УДК 517.956

В. А. Маловичко

К теории краевых задач для уравнений смешанно-составного типа третьего порядка

Пусть G — ограниченная область в R^n с кусочно гладкой границей ∂G. В цилиндрической области $\Omega = G \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu(x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}[k(x, t) u_{tt} + Au(x, t) - Bu(x, t)] + Cu(x, t) + a(x, t) u_{tt} + + b(x, t) u_t = f(x, t), \qquad (1)$$

где $a(x, t) \geqslant \alpha_1 > 0$, $2a(x, t) - k_t(x, t) \geqslant 0$,

$$Au(x, t) = \sum_{i,j=1}^{m} [a^{ij}(x, t) u_{x_i}]_{x_j}, \quad Bu(x, t) = \sum_{i,j=1}^{m} [b^{ij}(x, t) u_{x_i}]_{x_j},$$

$$Cu(x, t) = \sum_{i,j=1}^{m} c^{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} c^i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u,$$

$m \leqslant n$, матрицы $\{a^{ij}(x, t)\}$, $\{b^{ij}(x, t)\}$, $\{c^{ij}(x, t)\}$ симметричны и неотрицательны, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \sum_{i,j=1}^{m} b^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \sum_{i,j=1}^{m} c^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant 0$$

для всех точек $(x, t) \in \Omega$ и любого вектора $(\xi_1, \dots, \xi_m) \in R^m$, причем

$$\sum_{i,j=1}^{m} (2c^{ij}(x, t) + a_t^{ij}(x, t) - b_t^{ij}(x, t))\xi_i\xi_j \geqslant 0.$$

Уравнение (1) относится к классу уравнений смешанно-составного типа [1]. В настоящей работе доказаны существование слабого и единственность сильного решений смешанной краевой задачи для уравнения (1).

Всюду ниже будем предполагать, что $k(x, t)$, $a(x, t)$, $a^{ij}(x, t)$, $b^{ij}(x, t)$, $c^{ij}(x, t) \in C^2(\overline{\Omega})$; $b(x, t)$, $c^i(x, t) \in C^1(\overline{\Omega})$; $c(x, t) \in C(\overline{\Omega})$.

Пусть $(l_1(x), \dots, l_n(x), l_{n+1}(t))$ — вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω в точке $(x, t) \in \partial\Omega$, $S = \partial G \times (0, T)$,

$$c_1(x, t) = \sum_{i,j=1}^{n} c^i(x, t) l_i(x) - \sum_{i,j=1}^{m} c_{x_j}^{ij}(x, t) l_i(x), \ (x, t) \in S.$$

Выделим следующие части границы $\partial\Omega$:

$$S_1 = \left\{(x, t) \in S: \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x, t) l_i(x) l_j(x) > 0\right\},$$

$$S_2 = \left\{(x, t) \in S: \sum_{i,j=1}^{m} b^{ij}(x, t) l_i(x) l_j(x) > 0\right\},$$

$$S_3 = \left\{(x, t) \in S_1 \cap S_2: \sum_{j=1}^{m} (a^{ij}(x, t) - b^{ij}(x, t)) l_j(x) = 0, \ i = 1, \dots, m\right\},$$

$$S_4 = (S_1 \cup S_2) \setminus S_3, \ S_5 = \left\{(x, t) \in S: \sum_{i,j=1}^{m} c^{ij}(x, t) l_i(x) l_j(x) > 0\right\},$$

$$S_6^- = \{(x, t) \in S \setminus S_5 : c_1(x, t) < 0\},\ S_6^+ = \{(x, t) \in S \setminus S_5 : c_1(x, t) > 0\},$$

$$S_0 = \{(x, t) \in \partial\Omega : t = 0\},\ S_T = \{(x, t) \in \partial\Omega : t = T\},$$

$$S_0^- = \{(x, t) \in S_0 : k(x, 0) < 0\},\ S_0^+ = \{(x, t) \in S_0 : k(x, 0) > 0\},$$

$$S_T^- = \{(x, t) \in S_T : k(x, T) < 0\},\ S_T^+ = \{(x, t) \in S_T : k(x, T) > 0\},$$

