УДК 517.9

Ф. У. Носиров

Усреднение в некоторых гироскопических системах с запаздыванием

Многие задачи динамики гироскопических устройств приводят к рассмотрению систем дифференциальных уравнений вида [1]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu_1(\tau)\frac{dy(t-\varepsilon\Delta_1)}{dt} = \varepsilon f_1(\tau, \omega t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, x(t-\Delta_2),$$

$$y(t-\Delta_2), \dot{x}(t-\Delta_2), \dot{y}(t-\Delta_2)),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \nu_2^2(\tau)\frac{dx(t-\varepsilon\Delta_1)}{dt} = \varepsilon f_2(\tau, \omega t, x, y, \dot{x}, \dot{y},$$

$$x(t-\Delta_2), y(t-\Delta_2), \dot{x}(t-\Delta_2), \dot{y}(t-\Delta_2)), \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, характеризующее медленное изменение некоторых параметров системы; x, y — обобщенные координаты; f_1 и f_2 — рациональные функции своих аргументов; Δ_1, Δ_2 — положительные постоянные.

Для приведения системы (1) к уравнениям в стандартной форме введем новые медленно меняющиеся переменные M_1, N_1, N_2, θ согласно формулам

$$x = N_1 + M_1\nu(\tau)\nu_2^{-2}(\tau)\cos\psi, \quad y = N_2 + M_1\sin\psi, \quad dx/dt = -M_1\nu_1^2(\tau)\sin\psi,$$

$$dy/dt = M_1\nu(\tau)\cos\psi, \tag{2}$$

где приняты такие обозначения: $\nu(\tau) = \nu_1(\tau)\nu_2(\tau)$, $\psi = \omega + \theta$, $d\omega/dt = \nu(\tau)$, $\theta = \mathrm{const}$. Структуру формул замены (2) выбираем согласно общему решению невозмущенной системы.

После обычных выкладок для новых переменных M_1, N_1, N_2, θ получаем систему уравнений в стандартной форме, эквивалентную системе (1),

$$\frac{dM_1}{dt} = \varepsilon\left[\frac{1}{\nu(\tau)}F_2\cos\varphi - \frac{1}{\nu_1^2(\tau)}F_1\sin\psi + \Delta_1\cdot M_1\nu^2(\tau)\right],$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\varepsilon\left[\frac{1}{\nu_2^2(\tau)}F_2 + \Phi_1 + \Delta_1 M_1\nu_1^2(\tau)\cos\psi\right],$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \varepsilon \left[\frac{1}{\nu_2^2(\tau)} F_1 - \Delta_1 M_1 \nu^2(\tau) \sin\psi \right], \qquad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon \left[\frac{1}{M_1 \nu_1^2(\tau)} F_1 \cos\psi + \frac{1}{\nu(\tau) M_1} F_2 \sin\psi \right],$$

где введены такие обозначения: $F_1 = f_1 + M_1 [\nu_1^2(\tau)]_\tau^1 \sin\psi$, $F_2 = f_2 - M_1 \nu'_\tau(\tau) \cos\psi$, $\Phi_1 = -M_1 \left[\frac{\nu(\tau)}{\nu_2^2(\tau)} \right]_\tau^1 \cos\psi$.

К системе (3) можно применить метод усреднения [1], при этом в первом приближении считаем τ постоянным параметром и усреднение ведем только по t, явно входящему в правую часть системы (3).

В качестве иллюстрации изложенного приема приведем пример влияния малого периодического момента относительно оси внутреннего кольца карданова подвеса на уходы гироскопа, установленного колеблющимся вокруг двух взаимно перпендикулярных осей основания. Указанный момент может, например, возникать при смещении центра тяжести ротора относительно геометрического центра подвеса и вибрации основания. В случае взаимной перпендикулярности колец и при некоторых упрощениях задача сводится к системе уравнений возмущенного движения [2]

$$\frac{d^2\beta_1}{dt^2} - \nu_1^2 \frac{d\alpha_1(t-\varepsilon\Delta)}{dt} = a_2\omega_2 \sin\omega_2 t + m\cos\omega t + \varepsilon f_1(\alpha_1, \dot{\alpha}_1(t-\Delta), \beta_1,$$

$$\dot{\beta}_1(t-\Delta), \omega_1 t, \omega_2 t), \quad \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \nu_2^2 \frac{d\beta_1(t-\varepsilon\Delta)}{dt} = -\nu_2^2 a_2\omega_2 \cos\omega_2 t + \qquad (4)$$

$$+ \varepsilon f_2(\alpha_1, \dot{\alpha}_1(t-\Delta), \beta_1, \dot{\beta}_1(t-\Delta), \omega, t, \omega_2 t),$$

