УДК 517.52

*В. И. Кузьмич*

# О методе Фавара суммирования рядов

Метод Фавара определяется преобразованием

$$t_n = u_0 - \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{k\pi}{2(n+1)} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad n > 0,\ t_0 = u_0,$$

где

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{1}$$

— некоторый числовой ряд.

Говорят, что ряд (1) суммируем методом Фавара к числу $U$, если $t_n \to U$, $n \to \infty$. Если же $\sum_{k=0}^{n} |t_{k+1} - t_k| \to U$, $n \to \infty$, то ряд (1) абсолютно суммируем методом Фавара к числу $U$.

В этой работе показано, что метод Фавара равносилен и абсолютно равносилен методу средних арифметических (методу Чезаро первого порядка).

В работе [1] определен один общий класс матричных методов суммирования рядов. Здесь мы рассмотрим лишь некоторые из них.

Пусть на промежутке $[a, b]$ определена функция $\varphi(x)$. Преобразование

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \varphi\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right), \quad n > 0, \quad t_0 = u_0 \varphi(a) \tag{2}$$

определяет метод суммирования, который обозначим через $\Phi\left(\frac{b-a}{n}\right)$. Его частными случаями являются: метод Фавара при $a = 0$, $b = \pi/2$, $\varphi(x) = x \operatorname{ctg} x$; метод Рогозинского при $a = 0$, $b = \pi/2$, $\varphi(x) = \cos x$; метод средних арифметических при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(x) = 1 - x$.

Лемма 1. *Если нижняя треугольная регулярная матрица $A = (a_{nk})$ преобразования последовательности в последовательность удовлетворяет условиям: 1) $a_{nn} = O(1/n)$, 2) $a_{nk} \leqslant a_{n,k+1}$, $0 \leqslant k < n$ для $n > n_0$, то метод суммирования, определяемый этой матрицей, равносилен методу средних арифметических и они совместны* [2].

Лемма 2. *Если нормальная абсолютно регулярная матрица $B = (b_{nk})$ преобразования ряда в ряд удовлетворяет условиям: 1) $b_{nn} = O(1/n)$, 2) $b_{nk}/k \leqslant b_{n,k+1}/(k+1)$, $k_0 \leqslant k < n$, то метод суммирования, определяемый этой матрицей, абсолютно равносилен методу средних арифметических и они абсолютно совместны.*

Лемма 2 является простым следствием теоремы 2 из работы [3].

Теорема. *Если функция $\varphi(x)$ всюду на $[a, b]$ имеет конечную вторую производную и $\varphi''(x) \leqslant 0$, $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$, то метод $\Phi(b-a)/n$ равносилен и абсолютно равносилен методу средних арифметических. Кроме того, они совместны и абсолютно совместны.*

Доказательство. Покажем сначала, что указанный метод удовлетворяет условиям леммы 1.

Из условия теоремы следует, что $\varphi(x)$ всюду на $[a, b]$ имеет ограниченную первую производную и поэтому удовлетворяет условию Липшица. Поскольку $\varphi(a) = 1$, то это влечет регулярность метода $\Phi(b-a)/n$ [1, с. 480]. Кроме того,

$$\sup_{x \in [a,b]} \frac{\varphi(x)}{b-x} = \sup_{x \in [a,b]} \left| \frac{\varphi(b) - \varphi(x)}{b-x} \right| < \infty. \tag{3}$$

Для метода $\Phi(b-a)/n$ $a_{nk}=\varphi\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right)-\varphi\left(a+\frac{k+1}{n+1}(b-a)\right)$, $0\leqslant k\leqslant n$, $a_{nk}=0$, $0\leqslant n<k$. Отсюда, используя (3), получаем

$$a_{nn}=\varphi\left(a+\frac{n}{n+1}(b-a)\right)=\frac{b-a}{n+1}\,\frac{\varphi\left(a+\frac{n}{n+1}(b-a)\right)}{b-\left(a+\frac{n}{n+1}(b-a)\right)}=O(1/n),$$

т. е. выполнено условие 1) леммы 1.