$$S_7 = \left\{(x, t) \in S_4 \cup S_5 : \sum_{i,j=1}^{m} (2c^{ij}(x, t) + a^{ij}(x, t) - b^{ij}(x, t))\, l_i(x)\, l_j(x) > 0\right\},$$

$$S_8 = \{(x, t) \in S_0 \cup S_T : 2a(x, t) - k_t(x, t) > 0\}.$$

Для уравнения (1) будем рассматривать краевую задачу

$$Lu(x, t) = f(x, t),\ (x, t) \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x, t) = 0,\ (x, t) \in S_0 \cup S_T \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6^+, \tag{3}$$

$$u_t(x, t) = 0,\quad (x, t) \in S_0^+ \cup S_T^-. \tag{4}$$

Для оператора L^*, формально сопряженного с оператором L, будем рассматривать краевую задачу

$$L^*v(x, t) = f(x, t),\ (x, t) \in \Omega, \tag{5}$$

$$v(x, t) = 0,\ (x, t) \in S_0 \cup S_T \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6^-, \tag{6}$$

$$v_t(x, t) = 0,\quad (x, t) \in S_0^- \cup S_T^+. \tag{7}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что задачи (2)—(4) и (5)—(7) взаимно сопряжены.

Введем обозначения: $C_1(\overline{\Omega})$ — пространство функций, непрерывных в $\overline{\Omega}$ вместе со своими производными вида

$$u_{x_k},\ u_{x_i x_j},\ u_{t x_i},\ u_{x_i t},\ u_{t x_i x_j},\ u_{x_i t x_j},\ u_{x_i x_j t},\ u_t,\ u_{tt},\ u_{ttt}$$
$$(k = 1, \ldots, n;\ i, j = 1, \ldots, m); \tag{8}$$

U — множество функций $u(x, t) \in C_1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (3), (4); V — множество функций $v(x,t) \in C_1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (6), (7); W — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов пространства $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные вида (8) из $L_2(\Omega)$; W_U — подпространство W, плотным множеством в котором является множество U; W_V — подпространство W, плотным множеством в котором является множество V; H_+ — замыкание по норме

$$\|u\|_{H_+}^2 = \int_\Omega \left[u^2 + (2a - k_t)\, u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{m} (2c^{ij} + a_t^{ij} - b_t^{ij})\, u_{x_i} u_{x_j}\right] dx dt$$

множества функций $u(x, t) \in C_1(\overline{\Omega})$, равных нулю на $S_7 \cup S_8$; H_- — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(\Omega)$ и H_+.

Лемма 1. *Пусть $m < n$ и существуют такие непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции $\lambda_i(x_i)$ $(i = m + 1, \ldots, n)$, что*

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} c^i(x, t)\, \lambda_i(x_i)\right| \geqslant \alpha_2 > 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega. \tag{9}$$

Тогда для любой функции $u(x, t) \in W_U \cap H_+$ будет выполняться энергетическое неравенство

$$\|Lu\|_{H_-} \geqslant \Upsilon_1 \|u\|_{H_+}, \tag{10}$$

где Υ_1 — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $u(x, t)$.

Доказательство. Пусть $u(x, t) \in U$,

$$\omega(x) = \exp\left[\beta\mu \sum_{i=m+1}^{n} \int_{x_i^0}^{x_i} \lambda_i(z_i)\, dz_i\right],$$

где x^0 — некоторая точка области G, $\beta = \operatorname{sgn}\left[\sum_{i=m+1}^{n} c^i(x, t)\,\lambda_i(x_i)\right]$, $(x, t) \in \Omega$, постоянная $\mu > 0$ удовлетворяет условию

$$\mu \left|\sum_{i=m+1}^{n} c^i(x, t)\,\lambda_i(x_i)\right| - c(x, t) - c^*(x, t) \geqslant \alpha_3 > 0, \ \forall (x, t) \in \Omega,$$

где

$$c^*(x, t) = \sum_{i,j=1}^{m} c^{ij}_{x_i x_j}(x, t) - \sum_{i=1}^{n} c^i_{x_i}(x, t) + c(x, t) + a_{tt}(x, t) - b_t(x, t).$$

