УДК 513.83

Р. С. Линичук, В. М. Сафонов

Об экспоненциальной топологии

В данной работе исследуются свойства пространства ψX всех непустых подмножеств произвольного топологического пространства X с экспоненциальной топологией.

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Полагаем

$$\mathbf{F}(X)=\{F\subset X \mid F=[F]_X,\ F\neq\varnothing\},\quad \mathbf{P}(X)=\{A\subset X \mid A\neq\varnothing\}.$$

Здесь $[F]_X$ — замыкание множества F в пространстве X [1].

Среди топологий на множестве $\mathbf{P}(X)$ наиболее важными являются три из них: $\varkappa$, λ и ψ. Это обусловлено тем, что они полностью определяют соответственно полунепрерывность сверху, полунепрерывность снизу и непрерывность многозначных отображений топологических пространств [2]. Полагаем

$$\Delta_1(U)=\{(A)\in\mathbf{P}(X) \mid A\subset U\},\ \Delta_2(U)=\{(A)\in\mathbf{P}(X) \mid A\cap U\neq\varnothing\}.$$

В записи (A) скобки подчеркивают, что множество $A\subset X$ в данном случае выступает как точка множества $\mathbf{P}(x)$. Семейство $\{\Delta_1(U) \mid U$ открыто и непусто в $X\}$ порождает базу $\varkappa$-топологии на множестве $\mathbf{P}(X)$. Соответственно семейство $\{\Delta_2(U) \mid U$ открыто и непусто в $X\}$ образует предбазу λ-топологии на $\mathbf{P}(X)$. ψ-топология на множестве $\mathbf{P}(X)$ может быть определена как супремум топологий $\varkappa$ и λ, т. е. $\psi=\varkappa\vee\lambda$. Иными словами, предбазис ψ-топологии формируют всевозможные множества вида $\Delta_1(U)$ и $\Delta_2(U)$, когда U пробегает открытые непустые в X подмножества. ψ-Топология называется также непрерывной или экспоненциальной топологией. Пара $\psi X=(\mathbf{P}(X),\psi)$ называется ψ-гиперпространством топологического пространства X или экспонентой. Пространство ψX индуцирует на своем подмножестве $\mathbf{F}(X)$ топологию, которую будем называть ψ_F-топологией. Пара $\psi_F X=(\mathbf{F}(X),\psi_F)$ — классическое пространство замкнутых подмножеств с экспоненциальной топологией, когда X — T_1-пространство (см., например, [3, 4]).

Аналогично можно говорить о пространствах $\varkappa X=(\mathbf{P}(X),\varkappa)$ и $\lambda X=(\mathbf{P}(X),\lambda)$ и их подпространствах $\varkappa_F X$ и $\lambda_F X$ замкнутых подмножеств.

Известно, что пространства $\varkappa_F X$ и $\lambda_F X$ всегда T_0-, но никогда не T_1-пространства, за исключением тривиального случая, когда X состоит из одной единственной точки [5, 6]. Элементы базы ψ-топологии (соответственно $\varkappa$-топологии; соответственно λ-топологии) на множестве $\mathbf{P}(X)$ будем называть ψ-окрестностями (соответственно $\varkappa$-окрестностями; соответственно λ-окрестностями).

Если (A_0) — произвольная фиксированная точка множества $\mathbf{P}(X)$ и $\gamma=\{U_1,\ \ldots,\ U_s\}$ — произвольная конечная система открытых в X подмножеств такая, что $A_0\subset\bigcup\limits_{i=1}^{s}U_i=\tilde{\gamma}$ и $A_0\cap U_i\neq\varnothing$ $(i=1,\ldots,s)$, тогда ψ-окрестность точки $(A_0)\in\psi X$, порожденная система γ, есть множество

$$\gamma_\psi(A_0)=\{(A)\in\mathbf{P}(X) \mid A\subset\tilde{\gamma},\ \ A\cap U_i\neq\varnothing\ \ \forall U_i\in\gamma\}.$$

Аналогично можно говорить о λ-окрестности точки $(A_0)\in\mathbf{P}(X)$

$$\gamma_\lambda(A_0)=\{(A)\in\mathbf{P}(X) \mid A\cap U_i\neq\varnothing\ \ \forall U_i\in\gamma\},$$

порожденной конечной открытой системой γ такой, что $A_0 \cap U_i \neq \varnothing$ $(i = 1, \ldots, s)$ а также о $\varkappa$-окрестности точки (A_0)

$$O_\varkappa(A_0) = \{(A) \in \mathbf{P}(X) \mid A \subset OA_0\},$$

порожденной открытой окрестностью OA_0 множества A_0 в пространстве X. Ясно, что всякая $\varkappa$-окрестность, а также всякая λ-окрестность являются в то же время и ψ-окрестностью.

