

---

## ЗАТВЕРДЕВАНИЕ СПЛАВОВ

УДК 669.18: 621.746

**Л. А. Соколовская, В. А. Мамишев**

Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

### ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРОГРАММ РАСЧЁТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ СЛИТКОВ И КРУПНЫХ ОТЛИВОК С ВВОДОМ В РАСПЛАВ ЛИТОЙ ДРОБИ

*Математически сформулированы задачи плавления твёрдых добавок и затвердевания заготовок прямоугольной, цилиндрической и сферической форм для создания вычислительных программ расчёта температурных полей в системах дробь-расплав, слиток-изложница и отливка-форма.*

**Ключевые слова:** плавление, затвердевание, температурное поле.

*Математично сформульовано задачі плавлення твердих домішок та тверднення заготовок прямокутної, циліндричної і сферичної форм для створення обчислювальних програм розрахунку температурних полів в системах дріб-розплав, зливок-виливниці та виливок-форма.*

**Ключові слова:** плавлення, тверднення, температурне поле.

*There are mathematically formulated problems of melting of the hard additions and solidification the billets with rectangular, cylindrical and spherical form for elaboration programs of calculate temperature fields in the systems shot-melt, ingot-mold, casting-mould.*

**Keywords:** melting, solidification, temperature field.

Процессы плавления литой дроби в жидком металле и затвердевания стальных слитков, литых слябов и массивных отливок относятся к основным теплофизическим процессам прогрессивной технологии суспензионного литья [1-3]. Поэтому актуально создание вычислительных программ расчёта температурных полей на персональных компьютерах (ПЭВМ) в системах дробь-расплав, слиток-изложница и отливка-форма с применением методов математического моделирования и вычислительного эксперимента [4-6].

В нестационарных температурных условиях плавления и затвердевания целесообразно выделить [7, 8] два типа прикладных задач теплообмена:

– первый: задачи внутреннего теплообмена между жидким металлом литой заготовки и введенными в расплав твёрдыми добавками в виде лигатур, модификаторов, инокуляторов, литой дроби и других микрохолодильников;

## Затвердевание сплавов

– второй: задачи внешнего теплообмена между затвердевающей заготовкой и окружающей средой через стенки изложниц, металлических форм (кокилей), неметаллических форм (графитовых и песчаных) и кристаллизаторов МНЛЗ.

Чтобы проводить многовариантные расчёты температурных полей, необходимо обосновать рациональную последовательность вычислительных операций на ПЭВМ. Для расчёта плавления дроби при перемешивании расплава и затвердевания стальных слитков в чугунных изложницах, литых слябов в графитовых формах и отливок в песчаных формах целесообразно получить в обобщённом виде постановку задач внутреннего и внешнего теплообмена, от которых существенно зависит эффективность разных технологий в металлургическом и литейном производстве [1, 9 - 11].

В математической формулировке задач теплопроводности с фазовыми переходами в интервале температур ликвидус-солидус необходимо учесть нелинейный характер изменения теплофизических свойств разных сплавов. В области твёрдого состояния стали и чугунов температурные зависимости удельной теплоёмкости  $c_p(T)$  имеют локальный максимум при температуре структурных превращений, а температурные зависимости их коэффициента теплопроводности  $\lambda(T)$  имеют локальный минимум, тогда как температурные зависимости плотности  $\rho(T)$  изменяются монотонно [12, 13].

В нелинейных задачах теплопроводности с фазовым переходом стали из твёрдого в жидкое состояние или из жидкого в твёрдое состояние необходимо учесть скрытую теплоту фазового превращения  $L$ , которая поглощается стальными дробинками при их плавлении или выделяется кристаллизующимся расплавом при затвердевании стальных слитков, отливок и других литых заготовок.

