscow, Russia: Mir Publ. (in Russian).
208. LI, J. M., LU, L., LAI, M. O. and RALPH, B., 2003. *Image-Based Fractal Description of Microstructures*. New York: Springer.
209. MANDELBROT, B. B., 1986. Self-affine fractal sets. In: L. PIETRONERO and E. TOSATTI, eds. *Fractals in Physics*. Amsterdam, Oxford et al.: North-Holland, pp. 3–28.
210. MOROZOV, A. D., 2002. *Introduction in Fractal Theory*. Moscow–Izhevsk, Russia: Institut komp'yuternikh issledovaniy Publ. (in Russian).
211. FALCONER, K., 2003. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Second Edition*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.
212. FALCONER, K., 2014. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Third Edition*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.
213. FALCONER, K., 1997. *Techniques in Fractal Geometry*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd.
214. FISHER, Y., 1995. *Fractal Image Compression. Theory and Application*. New York: Springer-Verlag.
215. MANDELBROT, B. B., 1999. *Multifractals and 1/f Noise. wild self-Affinity in Physics (1963–1976)*. New York: Springer-Verlag.
216. SEURONT, L., 2010. *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science*. Boca Raton, London, New York: CRC Press.
217. GOLTZ, C., 1997. *Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
218. PASYNKOV, B. A. and FEDORCHUK, V. V., 1984. *Topology and Dimension Theory*. Moscow, Russia: Znaniye Publ. (in Russian).
219. EFREMOVICH, V. A., 1966. *Basic Topological Concepts*. In: P. S. ALEKSANDROV, ed. *Encyclopedia of Elementary Mathematics. Vol. 5. Geometry*. Moscow, Russia: Nauka Publ., pp. 476–556. (in Russian).
220. GUREVICH, V. and WALLMAN, G., 1948. *Dimension Theory*. Moscow, Russia: Inostrannaya Literatura Publ. (in Russian).
221. EDGAR, G., 2008. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. New York: Springer-Verlag.
222. CHULICHKOV, A. I., 2003. *Mathematical Methods of Nonlinear Dynamics*. Moscow, Russia: FIZMATLIT Publ.
223. LE MÉHAUTÉ, A., 1991. *Fractal geometries, theory and applications*. Boca Raton: CRC Press.
224. DEVANEY, R. L. and KEEN, L., eds., 1989. *Chaos and Fractals. The Mathematics Behind the Computer Graphics*. Providence, RI: American Mathematical Society Publ.
225. TRICOT, C., 1981. Douze définitions de la densité logarithmique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* vol. 293, pp. 549–552.
226. ABRY, P., GONÇALVES, P. and LÉVY VÉHEL, J., eds., 2009. *Scaling, Fractals and Wavelets*. New York: John Wiley & Sons.
227. FRANCESCHETTI, G. and RICCIO, D., 2007. *Scattering, Natural Surfaces and Fractals*. New York: Elsevier.
228. PASHCHENKO, R. E., 2005. *Fundamentals of the Theory of Fractal Signal Formation*. Kharkiv, Ukraine: NEO EkoPerspektiva Publ. (in Russian).
229. KOROLENKO, P. V., MAGANOVA, M. S. and MESNYANKIN, A. V., 2004. *Innovative Methods for the Analysis of Stochastic Processes and Structures in Optics. Fractal and Multifractal Methods, Wavelet Transforms. Tutorial*. Moscow, Russia: NIIyF MGU Publ. (in Russian).
230. MALLAT, S., 2005. *Wavelets in Signal Processing*. Moscow, Russia: Mir Publ. (in Russian).
231. PRUSINKIEWICZ, P. and HANAN, J., 1989. *Lindenmayer systems, Fractals, and Plants*. New York: Springer-Verlag.
232. FEDER, J., 1988. *Fractals*. New York and London: Springer.
233. DANILOV, YU. A., 2006. *Lectures on Nonlinear Dynamics: Elementary Introduction*. Moscow, Russia: KomKniga Publ. (in Russian).
234. GULICK, D. and SCOTT, J., eds., 2010. *The Beauty of Fractals: Six Different Views*. New York: The Mathematical Association of America Publ.
235. LAZORENKO, O. V. and CHERNOGOR, L. F., 2019. *Nonlinear Radiophysics: A Collection of Tasks*. Kharkiv, Ukraine: V. N. Karazin KhNU Publ. (in Russian).
236. MISHRA, J. and MISHRA, S. N., eds. 2007. *L-System Fractals*. Amsterdam, Boston et al.: Elsevier.
237. BARNSELEY, M. F. and DEMKO, S., 1985. Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals. *Proc. R. Soc. Lond. A.* vol. 399, is. 1817, pp. 243–275. DOI: 10.1098/rspa.1985.0057
238. BARNSELEY, M. F., ELTON, J. H. and HARDIN, D. P., 1989. Recurrent Iterated Function Systems Fractal Approximation. *Constr. Approx.* vol. 5, is. 1, pp. 3–31.
239. BARNSELEY, M. F., 2006. *Superfractals*. New York: Cambridge University Press.
240. BARNSELEY, M. and SLOAN, A., 1988. A Better Way to Compress Images. *Byte.* vol. 13, is. 1, pp. 215–223.
241. WELSTEAD, S., 1999. *Fractal and wavelet Image Compression Techniques*. Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press.
242. BARNSELEY, M. F., 1989. *The Desktop Fractal Design Handbook*. Boston, San Diego et al.: Academic Press.
243. BARNSELEY, M., HEGLAND, M. and MASSOPUST, P., 2016. Self-referential functions. *arXiv:1610.01369v1 [math.CA]*.
244. MASSOPUST, P. R., 2016. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. Amsterdam, Boston et al.: Academic Press.
245. LEVY VEHEL, J., LUTTON, E. and TRICOT, C., eds., 1997. *Fractals in Engineering: From Theory to Industrial Applications*. London: Springer-Verlag.
246. PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H., SAUPE, D., MALETSKY, E., PERCIANTE, T. and YUNKER, L., 1991. *Fractals for the Classroom: Strategic Activities. Volume One*. New York: Springer-Verlag.

247. PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. and SAUPE, D., 1992. *Fractals for the Classroom. Part Two. Complex Systems and Mandelbrot Set*. New York: Springer-Verlag.
248. KATUNIN, A., 2017. *A Concise Introduction to Hypercomplex Fractals*. Boca Raton, London, New York: CRC Press.
249. OSTASHKOV, V. N., 2011. *Fractal Dialogs*. Tyumen', Russia: TyumNGNU Publ. (in Russian).
250. STOYAN, D. and STOYAN, H., 1994. *Fractals, Random Shapes and Point Fields: Methods of Geometrical Statistics*. Chichester: John Wiley & Sons.
251. SMIRNOV, B. M., 1991. *Physics of Fractal Clusters*. Moscow, Russia: Nauka Publ. (in Russian).
252. FAMILY, F. and VICSEK, T., eds., 1991. *Dynamics of Fractal Surfaces*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ.
253. TONG, H., ed., 1993. *Dimension Estimation and Models*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ.
254. HOLSCHNEIDER, M., 1995. *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford: Calderon Press.
255. KOLMOGOROV, A. N. and TIKHOMIROV, V. M., 1959. ε -entropy and ε -capacity of sets in function spaces. *Uspekhi Mat. Nauk.* vol. 14, is. 2(86), pp. 3–86.
256. MINKOWSKI, H., 1901. Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. vol. 9, is. 1, pp. 115–121.
257. BOULIGAND, G., 1928. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. *Bull. Sci. Math.* vol. 52, is. 2, pp. 320–344, 361–376.
258. LAM, L., 1998. *Nonlinear Physics for Beginners. Fractals, Chaos, Solitons, Pattern Formation, Cellular Automata and Complex Systems*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ.
259. HELMBERG, G., 2007. *Getting Acquainted with Fractals*. Berlin: Walter de Gruyter.
260. FALCONER, K., 2013. *Fractals: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press.
261. KANTZ, H. and SCHREIBER, T., 2003. *Nonlinear Time Series Analysis*. New York: Cambridge University Press.
262. HILBORN, R. C., 2000. *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*. New York: Oxford University Press.
263. PAVLOV, A. N., 2008. *Complex Signal Analysis Methods: Study Guide*. Saratov, Russia: Nauchnaya kniga Publ. (in Russian).
264. GRASSBERGER, P. and PROCACCIA, I., 1983. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*. vol. 9, is. 1-2, pp. 189–208. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90298-1
265. GRASSBERGER, P., 1983. Generalized dimensions of strange attractors. *Phys. Lett. A*. vol. 97, is. 6, pp. 227–230. DOI: 10.1016/0375-9601(83)90753-3
266. HENTSCHEL, H. G. E. and PROCACCIA, I., 1983. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*. vol. 8, is. 3, pp. 435–444. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90235-X
267. RÉNYI, A., 1961. On measures of entropy and information. In: *Proceedings of the Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. Vol. 1*. Univ. of Calif. Press. pp. 547–561.