Далее, имеем $a_{nk}-a_{n,k+1}=\varphi\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right)-2\varphi\left(a+\frac{k+1}{n+1}\times\right.$ $\left.\times(b-a)\right)+\varphi\left(a+\frac{k+2}{n+1}(b-a)\right)$, $0\leqslant k<n$, $n>n_0$. Из условия теоремы следует, что $\varphi(x)$ на $[a,b]$ — выпуклая вверх функция, следовательно, $a_{nk}-a_{n,k+1}\leqslant 0$, $0\leqslant k<n$, $n>n_0$, и выполнено условие 2) леммы 1. Поэтому метод $\Phi(b-a)/n$ равносилен методу средних арифметических и они совместны.

Покажем, что метод $\Phi(b-a)/n$ удовлетворяет условиям леммы 2. Для него $b_{nk}=\varphi\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right)-\varphi\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$, $0\leqslant k\leqslant n$, $n>0$, $b_{00}=\varphi(a)=1$, $b_{nk}=0$, $0\leqslant n<k$.

Для того чтобы матрица $B=(b_{nk})$ была абсолютно регулярной, по известной теореме Кноппа—Лоренца необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) $\sum_{n=k}^{\infty}|b_{nk}|=O(1)$, б) $\sum_{n=k}^{\infty}b_{nk}=1$, $k\geqslant 0$.

Поскольку $\varphi(x)$ удовлетворяет на промежутке $[a,b]$ условию Липшица, то

$$|b_{nk}|\leqslant M\left(a+\frac{k}{n}(b-a)-a-\frac{k}{n+1}(b-a)\right)=M(b-a)\frac{k}{n(n+1)},\tag{4}$$

где $M$ — константа, не зависящая от $n$ и $k$. Из (4) следует, что условие а) выполнено. Кроме того,

$$\sum_{n=k}^{\infty}b_{nk}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=k}^{m}\left(\varphi\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right)-\varphi\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\varphi\left(a+\frac{k}{m+1}(b-a)\right)=\varphi(a)=1,\quad k>0,$$

поскольку $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$, и $\sum_{n=0}^{\infty}b_{n0}=\varphi(a)=1$. Выполнено условие б), поэтому метод $\Phi(b-a)/n$ абсолютно регулярен.

Так как для метода $\Phi(b-a)/n$ $b_{nn}=a_{nn}$, то условие 1) леммы 2 выполнено.

Положим $f_k(x)=\frac{1}{k}\varphi\left(a+\frac{k}{x}(b-a)\right)-\frac{1}{k+1}\varphi\left(a+\frac{k+1}{x}(b-a)\right)$ для $0<k\leqslant x-1$. Дифференцируя, получаем

$$f_k'(x)=\frac{b-a}{x^2}\left(\varphi'\left(a+\frac{k}{x}(b-a)\right)-\varphi'\left(a+\frac{k+1}{x}(b-a)\right)\right).$$

Поскольку $\varphi''(x)\leqslant 0$ на $[a,b]$, то производная $\varphi'(x)$ на этом промежутке не возрастает, поэтому $f_k'(x)\leqslant 0$ для $0<k\leqslant x-1$, и $f_k(n)\geqslant f_k(n+1)$

для $0 < k < n$, т. е.

$$\frac{1}{k}\varphi\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)-\frac{1}{k+1}\varphi\left(a+\frac{k+1}{n}(b-a)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{k}\varphi\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right)-\frac{1}{k+1}\varphi\left(a+\frac{k+1}{n+1}(b-a)\right),$$

или

$$\frac{1}{k}\left(\varphi\left(a+\frac{k}{n+1}(b-a)\right)-\varphi\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{k+1}\left(\varphi\left(a+\frac{k+1}{n+1}(b-a)\right)-\varphi\left(a+\frac{k+1}{n}(b-a)\right)\right),\quad 0<k<n.$$

Следовательно, выполнено условие 2) леммы 2, поэтому метод $\Phi\,(b-a)/n$ абсолютно равносилен методу средних арифметических и они абсолютно совместны. Теорема доказана.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что методы Фавара, Рогозинского и средних арифметических удовлетворяют условиям доказанной теоремы. Для метода Рогозинского установленные факты известны (см. [1, с. 488] и теорему 2 из [4]).


1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М. : Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
2. *Agnew R.* Equivalence of methods for evaluation of sequences.— Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, p. 550—565.
3. *Кузьмич В. И.* О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. Киев : Киевск. пед. ин-т, 1979, с. 50—61.
4. *Кузьмич В. И.* Об абсолютном суммировании рядов методом Рогозинского — Бернштейна.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 3, с. 398—406.



Херсонский
педагогический институт



Поступила в редакцию
06.10.81