Для изучения плавления дроби в жидкой стали и затвердевания прокатных и кузнечных слитков, литых слябов или отливок, соответственно, в чугунных изложницах, графитовых или песчаных формах можно применить уравнение нестационарной теплопроводности [14, 15]:

$$c_s(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\nabla}(\lambda(T)\bar{\nabla}T), \quad (1)$$

где  $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$  – дифференциальный набла-оператор Гамильтона [14];

$\bar{\nabla}T = \text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\bar{k}$  – градиент температуры, °С/м;  $c_s(T)$  – эффективная теплоёмкость жидкой, твёрдо-жидкой и твёрдой стали, Дж/(кг·К):

$$c_s(T) = \begin{cases} c_{\text{ж}}(T), & T > T_L \\ c_{\text{т-ж}}(T) + \frac{L}{T_L - T_S}, & T_S \leq T \leq T_L \\ c_{\text{т}}(T), & T < T_S \end{cases} \quad (2)$$

Относительное содержание твёрдой и жидкой фаз  $\Psi_{\text{т}}(T)$  и  $\Psi_{\text{ж}}(T)$  в температурном интервале ликвидус-солидус диаграммы состояния железоуглеродистых сплавов можно определить по правилу отрезков (правило рычага) [16].

Температурные зависимости теплофизических свойств сплава  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  в интервале температур ликвидус-солидус двухфазной зоны кристаллизации можно вычислять по приближенным соотношениям:

$$\begin{aligned}
 c_{T-ж}(T) &= c_T \frac{T_L - T}{T_L - T_S} + c_{ж} \frac{T - T_S}{T_L - T_S} \\
 \rho_{T-ж}(T) &= \rho_T \frac{T_L - T}{T_L - T_S} + \rho_{ж} \frac{T - T_S}{T_L - T_S} \\
 \lambda_{T-ж}(T) &= \lambda_T \frac{T_L - T}{T_L - T_S} + \lambda_{ж} \frac{T - T_S}{T_L - T_S}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где  $\lambda_{ж} = \varepsilon_{кон} \lambda_T$  – теплопроводность жидкой фазы при естественной конвекции кристаллизующегося расплава;  $\varepsilon_{кон}$  – коэффициент конвекции расплава [17] в жидкой сердцевине затвердевающей заготовки.

Эффект увеличения теплопроводности жидкой фазы при вынужденном перемешивании расплава [18] можно также приближённо учесть с помощью  $\varepsilon_{кон}$ .

С учетом дифференциального уравнения (1) и соотношений (2) для эффективной теплоёмкости  $c_s(T)$  получим, что процесс распространения теплоты в системах дробь-расплав, слиток-изложница и отливка-форма можно описать уравнениями нестационарной теплопроводности в следующем виде:

1) для жидкой фазы при  $T < T_L$ :

$$c_{ж}(T)\rho_{ж}(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}(\lambda_{ж}(T) \cdot \vec{\nabla}T); \tag{4a}$$

2) для двухфазной (твёрдо-жидкой) зоны при  $T_S \leq T \leq T_L$ :

$$\left[ \left( c_{T-ж}(T) + \frac{L}{T_L - T_S} \right) \rho_{T-ж}(T) \right] \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}(\lambda_{T-ж}(T) \cdot \vec{\nabla}T), \tag{4б}$$

3) для твёрдой фазы при  $T < T_S$ :

$$c_T(T)\rho_T(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}(\lambda_T(T) \cdot \vec{\nabla}T). \tag{4в}$$

Если в уравнении теплопроводности (1) раскрыть его правую часть:

$$\vec{\nabla}(\lambda(T)\vec{\nabla}T) = \lambda(T)\nabla^2T + \vec{\nabla}\lambda(T)\vec{\nabla}T,$$

где  $\Delta^2T = \partial^2T/\partial x^2 + \partial^2T/\partial y^2 + \partial^2T/\partial z^2$  – оператор Лапласа для поля температур [14], то систему дифференциальных уравнений (4а-в) можно записать в более удобном виде:

$$c_{ж}(T)\rho_{ж}(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{ж}(T)\nabla^2T + \vec{\nabla}\lambda_{ж}(T)\vec{\nabla}T, \quad T > T_L; \tag{5a}$$

$$\left[ \left( c_{T-ж}(T) + \frac{L}{T_L - T_S} \right) \rho_{T-ж}(T) \right] \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{T-ж}(T)\nabla^2T + \vec{\nabla}\lambda_{T-ж}(T)\vec{\nabla}T, \quad T_S \leq T \leq T_L \tag{5б}$$

$$c_{\tau}(T)\rho_{\tau}(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{\tau}(T)\nabla^2 T + \vec{\nabla}\lambda_{\tau}(T)\vec{\nabla}T, \quad T < T_S. \quad (5в)$$