Интегрируя по частям выражение $-\omega(x)\, u(x, t)\, Lu(x, t)$, получаем

$$-\int_\Omega \omega u L u\, dx dt = \int_\Omega \left[\omega \sum_{i,j=1}^{m}\left(c^{ij} + \frac{1}{2} a^{ij}_t - \frac{1}{2} b^{ij}_t\right) u_{x_i} u_{x_j} + \omega\left(a - \frac{1}{2} k_t\right) u_t^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} u^2 \sum_{i=m+1}^{n} c^i \omega_{x_i} - \frac{1}{2}\omega(c + c^*) u^2\right] dx dy + \int_{\partial\Omega} \omega \left[u(-k u_{tt} - Au + Bu)\, l_{n+1} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} k u_t^2 l_{n+1} + u_t \sum_{i,j=1}^{m} (a^{ij} - b^{ij})\, u_{x_i} l_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} (a^{ij} - b^{ij})\, u_{x_i} u_{x_j} l_{n+1} -$$

$$\left. - u \sum_{i,j=1}^{m} c^{ij} u_{x_i} l_j - a u u_t l_{n+1} + \frac{1}{2} a_t u^2 l_{n+1} - \frac{1}{2} b u^2 l_{n+1} - \frac{1}{2} c_1 u^2\right] d\sigma, \quad (11)$$

где $d\sigma$ — элемент границы $\partial\Omega$. Учитывая свойства функций $u(x, t)$, $\omega(x)$, $c_1(x, t)$ и равенства

$$\sum_{j=1}^{m} (a^{ij}(x, t) - b^{ij}(x, t))\, l_j(x) = 0, \ (x, t) \in S \setminus S_4, \ i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} c^{ij}(x, t)\, l_j(x) = 0, \ (x, t) \in S \setminus S_5, \ i = 1, \ldots, m,$$

из (11) получаем неравенство

$$-\int_\Omega \omega u L u\, dx dt \geqslant \int_\Omega \omega \left[\sum_{i,j=1}^{m}\left(c^{ij} + \frac{1}{2} a^{ij}_t - \frac{1}{2} b^{ij}_t\right) u_{x_i} u_{x_j} + \left(a - \frac{1}{2} k_t\right) u_t^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\mu\left|\sum_{i=m+1}^{n} c^i \lambda_i\right| - c - c^*\right) u^2\right] dx dt,$$

из которого уже легко получить (10).

Лемма 2. *Пусть $m < n$ и выполняется условие (9). Тогда для любой функции $v(x, t) \in W_V \cap H_+$ будет выполняться энергетическое неравенство*

$$\| L^* v \|_{H_-} \geqslant \Upsilon_2 \| v \|_{H_+}, \quad (12)$$

где Υ — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $v(x, t)$.

Лемма 2 доказывается интегрированием по частям выражения $-[\omega(x)]^{-1} v(x, t) L^* v(x, t)$, где $v(x, t) \in V$.

Лемма 3. *Пусть* $m \leqslant n$, $c(x, t) + c^*(x, t) \leqslant \alpha_4 < 0$ *в* Ω. *Тогда для любых функций* $u(x, t) \in W_U \cap H_+$, $v(x, t) \in W_V \cap H_+$ *при некоторых положительных постоянных* Υ_1, Υ_2, *не зависящих от* $u(x, t)$, $v(x, t)$, *будут справедливыми соответственно энергетические неравенства* (10) *и* (12).

Для доказательства леммы 3 достаточно в доказательствах лемм 1, 2 положить $\omega(x) \equiv 1$.

При помощи лемм 1—3 по стандартной методике [2] доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняется хотя бы одно из следующих двух условий*: 1) $m < n$ и выполняется условие (9); 2) $m \leqslant n$, $c(x, t) + c^*(x, t) \leqslant \alpha_4 < 0$ в Ω. *Тогда для любой функции* $f(x, t) \in L_2(\Omega)$ *существует слабое решение* $u(x, t) \in H_+$ *задачи* (2)—(4), *а сильное решение этой задачи если существует, то единственно и непрерывно зависит от* $f(x, t)$. *Кроме того, существует полусильное решение задачи* (2)—(4).

Терминология теоремы совпадает с терминологией [2].

1. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа.— Ташкент: Фан, 1974.— 156 с.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киевский технологический институт
пищевой промышленности

Поступила в редакцию
24.12.80