Изучим некоторые свойства пространства ψX в зависимости от свойств исходного пространства X.

Пусть $(A_0) \in \mathbf{P}(X)$. Замыкание точки (A_0) в пространстве ψX обозначаем $[(A_0)]_{\psi X}$.

Предложение 1. *Пусть X — произвольное топологическое пространство. Тогда множество*

$$T = \{(A) \in \mathbf{P}(X) \mid A \supset A_0 \,\&\, [A]_X = [A_0]_X\}$$

подмножество множества $[(A_0)]_{\psi X}$.

Доказательство. Пусть $(A) \in T$. Легко видеть, что каждая $\varkappa$-окрестность $O_\varkappa(A)$, а также всякая λ-окрестность $\gamma_\lambda(A)$ точки $(A) \in \mathbf{P}(X)$ содержат точку (A_0). Стало быть, каждая ψ-окрестность точки (A) также содержит (A_0) и, таким образом, $(A) \in [(A_0)]_{\psi X}$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть X — произвольное топологическое пространство, A_0 — его подмножество, состоящее из замкнутых в X точек* (т. е. $\forall x \in A_0 \, ([x]_X = x)$). *Тогда*

$$[(A_0)]_{\psi X} = \{(A) \in \mathbf{P}(X) \mid A \supset A_0 \,\&\, [A]_X = [A_0]_X\}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $[(A_0)]_{\psi X} \subset T$. Покажем, что

$$\forall (A) \in \mathbf{P}(X) \quad ((A) \notin T \Rightarrow (A) \notin [(A_0)]_{\psi X}).$$

Тот факт, что

$$(A) \notin T = \{(A) \in \mathbf{P}(X) \mid A \supset A_0 \,\&\, [A]_X = [A_0]_X\},$$

в точности означает, что либо $A_0 \setminus A \neq \varnothing$, либо $[A]_X \neq [A_0]_X$.

а) Пусть $A_0 \setminus A \neq \varnothing$. Тогда будет существовать $x_0 \in A_0$ — такая точка пространства X, что $x_0 \notin A$. Полагаем $UA = X \setminus \{x_0\}$. Точка x_0 по условию замкнута в X, следовательно, множество UA открыто в X. Соответствующая окрестность $U_\varkappa(A)$ точки (A) в пространстве ψX не содержит точку $(A_0) \in \psi X$ и, таким образом, $(A) \notin [(A_0)]_{\psi X}$.

б) Пусть $[A]_X \neq [A_0]_X$. Тогда либо $[A]_X \setminus [A_0]_X \neq \varnothing$, либо $[A_0]_X \setminus [A]_X \neq \varnothing$. Если $[A]_X \setminus [A_0]_X \neq \varnothing$ и x_0 — такая точка прикосновения множества A, которая не является точкой прикосновения множества A_0 в пространстве X, то существует такая окрестность Ux_0 точки x_0 в X, что $Ux_0 \cap A_0 = \varnothing$. Легко видеть, что открытое в ψX множество $\Delta_2(Ux_0)$ таково, что $(A_0) \notin \Delta_2(Ux_0)$ и $(A) \in \Delta_2(Ux_0)$, т. е. $(A) \notin [(A_0)]\psi X$. Если же $[A_0]_X \setminus [A]_X \neq \varnothing$, то очевидно $A_0 \setminus A \neq \varnothing$ и мы находимся в условиях пункта а) доказательства. Таким образом, и здесь $(A) \notin [(A_0)]_{\psi X}$. Утверждение доказано.

Следствием двух предыдущих утверждений является следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть X — T_1-пространство. Тогда для любой точки $(A_0) \in \psi X$*

$$[(A_0)]_{\psi X} \{(A) \in \mathbf{P}(X) \mid A \supset A_0 \,\&\, [A]_X = [A_0]_X\}.$$

Предложение 4. *Пусть X — произвольное топологическое пространство и A_0 — его подмножество, состоящее из замкнутых в X точек. Точка $(A_0) \in \psi X$ замкнута в ψX тогда и только тогда, когда соответствующее подмножество $A_0 \subset X$ замкнуто в X.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(A_0) = [(A_0)]_{\psi X}$. Предположим, что множество A_0 не замкнуто в X, т. е. существует точка прикосновения x_0 множества A_0, ему не принадлежащая. Полагаем

$A_1 = A_0 \cup \{x_0\}$. В силу предложения 2 $(A_1) \in [(A_0)]_{\psi X}$ и, значит, $[(A_0)]_{\psi X} \neq \neq (A_0)$, что противоречиво.

