УДК 519.217

Нгуен Тиен Кхием

О функции плотности вероятностей процессов, определяемых интегро-дифференциальными уравнениями

Вопрос о распространении асимптотических методов на стохастические интегро-дифференциальные уравнения, как подчеркнуто в [1], является одним из актуальных направлений в развитии общей теории асимптотических методов нелинейной механики.

В этой статье на основе теории так называемых условных марковских процессов [2] и идеи асимптотического метода [1] составлено уравнение для плотности вероятностей процессов, определяемых стохастическими интегро-дифференциальными уравнениями. Результат хорошо согласуется с идеей «замораживания» [3].

Уравнение для плотности вероятностей. Исследуем сначала одномерный процесс $x(t)$, $x(0)=x_0$, полагая

$$x - x_0 = H(t, x_0) \equiv H(t) \equiv H(x_0) \tag{1}$$

Вследствие независимости x_0 и t функцию H будем записывать только с интересующим нас аргументом. Характеристическую функцию этого процесса запишем в виде

$$\theta(u) = \langle e^{iu(x-x_0)} \rangle \tag{2}$$

(угловой скобкой обозначен оператор усреднения по вероятности). Разлагая функцию $e^{iu(x-x_0)}$ в ряд Тейлора, находим

$$\theta(u) = 1 + \sum_s \frac{(iu)^s}{s!} \langle H^s(x_0) \rangle. \tag{3}$$

С другой стороны, функция плотности вероятностей процесса выражается через характеристическую функцию

$$W(t, x) = W(x, t, x_0) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x-x_0)} \theta(u)\, du. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), после несложных выкладок получаем

$$W(x, t) = 1 + \sum_{s=1} \frac{1}{s!} \langle H^s(x_0) \rangle \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \delta(x - x_0). \tag{5}$$

Дифференцируя (5) по t, имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{s=1} \frac{1}{(s-1)!} \langle H^{s-1}(x_0) \dot{H}(x_0) \rangle \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \delta(x - x_0), \tag{6}$$

$\dot{H}(x_0)$ обозначает производную от функции $H(t, x_0)$ по t при фиксированном x_0.

Правые части выражений (5) и (6) — бесконечные суммы производных от δ-функции Дирака, имеющие значение только в рамках теории обобщенных функций [4]. Поэтому (5) и (6) придется рассматривать как соотношения между обобщенными функциями. Здесь δ-функция — характерная обобщенная функция, а $W(x, t)$ — регулярная обобщенная функция, порождаемая обычной функцией плотности вероятностей. Поскольку между регулярными обобщенными и обычными порождающими функциями существует взаимно-однозначное соответствие, можно отождествлять каждую регулярную обобщенную функцию с ее порождающей, сохраняя одно и то же обозначение для обеих. Используя свойство функции $a(x_0)\, \delta(x - x_0) = a(x)\, \delta(x - x_0)$, перепишем выражения (5) и (6) в виде

$$W(x, t) = 1 + \sum_{s=1} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \{ \langle H^s(x) \rangle\, \delta(x - x_0) \}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{s=1} \frac{1}{(s-1)!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \{ \langle H^{s-1}(x) \dot{H}(x) \rangle\, \delta(x - x_0) \}. \tag{8}$$

Введем операторы

$$L = \sum_{s=1} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \langle H^s(x) \rangle, \quad \dot{L} = \sum_{s=1} \frac{1}{(s-1)!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \langle H^{s-1}(x) \dot{H}(x) \rangle, \tag{9}$$

действующие следующим образом:

$$Lf(x) = \sum_{s=1} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \{ \langle H^s(x) \rangle f(x) \},$$

т. е. сначала $f(x)$ умножается на $\langle H^s(x) \rangle$, затем дифференцируется и суммируется. Тогда для (7) и (8) получаем

$$W(x, t) = (1 + L)\, \delta(x - x_0), \tag{10}$$

$$\partial W / \partial t = \dot{L} \delta(x - x_0). \tag{11}$$

Для возвращения в пространство обычных функций исключим из (10) и (11) δ-функцию. Получим

$$\partial W/\partial t = \dot{L}\,(1+L)^{-1}\,W(x,\,t) \tag{12}$$

Поскольку $W\,(x,\ t)$ — регулярная обобщенная функция, можем рассматривать (12) в рамках теории обычных функций. Итак, получили уравнение для плотности вероятностей процесса $x\,(t)$.