С учётом соотношений (2) систему дифференциальных уравнений нестационарной теплопроводности (5а-в) можно объединить в одно уравнение для жидкого, двухфазного и твёрдого состояния сплава:

$$c_3(T)\rho_3(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_3(T)\nabla^2 T + \vec{\nabla}\lambda_3(T)\vec{\nabla}T. \quad (6)$$

Для расчёта температурных полей при плавлении литой дроби и затвердевании кузнечных и прокатных слитков и слябов применим известные выражения [14] для  $\nabla^2 T$  в разных координатных системах, соответственно, со сферической, цилиндрической и плоской симметрией температурного поля.

Следуя [15], обобщённое представление лапласиана  $\nabla^2 T$  запишем так:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\Gamma - 1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (7)$$

В правой части уравнения (6) выполним следующие преобразования:

$$\vec{\nabla}\lambda(T)\vec{\nabla}T = \frac{\partial\lambda(T)}{\partial r} \vec{i} \frac{\partial T}{\partial r} \vec{i} = \frac{d\lambda(T)}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} \vec{i} \frac{\partial T}{\partial r} \vec{i} = \frac{d\lambda(T)}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2.$$

Так как расчёт температурных полей в разных системах координат (плоской, цилиндрической и сферической) облегчает поиск рациональных тепловых режимов затвердевания слитков и отливок и плавления дробинок, то при создании вычислительных программ расчёта температур дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности (6) можно записать в обобщённом виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_3(T) \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\Gamma - 1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - K_{\lambda}(T) \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Здесь теплофизические коэффициенты температуропроводности  $a_3(T)$  и прироста теплопроводности  $K_{\lambda}(T)$  можно вычислять таким образом:

$$a_3(T) = \frac{\lambda_{\text{ж}}(T)}{c_{\text{ж}}(T)\rho_{\text{ж}}(T)} \quad \text{при} \quad T > T_L, \quad (9а)$$

$$a_3(T) = \frac{\lambda_{\text{т-ж}}(T)}{\left( c_{\text{т-ж}}(T) + \frac{L}{T_L - T_S} \right) \rho_{\text{т-ж}}(T)} \quad \text{при} \quad T_S \leq T \leq T_L, \quad (9б)$$

$$a_3(T) = \frac{\lambda_{\text{т}}(T)}{c_{\text{т}}(T)\rho_{\text{т}}(T)} \quad \text{при} \quad T < T_S; \quad (9в)$$

$$K_{\lambda}(T) = -\frac{1}{\lambda(T)} \frac{d\lambda(T)}{dT}, \quad (10)$$

## Затвердевание сплавов

где  $a_3(T)$  – эффективный коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;  $\lambda(T)$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $K_\lambda(T)$  – температурный коэффициент прироста теплопроводности, К<sup>-1</sup>;  $\Gamma$  – геометрический параметр [15] ( $\Gamma = 1$  для плоских прокатных слитков, литых слябов и отливок;  $\Gamma = 2$  для цилиндрических кузнечных слитков и отливок;  $\Gamma = 3$  для сферических дробинок и шаровых отливок).

Начальные условия в задачах плавления дроби в расплаве или затвердевания слитка в изложнице и отливки в форме формулируются в виде распределения температуры по их толщине в начальный момент времени:

$$T_d(r)|_{t=0} = T_{н.д.}; T_p(r)|_{t=0} = T_{н.п.}; T_n(r)|_{t=0} = T_{н.и.}; T_\phi(r)|_{t=0} = T_{н.ф.} \quad (11)$$

При плавлении литых дробинок их начальная температура меньше температуры расплава  $T_d(r)|_{t=0} < T_p(r)|_{t=0}$ , а при затвердевании литых заготовок начальные температуры расплава, изложницы (формы) и внешней среды удовлетворяют неравенству  $T_p(r)|_{t=0} > T_n(r)|_{t=0} > T_{ср}$ .