где Δ — положительная постоянная,

$$f_1 = -L_1\dot{\beta}_1(t-\varepsilon\Delta) + [\nu_1^2\beta_1 - (1+L)\dot{\alpha}(t-\varepsilon\Delta)] a_1\omega_1 \cos\omega_1 t +$$
$$+ \alpha_1 a_1 \omega_1^2 \sin\omega_1 t + \nu_1^2 a_1 a_2 \omega_1 \cos\omega_1 t \sin\omega_2 t,$$

$$f_2 = -L_2\dot{\alpha}_1(t-\varepsilon\Delta) + [(L_1+L_2)\dot{\beta}_1(t-\varepsilon\Delta) - \alpha_1\nu_2^2] a_1\omega_1 \cos\omega_1 t -$$
$$- L_1\beta_1 a_1 \omega_1^2 \sin\omega, t + a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t - \omega_2^2 a_1 a_2 \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t +$$
$$+ L_3 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t.$$

Общее решение «невозмущенной» системы, соответствующей (4) ($\varepsilon=0$), имеет вид

$$\beta_1 = N_1 + M_1 \sin\psi - a_2 \sin\omega_2 t + \frac{m}{\nu^2 - \omega^2} \cos\omega t,$$

$$\alpha_1 = N_2 + M_1 \frac{\nu}{\nu_1^2} \cos\psi - \frac{\nu_2^2 m}{\nu^2 - \omega^2} \sin\omega t,$$

где $\psi = \nu t + \theta$, $\nu = \nu_1 \cdot \nu_2$ — собственная частота мутационных колебаний; M_1, N_1, N_2, θ — произвольные положительные постоянные; ω — частота возмущающего момента.

Для исследования системы (4) применяем метод усреднения, приведя ее предварительно к системе в стандартной форме при помощи следующей замены переменных:

$$\beta_1 = N_1 + M_1 \sin\psi - a_2 \sin\omega_2 t + \frac{m}{\nu^2 - \omega^2} \cos\omega t, \quad \alpha_1 = N_2 + M_1 \frac{\nu}{\nu_1^2} \cos\psi -$$

$$- \frac{\nu_2^2 m}{\omega(\nu^2 - \omega^2)} \sin\omega t, \quad \dot{\beta}_1 = M_1 \nu \cos\psi - a_2\omega_2 \cos\omega_2 t - \frac{m\omega}{\nu^2 - \omega^2} \sin\omega t,$$

$$\dot{\beta}_1(t-\Delta) = M_1\nu(\cos\nu\Delta\cos\psi + \sin\nu\Delta\sin\psi) - a_2\omega_2(\cos\omega_2\Delta\cos\omega_2 t + \\ + \sin\omega_2\Delta\sin\omega_2 t) - \frac{m\omega}{\nu^2-\omega^2}(\cos\omega\Delta\sin\omega t - \sin\omega\Delta\cos\omega t),$$

$$\dot{\alpha}_1 = -M_1\frac{\nu^2}{\nu_1^2}\sin\psi - \frac{\nu_2^2 m}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t,\quad \dot{\alpha}_1(t-\Delta) = -M_1\frac{\nu^2}{\nu_1^2}\times \\ \times(\cos\Delta\nu\sin\psi - \sin\Delta\nu\cos\psi) - \frac{\nu_2^2 m}{\nu^2-m^2}(\cos\Delta\omega\cos\omega t + \sin\Delta\omega\sin\omega t).$$