Достаточность. Пусть $A_0 = [A_0]_X$. Тогда

$$[(A_0)]_{\psi X} = \{(A) \in \mathbf{P}(X) \mid A \supset A_0 \& [A]_X = [A_0]_X\} = (A_0).$$

Утверждение доказано.

Предложение 5. *Пусть X — T_1-пространство. Гиперпространство ψX — T_1-пространство тогда и только тогда, когда пространство X дискретно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть ψX — T_1-пространство и при этом X недискретно. Тогда в пространстве X будет существовать незамкнутое подмножество E. В силу предложения 4 точка $(E) \in \mathbf{P}(X)$ незамкнута в пространстве ψX, которое таким образом, не является T_1-пространством, что противоречиво.

Достаточность. Если X дискретно, то в силу предложения 4 любая точка пространства ψx замкнута в нем. Предложение доказано.

Как известно, T_0-пространства называются также колмогоровыми [1].

Определение 1. *Топологическое пространство X называется $T_{\frac{1}{2}}$-пространством или вполне колмогоровым пространством, если каждая его точка x непременно либо открыта, либо замкнута (в неисключающем смысле) как одноточечное подмножество пространства X.*

В дальнейшем класс всех T_0-пространств будем обозначать T_0; аналогично классы всех T_1-пространств и $T_{\frac{1}{2}}$-пространств будем обозначать соответственно через T_1 и $T_{\frac{1}{2}}$. Таким образом, запись $X \in T_0 \setminus T_1$ означает, что X — T_0-, но не T_1-пространство.

Очевидно, всякое вполне колмогорово пространство — T_0-пространство, кроме того всякое T_1-пространство — $T_{\frac{1}{2}}$-пространство, поэтому $T_1 \subset T_{\frac{1}{2}} \subset \subset T_0$. Класс $T_{\frac{1}{2}}$-пространств не совпадает ни с классом T_1, ни с классом T_0. Примером вполне колмогорового не T_1-пространства может служить наряду с многими другими примерами связное двоеточие. Примером же пространства класса $T_0 \setminus T_{\frac{1}{2}}$ может служить пространство $\lambda_F\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — числовая прямая с естественной топологией. Более простым примером служит пространство (X, τ), где $X = \{a, b, c\}$ — трехэлементное множество и топология τ такова: $\tau = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{\varnothing\}\}$.

Предложение 6. *Гиперпространство ψX — T_0-пространство тогда и только тогда, когда X вполне колмогорово.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\psi X \in T_0$. Тогда из двух произвольных точек (A_1), $(A_2) \in \psi X$ одна из них (например, (A_1)) отделима в пространстве ψX от другой точки базисной ψ-окрестностью. Но тогда непременно будет существовать предбазисная ψ-окрестность, отделяющая точку (A_1) от точки (A_2). Возможны два случая.

а) Эта предбазисная окрестность имеет вид $\Delta_1(U)$, где U открыто в X. Отсюда $A_1 \subset U$ и $A_2 \setminus U \neq \varnothing$. Но тогда непременно будет существовать такое замкнутое в пространстве X множество E, что $E \cap A_1 = \varnothing$ и $E \cap \cap (A_2 \setminus A_1) \neq \varnothing$. Действительно, в качестве E можно взять множество $X \setminus U$.

б) Эта предбазисная окрестность имеет вид $\Delta_2(V)$, где V открыто в X. Тогда $V \cap A_1 \neq \varnothing$ и $V \cap A_2 = \varnothing$. Т. е. непременно в этом случае будет существовать такое открытое в X множество V, что $V \cap A_2 = \varnothing$ и $V \cap (A_1 \setminus A_2) \neq \varnothing$.

Пусть теперь x — произвольная точка пространства X. Полагаем $A_1 = X$, $A_2 = X \setminus \{x\}$. Тогда в силу выводов, сделанных в а) и б), заключаем, что точка x окажется либо замкнутой, либо открытой в пространстве X.

Достаточность. Пусть пространство X вполне колмогорово и (A_1), (A_2) — произвольная пара различных точек гиперпространства ψX. Так как $A_1 \neq A_2$, то существует точка одного из этих множеств, не принадлежащая другому; существует, например, $x_0 \in A_1$ — такая точка, что $x_0 \notin A_2$. Если x_0 замкнута, то множество $OA_1 = X \setminus \{x_0\}$ — открытая окрестность множества A_1. Соответствующая окрестность $O_\varkappa(A_1)$ точки $(A_1) \in \psi X$ не содержит точку (A_2) в пространстве ψX. Если x_0 открыта, то $\Delta_2(x_0)$ — ψ-окрестность точки (A_1), которая отделяет ее от точки (A_2) в пространстве ψX. Следовательно, $\psi X \in T_0$. Утверждение доказано.

Следующие два утверждения являются следствиями предложения 6.