В задачах с фазовыми переходами в температурном интервале ликвидус-солидус можно использовать различные сочетания граничных условий I, II, III и IV рода [14]. При формулировке граничных условий в задачах плавления и затвердевания необходимо учитывать [6, 14, 15], что:

- граничные условия I-го рода характеризуют изменение во времени температуры поверхности  $T(R_{II}, t)$  дробинок, слитков, литых слябов или отливок:

$$T_{II}| = T(R_{II}, t); \quad (12)$$

- граничные условия II-го рода учитывают изменение во времени теплового потока  $q(R_{II}, t)$  на поверхностях контактной зоны теплообмена в процессе нагрева дробинок и охлаждения слитков, слябов или отливок:

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{II} = q(R_{II}, t); \quad (13)$$

- граничные условия III-го рода характеризуют условия теплообмена между дробинкой и расплавом, слитком и изложницей, отливкой и формой, а также между изложницей (или формой) и окружающей средой согласно закону теплообмена Ньютона [15]:

$$-\lambda_{II-}(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{II-} = \alpha(t) \Delta T_K = -\lambda_{II+}(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{II+}, \quad (14a)$$

$$-\lambda_{II-}(T) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{II-} = \alpha(T) [T(R_{II}, t) - T_{ср}], \quad (14б)$$

где  $\alpha(t)$  – коэффициент теплопередачи от расплава к расплавляемой дробинке и от затвердевающего слитка, литого сляба или отливки к стенкам изложницы или формы, который зависит от времени, Дж/(м<sup>2</sup>·с·К);  $\alpha(T)$  – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности охлаждения изложницы или формы, он зависит от температуры с учётом суммарного эффекта теплообмена [16, 19] излучением и конвекцией  $\alpha(T) = \alpha_{изл.} + \alpha_{кон.}$ ;  $\Delta T_K$  – перепад температур в контактной зоне [6] дробинка-расплав, слиток-изложница или отливка-форма  $\Delta T_K = T_{II-}(R_{II}, t) - T_{II+}(R_{II}, t)$ ;

## Затвердевание сплавов

• граничные условия IV-го рода отражают тепловое взаимодействие соседних слоев в дробинке и расплаве; в слитке, литом слябе или отливке и в стенках изложницы или формы:

а) при идеальном тепловом контакте жидкой стали с дробинками или стенками изложницы и формы (когда в зоне контакта отсутствуют тепловые сопротивления) должны соблюдаться [14] два условия теплообмена:

равенство температур

$$T|_{\Pi_+} = T|_{\Pi_-}, \quad (15a)$$

и равенство тепловых потоков

$$-\lambda(T_{\Pi_+}) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi_+} = -\lambda(T_{\Pi_-}) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi_-}; \quad (15b)$$

б) при неидеальном тепловом контакте (когда на литых дробинках в зоне их контакта с жидкой сталью есть окисная пленка; когда между слитком или литым слябом и стенкой изложницы есть газовый зазор; когда на внутренней поверхности формы есть слой противопожарной краски) из-за тепловых сопротивлений  $R_k$  [6, 17, 20] в контактной зоне имеется:

скачок температур

$$T|_{\Pi_+} = T|_{\Pi_-} + \Delta T_k, \quad \text{где } \Delta T_k = q_k R_k, \quad (16a)$$

при равенстве тепловых потоков

$$-\lambda(T_{\Pi_+}) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi_+} = -\lambda(T_{\Pi_-}) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Pi_-}. \quad (16b)$$

В теплофизической постановке задач плавления и затвердевания следует также учитывать [21] различные типы нелинейностей:

а) к нелинейностям I-го рода относятся зависимости теплофизических свойств сплавов  $c$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$  от температуры;