В результате получаем

$$\frac{dM_1}{dt} = \varepsilon\left\{-\left(\frac{1}{\nu_2^2}f_2 + \Delta a_2\omega_2^2\sin\omega_2 t - \frac{m\omega^2\Delta}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t\right)\sin\psi + \right. \\ \left. + \left(\frac{f_1}{\nu} - \frac{\Delta m\nu\omega}{\nu^2-\omega^2}\sin\omega t\right)\cos\psi + M_1\Delta\nu^2\right\} = -\varepsilon\{M_1 l_2\cos\Delta\nu\sin^2\psi + \\ + M_1 l_1\cos\Delta\nu\cos^2\psi + M_1\Delta\nu^2 + F_1(M_1, N_1, N_2, \psi, \omega_1 t, \omega_2 t)\},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{M_1}\left\{\left(-\frac{f_2}{\nu_2^2} - \Delta a_2\omega_2^2\sin\omega_2 t + \frac{\Delta m\omega^2}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t\right)\cos\varphi + \right. \\ \left. + \left(-\frac{f_1}{\nu} + \frac{\Delta m\omega\nu}{\nu^2-\omega^2}\sin\omega t\right)\sin\psi\right\} = \frac{\varepsilon}{M_1}\{l_2 M_1\sin\Delta\nu\cos^2\psi + \\ + l_1 M_1\sin\Delta\nu\sin^2\psi + F_2(M_1 M, N_2, \psi, \omega_1 t, \omega_2 t)\},$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{1}{\nu_2^2}f_2 + \frac{\Delta m\omega\nu_2^2}{\nu^2-\omega^2}\sin\omega t - \Delta M_1\nu\nu_2^2\cos\psi\right\} = \\ = \varepsilon\left\{\frac{1}{\nu_2^2}\left[(L_1+L_2)\left[-a_2\omega_2\cos\omega_2 t\cos\omega_2\Delta + \right.\right.\right. \\ \left. + \frac{m\omega}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t\sin\Delta\omega\right]a_1\omega_1\cos\omega_1 t + L_1 a_1 a_2\omega_1^2\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t + \\ \left.\left. + L_3 a_1 a_2\omega_1^2\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\right] + F_3(M_1, N_1, N_2, \varphi, \omega_1 t, \omega_2 t)\right\}, \tag{5}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \varepsilon\left\{-\frac{f_1}{\nu_1^2} + \Delta a_2\omega_2^2\sin\omega t - \frac{\Delta m\omega^2}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t - M_1\nu^2\Delta\sin\psi\right\} = \\ = \varepsilon\left\{-\frac{a_1\omega_1}{\nu_1^2}\left[(1+L)\frac{\nu_2^2 m}{\nu^2-\omega^2}\cos\Delta\omega\cos\omega t + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\nu_1^2 m}{\nu^2-\omega^2}\cos\omega t\right]\cos\omega_1 t + F_4(M_1, N_1, N_2, \psi, \omega_1 t, \omega_2 t)\right\},$$

Здесь $F_i(M_1, N_1, N_2, \psi, \omega_1 t, \omega_2 t]$, $i = 1, 2, 3, 4$,— 2π-периодические функции по ψ, $\omega_1 t$, $\omega_2 t$, среднее значение которых по времени

$$\bar{F}_i = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F_i(M_1, N_1, N_2, \psi, \omega_1 t, \omega_2 t)\,dt = 0. \tag{6}$$

Из уравнений (5), применяя принцип усреднения, с учетом запаздывания и значений (6) в первом приближении получаем

$\overline{dM}_1/dt = -\varepsilon\overline{M}_1\ \ 0{,}5(L_1+L_2)\cos\Delta\nu - \Delta\nu^2)$, $\overline{d}\theta/dt = \varepsilon\ \ 0{,}5(L_2+L_1)\sin\Delta\nu$,

$$\frac{d\overline{N}_1}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega, \\ \varepsilon \dfrac{1}{2\nu_2^2} \cdot \dfrac{m\omega^2 a_1}{\nu^2 - \omega^2} (L_1 + L_2) \sin \Delta\omega, & \text{если } \omega = \omega_1 \neq \omega_2, \\ \varepsilon \dfrac{a_1 a_2 \omega_1^2}{2\nu_2^2} [L_3 - L_2 \cos \Delta\omega_1 + L_1 (1 - \cos \Delta\omega_1)], & \text{если } \omega_1 = \omega_2 \neq \omega, \end{cases}$$

$$\frac{d\overline{N}_2}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_1 \neq \omega \\ -\varepsilon \dfrac{a_1 \omega m}{2(\nu^2 - \omega^2)} \left[1 + \dfrac{\nu_2^2}{\nu_1^2} (1 + L) \cos \Delta\omega\right], & \text{если } \omega_1 = \omega. \end{cases}$$