Предложение 7. *Пусть $X \in T_1$. Тогда $\psi X \in T_0$.*

Предложение 8. *Пусть $X \notin T_0$. Тогда $\psi X \notin T_0$.*

Предложение 9. *Точка (A) открыта в пространстве ψX тогда и только тогда, когда соответствующее множество A — конечный набор открытых в X точек.*

Доказательство. Необходимость. Пусть (A) — открытая в пространстве ψX точка. Если множество $A \subset X$ — не конечный набор открытых в X точек, тогда либо A бесконечно, либо в A — хотя бы одна неоткрытая точка. Легко видеть, что и в том, и в другом случаях всякая ψ-окрестность точки $(A) \in \psi X$, содержит помимо (A), еще и другие точки пространства ψX, что противоречиво.

Достаточность. Если $A = \{x_1, \dots, x_s\}$, где x_i открыта в X для всех $i \in \{1, \dots, s\}$, то по отношению к открытой в X системе $\gamma = \{x_1, \dots, x_s\}$ справедливо $\gamma_\psi(A) = (A)$. Утверждение доказано.

Из предложения 9 непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение 10. *Пространство ψX дискретно тогда и только тогда, когда X конечно и дискретно.*

В дальнейшем под $\langle E \rangle$ будем понимать внутренность множества E в соответствующем пространстве [1].

Справедливы следующие свойства: 1) $[\Delta_1(E)]_{\psi X} = \Delta_1([E]_X)$; 2) $\langle \Delta_1(E) \rangle = \Delta_1(\langle E \rangle)$; 3) $[\Delta_2(E)]_{\psi X} = \Delta_2([E]_X)$; 4) $\langle \Delta_2(E) \rangle = \Delta_2(\langle E \rangle)$. Под E понимаем произвольное непустое подмножество какого угодно топологического пространства X.

Свойства 1) и 2) аналогичны соответствующим свойствам относительно пространства $\psi_F X$ в [3]; свойства 3) и 4) легко получаются из свойств 1) и 2), поскольку $\Delta_2(E) = \psi X \setminus \Delta_1(X \setminus E)$.

Из свойств 1)—4) непосредственно получаем следующее утверждение.

5) *Множества $\Delta_1(E)$ и $\Delta_2(E)$ замкнуты (соответственно открыты) в пространстве ψX тогда и только тогда, когда E замкнуто (соответственно открыто) в пространстве X.*

Пусть, далее, ψ-окрестность $\gamma_\psi(A_0)$ точки $(A_0) \in \psi X$ порождается конечной открытой системой $\gamma = \{U_1, \dots, U_s\}$. Легко получить следующее предложение.

Предложение 11. *Множество $\gamma_\psi(A_0)$ открыто—замкнуто в пространстве ψX тогда и только тогда, когда множества $U_i (i = 1, \dots, s)$ открыто—замкнуты в пространстве X.*

Отсюда непосредственно получаем утверждения.

Предложение 12. *Если пространство X дискретно, то гиперпространство ψX индуктивно нульмерно.*

Поскольку индуктивно нульмерные T_1-пространства вполне регулярны, то на основании предложений 5 и 12 получаем предложение.

Предложение 13. *Пространство X дискретно тогда и только тогда, когда ψX вполне регулярно.*

Пусть $\mathbf{P}_{\text{кон}}(X) = \{(A) \in \mathbf{P}(X) | A \text{—конеччо}\}$. Легко видеть, что $\mathbf{P}_{\text{кон}}(X)$ — всюду плотное подмножество пространств $\psi_F X$ и ψX для любого пространства X. В свою очередь, $\psi_F X$ в случае T_1- пространства X — всюду плотное подпространство пространства ψX.

В заключение отметим, что теми же методами, которые использовались при доказательстве аналогичных утверждений по отношению к пространству $\psi_F X$ в [3, 4], можно доказать предложение.

П р е д л о ж е н и е 14. *Пусть X — произвольное топологическое пространство. X бикомпактно (соответственно связно) тогда и только тогда, когда ψX бикомпактно (соответственно связно).*

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М. : Наука, 1977.— 368 с.
2. *Линичук Р. С.* О некоторых многозначных отображениях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 2, с. 15—18.
3. *Куратовский К.* Топология.— М. : Мир, 1966. Т. I.— 594 с., Т. 2.— 624 с.
4. *Michael E.* Topologies on Spaces of Subsets.— Trans. Amer. Math. Sos., 1951, 71, N 1, p. 152—182.
5. *Пономарев В. И.* Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов.— Мат. сб., 1959, 48, № 2, с. 191—212.
6. *Линичук Р. С.* Многозначные отображения и непрерывность разбиений топологических пространств.— В кн.: Десятая мат. школа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 308—329.

Ворошиловградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
15.09.81.