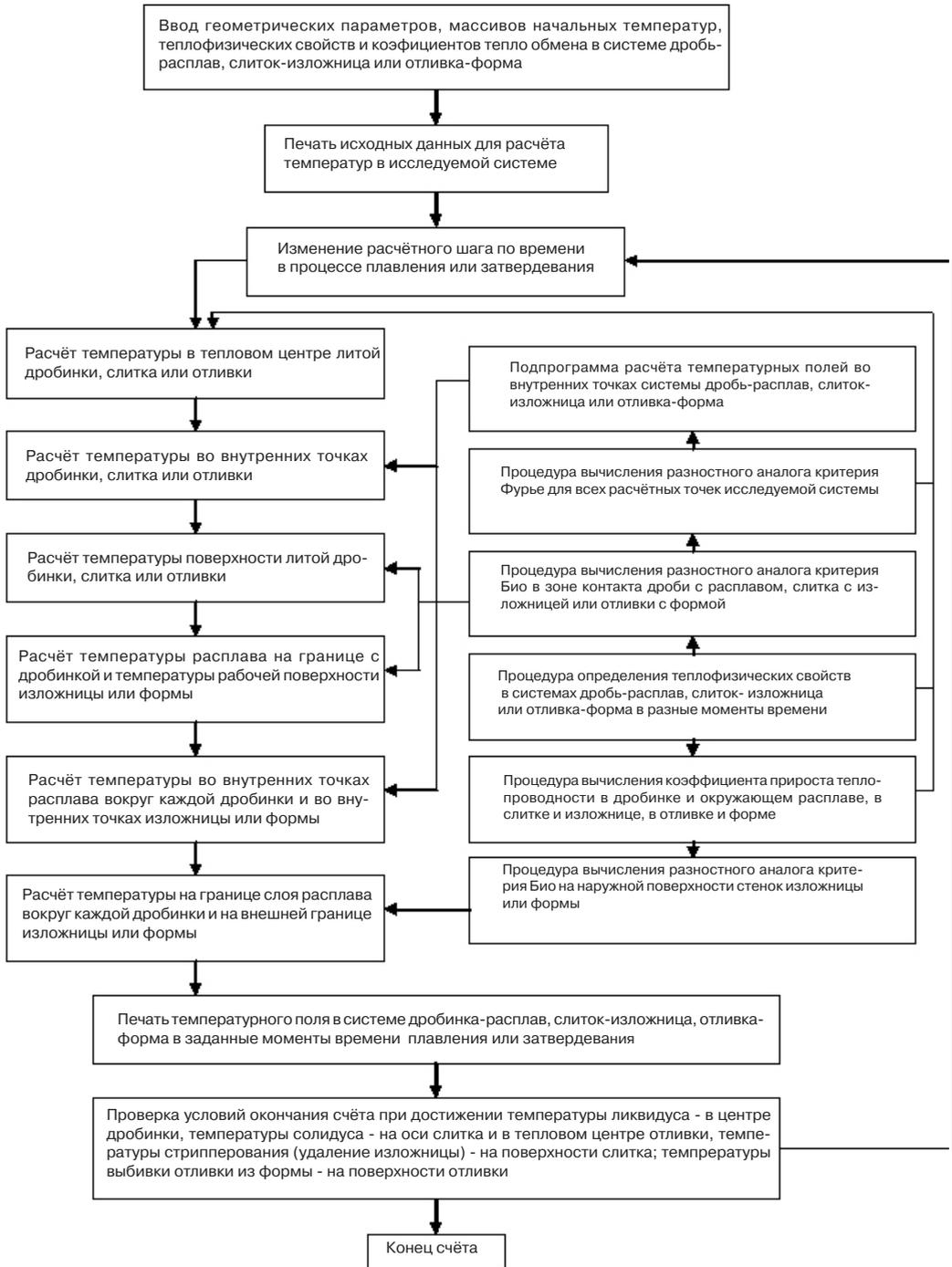
б) к нелинейностям II-го рода относится изменение коэффициентов теплообмена в зависимости от времени (14a) или от температуры (14б).