Отсюда $\overline{M}_1 = M_{10} e^{-\varepsilon \left(\frac{L_1 + L_2}{2} \cos \Delta\nu - \Delta\nu^2\right) t}$, $\overline{\theta} = \varepsilon \dfrac{L_1 + L_2}{2} t \sin \Delta\nu + \theta_{10}$.

$$\overline{N}_1 = \begin{cases} N_{10}, & \text{если } \omega_1 \neq \omega_2 = \omega, \\ \varepsilon \dfrac{1}{2\nu_2^2} \dfrac{m\omega^2 a_1}{\nu^2 - \omega^2} (L_1 + L_2) \sin \Delta\omega \cdot t + N_{10}^{(1)}, & \text{если } \omega = \omega_1 \neq \omega_2, \\ \varepsilon \dfrac{a_1 a_2 \omega_1^2}{2\nu^2} [L_3 - L_2 \cos \omega_1 + L_1 (1 - \cos \Delta\omega_1) t + N_{10}^{(2)}, & \text{если } \omega_1 = \omega_2 \neq \omega, \end{cases}$$

$$\overline{N}_2 = \begin{cases} N_{20}, & \text{если } \omega_1 \neq \omega, \\ -\varepsilon \dfrac{a_1 \omega m}{2(\nu^2 - \omega^2)} \left[1 + \dfrac{\nu_2^2}{\nu_1^2} (1 + L) \cos \Delta\omega\right] t + N_{20}^{(1)}, & \text{если } \omega_1 = \omega, \end{cases} \tag{7}$$

где M_{10}, θ_{10}, N_{10}, $N_{10}^{(1)}$, $N_{20}^{(2)}$, $N_{20}^{(1)}$ — постоянные интегрирования.

Анализируя формулы (7), отметим затухание нутационных колебаний под действием «малого» трения ($\overline{M}_1 \to 0$, при $t \to \infty$), при этом запаздывания ($\Delta > 0$) ускоряют процесс затухания.

Запаздывание изменяет частоту нутационных колебаний ν. При совпадении частот обоих колебаний ($\omega_1 = \omega_2$) гироскоп теряет устойчивость: имеет место систематический уход по углу β со средней угловой скоростью

$$\dot{\overline{\beta}}_1 = \varepsilon^2 \frac{a_1 a_2 \omega_1^2}{2\nu_2^2} [L_3 - L_2 \cos \Delta\omega_1 + L_1 (1 - \cos \Delta\omega_1)].$$

Этого можно избежать, если $\Delta = 2k\pi/\omega_1^{-1}$, а зависимость между моментами инерции ротора и колец подобрать так, чтобы $L_3 = L_2$.

При совпадении частот возмущающего момента с частотой колебания основания вокруг одной из осей ($\omega = \omega_1$) обнаруживается систематический уход по углам α и β со средней угловой скоростью

$$\dot{\alpha}_1 = -\varepsilon^2 \frac{a_1 \omega_m}{2(\nu^2 - \omega^2)} \left[1 + (1 + L) \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2} \cos \Delta\omega\right],$$

$$\dot{\beta}_1 = \varepsilon^2 \frac{m\omega^2 a_1}{2\nu_2^2 (\nu^2 - \omega)^2} (L_1 + L_2) \sin \Delta\omega,$$

причем скорость может резко возрасти, если частота нутационных колебаний ν близка к частоте возмущающего момента ω (случай резонанса).

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
2. *Климчук В. И.* К вопросу о движении астатического гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании.— Прикл. механика, 1966, 2, N 2, с. 76—80.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
15.10.82