268. BECKER, K.-H. and DÖRFLER, M., 1989. *Dynamical Systems and Fractals. Computer Graphics Experiments in Pascal*. New York: Cambridge University Press.
269. BOLOTIN, YU. L., TUR, A. V. and YANOVSKY, V. V., 2005. *Constructive Chaos*. Kharkiv, Ukraine: Institut monokristallov Publ. (in Russian).
270. CHERNOGOR, L. F., 2010. *Nonlinear Radiophysics. Textbook*. Kharkiv, Ukraine: V. N. Karazin KhNU Publ. (in Russian).
271. IL'YASHENKO, YU. S., 2005. *Attractors and their Fractal Dimension*. Moscow, Russia: MTsNMO Publ.
272. SORNETTE, D., 2006. *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
273. BEN-AVRAHAM, D. and HAVLIN, S., 2004. *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.
274. ALEXANDER, S. and ORBACH, R., 1982. Density of states on fractals: “fractons”. *J. Phys. (Paris) Lett.* vol. 43, is. 17, pp. 625–631.
275. ROY, A. and SOOD, A. K., 1995. Fracton dimension of porous silicon as determined by low-frequency Raman scattering. *Solid State Commun.* vol. 93, is. 12, pp. 995–998. DOI: 0.1016/0038-1098(94)00919-8
276. MANDELROT, B., 1985. Self-Affine Fractals and Fractal Dimension. *Phys. Scr.* vol. 32, is. 4, pp. 257–260. DOI: 10.1088/0031-8949/32/4/001
277. RICHARDSON, L. F., 1961. The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels. *Gen. Syst.* vol. 6, pp. 139–187.
278. MANDELROT, B., 1967. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*. vol. 156, is. 3775, pp. 636–638. DOI: 10.1126/science.156.3775.636
279. KAYE, B. H., 1994. *A Random Walk Through Fractal Dimensions*. Weinheim, New York et al.: VCH.
280. STONE, E. C. and MINER, E. D., 1981. Voyager I Encounter with the Saturnian system. *Science*. vol. 212, is. 4491, pp. 159–163. DOI: 10.1126/science.212.4491.159
281. HARTER, W. G. and PATTERSON, C. W., 1979. Theory of hyperfine and superfine levels in symmetric polyatomic molecules. Trigonal and tetrahedral molecules: Elementary spin-1/2 cases in vibronic ground states. *Phys. Rev. A*. vol. 19, is. 6, pp. 2277–2303. DOI: 10.1103/PhysRevA.19.2277
282. YU, F. T. S. and JUTAMULIA, S., eds., 1996. *Optical Storage and Retrieval: Memory: Neural Networks, and Fractals*. New York, Basel, Hong Kong: Marsel Dekker, Ink.
283. OKOROKOV, V. A. and SANDRAKOVA, E. V., 2009. *Fractals in Fundamental Physics. Fractal Properties of Multiple Particle Formation and Sample Topology*. Moscow, Russia: MIFI Publ. (in Russian).
284. KROEGER, H., 2000. Fractal geometry in quantum mechanics, field theory and spin systems. *Phys. Rep.* vol. 323, is. 2, pp. 81–181. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00051-4
285. NOTTALE, L., 1993. *Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity*. Singapore, New Jersey et al.: World Scientific Publ.