К теплофизическим особенностям сформулированных задач плавления и затвердевания следует отнести: учёт дополнительного теплового сопротивления окисной плёнки на поверхности литых дробин в коэффициенте теплоотдачи от расплава стали к дробинкам-микророзливателям [6]; учёт зависимости от времени [6, 22] коэффициента теплопередачи от затвердевающего стального слитка к чугунной изложнице, который получен обработкой результатов температурных измерений в системе слиток-изложница.

В соответствии с изложенным подходом к формулировке тепловых задач плавления и затвердевания применительно к совершенствованию прогрессивных технологий суспензионного литья [3, 23] выявлена (рисунок) рациональная последовательность выполнения вычислительных операций при создании Фортран-программ расчёта нестационарных температурных полей в системах дробь-расплав, слиток-изложница и отливка-форма.

Для проведения вычислений на ПЭВМ целесообразно использовать комбинированные явно-неявные схемы [24] конечно-разностного метода расчёта температур

## Затвердевание сплавов



Последовательность вычислительных операций в программах расчета на ПЭВМ температурных полей при плавлении дробинки и затвердевании слитков и отливок

во внутренних и граничных дискретных точках исследуемой системы [21]. Чтобы получить устойчивый процесс вычислений, осуществляется рациональный выбор шагов  $\Delta r_1$ ,  $\Delta r_2$  и  $\Delta t$  пространственно-временной разбивки расчётной области.

В Фортран-программе расчёта температурных полей вспомогательную роль выполняют подпрограмма поочередного (циклического) вычисления температур во внутренних точках расчётной области и процедуры-функции определения тепло-

физических свойств и коэффициентов теплообмена при текущих значениях температур (рисунок) в системах дробь-расплав или слиток-изложница и отливка-форма.

После расчёта температур во всех точках исследуемой системы на очередном шаге по времени предусмотрен (рисунок) контроль окончания счёта. Когда температура в центре дробинки равна температуре ликвидуса, дробинка расплавляется, что соответствует моменту окончания вычислений. Аналогично, когда температура на оси слитка или в тепловом центре отливки равна температуре солидуса, слиток или отливка полностью затвердевает и наступает момент окончания счёта. Конец счёта может быть предусмотрен в момент достижения среднекалориметрической температуры в системах дробинка-расплав, слиток-изложница или отливка-форма.

К контрольным температурам можно также отнести: для поверхности стального слитка температуру его стрипперования, при которой происходит освобождение слитка от изложницы, а для поверхности отливки – температуру её удаления из полости металлического кокиля или температуру выбивки отливки из разрушаемой песчаной формы. Кроме того, возможен контроль температуры поверхности охлаждения слитка на воздухе для его посадки в нагревательный колодец, а также контроль температуры поверхности слитка для его выдачи из ячейки нагревательного колодца под прокатку или ковку.

Следует отметить, что после стрипперования слитка происходит смена граничного условия III-го рода между слитком и изложницей по закону Ньютона на граничное условие III-го рода лучеиспусканием от поверхности слитка в окружающую среду по закону Стефана-Больцмана [14, 15].

Метод математического моделирования необходим для изучения с применением ПЭВМ закономерностей внутреннего теплообмена между расплавом и дробинками-микрохолодильниками при их плавлении в объёме слитка или отливки и закономерностей внешнего теплообмена в системах слиток-изложница-окружающая среда и отливка-форма-окружающая среда. Кроме того, с помощью математического моделирования можно исследовать тепловую работу чугунных изложниц, графитовых и песчаных форм при затвердевании стальных прокатных и кузнечных слитков, слябов и отливок, соответственно.

Таким образом, получена в обобщённом виде математическая модель плавления дробы и затвердевания слитков и отливок. Она использована для комплексного математического обоснования разрабатываемых программ расчёта температурных полей в исследуемых системах и выявления методом вычислительного эксперимента на ПЭВМ особенностей внутреннего и внешнего теплообмена с целью выбора рациональных технологических режимов получения литых заготовок разных типоразмеров, массы и назначения.