286. CARPINTERI, A. and MAINARDI, F., eds., 1997. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Wien: Springer-Verlag.
287. SAKAI, Y. and VASSILICOS, C., eds., 2016. *Fractal Flow Design: How to Design Bespoke Turbulence and Why*. New York: Springer Int. Publ.
288. CELLO, G. and MALAMUD, B. D., eds., 2006. *Fractal Analysis for Natural Hazards. Geological Society Special Publication No. 261*. London: Geological Society Publ.
289. SMIRNOV, B. M., 1991. Fractal Tangle is a New State of Matter. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. vol. 161, is. 8, pp. 141–153. (in Russian).
290. ANDERS, A., 2008. *Cathodic Arcs: From Fractal Spots to Energetic Condensation*. New York: Springer-Verlag.
291. WORNELL, G., 1996. *Signal Processing with Fractals: A Wavelet-Based Approach*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall PTR.
292. GROMOV, YU. YU., ZEMSKOY, N. A., IVANOVA, O. G., LAGUTIN, A. V. and TYUTYUNIK, V. M., 2007. *Fractal Analysis and Processes in Computer Networks: Tutorial*. Tambov, Russia: TGTU Publ. (in Russian).
293. MARAGOS, P. and POTAMIANOS, A., 1999. Fractal dimensions of speech sounds: Computation and application to automatic speech recognition. *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 105, is. 3, pp. 1925–1932. DOI: 10.1121/1.426738
294. MOGILEVSKY, E. I., 2001. *Fractals on the Sun*. Moscow, Russia: FIZMATLIT Publ. (in Russian).
295. PASHCHENKO, R. E., ed., 2006. *Fractal Analysis of Processes, Structures and Signals. Collective Monograph*. Kharkiv, Ukraine: NEO EkoPerspektiva Publ. (in Russian).
296. SHELUKHIN, O. I., TENYAKSHEV, A. V. and OSIN, A. V., 2003. *Fractal Processes in Telecommunications. Monograph*. Moscow, Russia: Radiotekhnika Publ. (in Russian).
297. NOTTALE, L., 2011. *Scale Relativity and Fractal Space-Time: A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics*. London: Imperial College Press.
298. VROBEL, S., 2011. *Fractal Time: Why a Watched Kettle Never Boils*. Singapore: World Scientific Publ.
299. PARISI, G. and FRISCH, U., 1985. On the singularity structure of fully developed turbulence. In: M. GHIL, R. BENZI and G. PARISI, eds. *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Amsterdam, New York: North-Holland Publ. Co.
300. BOFFETTA, G., MAZZINO, A. and VULPIANI, A., 2008. Twenty-five years of multifractals in fully developed turbulence: a tribute to Giovanni Paladin. *J. Phys. A*. vol. 41, is. 36, id. 363001. DOI: 10.1088/1751-8113/41/36/363001
301. BENZI, R., PALADIN, G., PARISI, G. and VULPIANI, A., 1984. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. *J. Phys. A*. vol. 17, is. 18, pp. 3521–3531. DOI: 10.1088/0305-4470/17/18/021
302. LAHERRÈRE, J., 1996. Distributions de type “fractal parabolique” dans la Nature. [“Parabolic fractal” distributions in Nature]. *C. R. Acad. Sci. Paris*. vol. 322, series II a, pp. 535–542. (in French).
303. FORRIEZ, M. and MARTIN, P., 2007. Structures hiérarchiques en géographie: des modèles linéaires aux modèles non linéaires (lois de puissance et corrections log-périodiques). In: *Huitièmes Rencontres de ThéoQuant des 10–12 janvier 2007 à Besançon, France*. Besançon, France, 2007. pp. 192–195.
304. BOZHOKIN, S. V. and PARSHIN, D. A., 2001. *Fractals and Multifractals*. Izhevsk, Russia: NITs Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ. (in Russian).
305. HARTE, D., 2001. *Multifractals. Theory and Applications*. Boca Raton, London et al.: Chapman & Hall/CRC Press.
306. BARYAKHTAR, V. G., GONCHAR, V. YU. and YANOVSKY, V. V., 1993. Origin of complex structure of radionuclide contamination spot resulted from the accident at Chernobyl nuclear power plant. *Ukr. J. Phys.* vol. 38, is. 15, pp. 967–975. (in Russian).