### Список литературы

1. *Ефимов В. А.* Разливка и кристаллизация стали. – М.: Металлургия, 1976. – 539 с.
2. *Затуловский С. С.* Суспензионная разливка. – К.: Наукова думка, 1981. – 259 с.
3. *Кириевский Б. А.* Особенности суспензионного литья отливок / *Б. А. Кириевский, В. Л. Черкасский* // Литейное производство. – 1978. – № 8. – С. 25-27.
4. *Ефимов В. А.* Компьютерные модели кристаллизации стали и сплавов / *В. А. Ефимов, В. Т. Борисов, В. А. Журавлев* // Процессы литья. – 1992. – № 1. – С. 5-13.
5. *Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР. – 1979. – № 5. – С. 38-49.

6. Соколовская Л. А. О математическом моделировании задач с фазовыми переходами в металлургии и литейном производстве / Л. А. Соколовская, В. А. Мамишев // Процессы литья. – 2009. – № 2. – С. 24-29.
7. Соколовская Л. А. О возникновении дополнительных центров кристаллизации при введении дробы в расплав / Л. А. Соколовская, В. А. Мамишев // Металл и литье Украины. – 2014. – № 7. – С. 35-37.
8. Соколовская Л. А. О выборе рациональных тепловых режимов отливки стальных слитков с дробью // Металл и литье Украины. – 2013. – № 9. – С. 32-35.
9. Крупный слиток / А. Н. Смирнов, С. Л. Макуров, В. М. Сафонов, А. Ю. Цупрун. – Донецк: ДонНТУ, 2009. – 279 с.
10. Сомайлович Ю. А. Формирование слитка. – М.: Металлургия, 1977. – 160 с.
11. Совершенствование технологии стального литья / А. А. Рыжиков, М. И. Рошин, В. И. Фокин и др. – М.: Машиностроение, 1977. – 143 с.
12. Ларионов Л. Н., Юрченко Ю. Ф. Структура и свойства металлов и сплавов. Тепловые свойства металлов и сплавов. – Справочник. – К.: Наукова думка, 1985. – 437 с.
13. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике. Справочник / Под ред. Б.Е. Неймарка. – М. – Л.: Энергия, 1967. – 240 с.
14. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
15. Коздоба Л. А. Решение нелинейных задач теплопроводности. – К.: Наукова думка, 1976. – 135 с.
16. Баландин Г. Ф. Основы теории формирования отливки. – Ч. 1. – М.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
17. Карножицкий В. Н. Контактный теплообмен в процессах литья. – К.: Наукова думка, 1978. – 300 с.
18. Мамишев В. А. Системное исследование реотермических процессов течения и теплообмена при кристаллизации сплавов // Процессы литья, 2015. – № 1. – С. 39-46.
19. Вейник А. И. Теплообмен между слитком и изложницей. – М.: Металлургиздат, 1959. – 357 с.
20. Мамишев В. А. О повышении эффективности теплообмена в системе литая заготовка-форма-окружающая среда / Металл и литье Украины, 2012. – № 11. – С. 31-35.
21. Никитенко Н. И. Исследование нестационарных процессов теплообмена методом сеток. – К.: Наукова думка, 1971. – 260 с.
22. Экспериментальные методы определения температурных полей и тепловых потоков при затвердевании стальных слитков: Препринт / В.А. Ефимов, В.И. Легенчук, В.П. Осипов и др. – К.: ИПЛ АН УССР, 1973. – 26 с.
23. Исследование кинетики кристаллизации слитка низкоуглеродистой кипящей стали, отлитого с применением металлической дробы / В. И. Легенчук, В. Н. Сапко, В. В. Шепелев и др. // Теплофизика стального слитка. – К.: ИПЛ АН УССР, 1980. – С. 99-102.
24. Соколовская Л. А. Использование математического моделирования при исследовании теплофизических процессов взаимодействия расплава с твердыми добавками / Л. А. Соколовская, В. П. Осипов, В. А. Мамишев // Процессы литья. – 2000. – № 4. – С. 72-78.

Поступила 18.06.2015