O. V. Lazorenko and L. F. Chernogor

V. N. Karazin Kharkiv National University,
4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

FRACTAL RADIOPHYSICS. I. THEORETICAL BASES

Purpose: Currently, there is a tendency to “fractalize” the science. Radiophysics is no exception. The subject of this work is a review of the basic ideas of “fractalization”, the mathematical foundations of modern fractal methods for describing and exploring the world. The purpose of the work is to present the basic concepts, definitions and relationships of the modern theory of fractals, as well as the classification and analysis of existing numerical characteristics of fractals.

Design/methodology/approach: The methods of constructing geometric monofractals and multifractals are considered. A comparative characteristic of the methods for assessing the dimension of physical fractals is given. Examples of physical fractals are given.

Findings: In the development of the “fractalization” of science, 4 stages are distinguished: the era of “monsters”, the preparatory stage, the stage of formation and development, the modern stage. For the correct description of fractals, the Hausdorff–Besicovitch dimension, which can also take noninteger values, is used. The following fractal classifications are considered: mathematical and physical, geometric and algebraic, mono- and multifractals, regular and stochastic, homogeneous and heterogeneous. It has been demonstrated that the fractal dimension of objects can be both fractional and integer, it is important that the fractal dimension should be greater than their topological dimension. The equality of the fractal dimensions of two objects does not imply the similarity of their structure. When describing thick fractals as regular monofractals, instead of the Hausdorff–Besicovitch dimension, the scaling exponents are used.

Conclusions: The mathematical foundations of the theory of fractals, used in the modern theoretical radiophysics, are presented.

Key words: fractal, fractal dimension, fractal classification, monofractal, multifractal, multifractal formalism, types of dimension, scaling

О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
м. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

ФРАКТАЛЬНА РАДІОФІЗИКА. 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

Предмет і мета роботи: Нині спостерігається тенденція до “фракталізації” науки. Не є виключенням і радіофізика. Предметом цієї роботи є огляд основних ідей “фракталізації”, математичних основ сучасних фрактальних методів опису та дослідження навколишнього світу. Мета роботи – викладення основних понять, визначень і співвідношень сучасної теорії фракталів, а також класифікація й аналіз існуючих числових характеристик фракталів.

Методи та методологія: Розглянуто методи побудови геометричних монофракталів і мультифракталів. Дається порівняльна характеристика методів оцінки розмірності фізичних фракталів. Наводяться приклади фізичних фракталів.

Результати: У розвитку “фракталізації” науки виділено 4 етапи: епоха “монстрів”, підготовчий етап, етап становлен-

ня та розвитку, сучасний етап. Для коректного опису фракталів використовується розмірність Хаусдорфа–Безиковича, яка може набувати й нецілочислових значень. Розглянуто наступні класифікації фракталів: математичні та фізичні, геометричні й алгебраїчні, моно- та мультифрактали, регулярні та стохастичні, однорідні та неоднорідні. Продемонстровано, що фрактальна розмірність об’єктів може бути як дробовою, так і цілочисловою, важливо, щоб фрактальна розмірність була більше їх топологічної розмірності. З рівності фрактальної розмірності двох об’єктів не випливає подібності їх структури. При описі товстих фракталів як регулярних монофракталів замість розмірності Хаусдорфа–Безиковича застосовуються показники скейлінгу.

Висновок: Викладено математичні основи теорії фракталів, використовуваної в сучасній теоретичній радіофізиці.

Ключові слова: фрактал, фрактальна розмірність, класифікація фракталів, монофрактал, мультифрактал, мультифрактальний формалізм, види розмірності, скейлінг

Статья поступила в редакцию 26.09.2019