Предположим, что

$$H\,(x_0) = x - x_0 = \varepsilon H_1\,(x_0) + \varepsilon^2 H_2\,(x_0) + \ldots \tag{13}$$

и представим L и $\dot{L}$ в виде

$$L = -\,\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_1\,(x)\rangle - \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_2\,(x)\rangle + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\langle H_1^2\,(x)\rangle + \ldots,$$

$$\dot{L} = -\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\rangle - \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \dot{H}_2\,(x)\rangle + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\,H_1\,(x)\rangle + \ldots\,. \tag{14}$$

Имеем

$$(1 + L)^{-1} = 1 - L + \ldots = 1 + \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_1\,(x)\rangle + \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_2\,(x)\rangle + $$

$$+\,\varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\langle H_1^2\,(x)\rangle + \ldots$$

и

$$\dot{L}\,(1 + L)^{-1} = -\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\rangle - \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_2\,(x)\rangle + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\,H_1\,(x) -$$

$$-\,\varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\rangle\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_1\,(x)\rangle + \ldots\,. \tag{15}$$

Исходя из свойств оператора L, можно доказать операторное равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\rangle\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_1\,(x)\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\langle \dot{H}\,(x)\rangle\,\langle H_1\,(x)\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\,\langle\frac{\partial \dot{H}_1}{\partial x}\rangle\,\langle H_1\,(x)\rangle. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получаем

$$\dot{L}\,(1 + L) = \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\rangle - \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle H_2\,(x)\rangle + \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle\frac{\partial \dot{H}_1}{\partial x}\rangle\,\langle H_1\,(x)\rangle +$$

$$+\,\varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\,H_1\,(x)\rangle - \varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\langle \dot{H}_1\,(x)\rangle\,\langle H_1\,(x)\rangle \pm \ldots$$

$$\ldots = -\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \dot{H}_1\rangle - \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\langle \dot{H}_2\rangle - \langle\frac{\partial \dot{H}_1}{\partial x}\rangle\,\langle H_1\rangle\right] + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,K\,[\dot{H}_1 H_1].$$

Здесь $K\,[\dot{H}_1,\,H] = \langle \dot{H}_1 H_1\rangle - \langle \dot{H}_1\rangle\,\langle H_1\rangle$. Пренебрегая членами со степенями при ε выше 2, получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial x}\left\{\langle \dot{H}_1\rangle\,W + \varepsilon\left[\langle \dot{H}_2\rangle - \langle\frac{\partial H_1}{\partial x}\rangle\,\langle H_1\rangle\right]W\right\} +$$

$$+\,\varepsilon^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\{K\,[\dot{H}_1,\,H_1]\,W\} \tag{17}$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\,\frac{\partial}{\partial x}\,\{k_1\,(x,\,t)\,W\} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\{k_{11}\,(x,\,t)\,W\} \tag{18}$$

с такими обозначениями:

$$k_1(x, t) = \varepsilon \langle \dot{H}_1(x, t)\rangle + \varepsilon^2 \langle \dot{H}_2(x, t)\rangle - \varepsilon^2 \langle \frac{\partial \dot{H}_1(x, t)}{\partial x}\rangle \langle H_1(x, t\rangle,$$

$$k_{11}(x, t) = 2\varepsilon^2 K[\dot{H}_1(x, t),\ H_1(x, t)]. \tag{19}$$

Назовем $k_1(x, t)$ условным коэффициентом переноса, а $k_{11}(x, t)$ — коэффициентом диффузии. Отметим, что оператор усреднения по вероятности $\langle\ \rangle$ в (19) действует при фиксированном x.

В многомерном случае совершенно аналогично имеем уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\{k_l(x, t) W\} + \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l}\{k_{lm}(x, t) W\}, \tag{20}$$

где

$$k_l(x, t) = \varepsilon\langle \dot{H}_{1l}(x, t)\rangle + \varepsilon^2 \langle \dot{H}_{2l}(x, t) - \varepsilon^2 \sum_i \langle \frac{\partial H_{1l}}{\partial x_i}\rangle \langle H_{1i}(x, t)\rangle,$$

$$k_{lm}(x, t) = 2\varepsilon^2 K[\dot{H}_{1l}(x, t)\cdot H_{1m}(x, t)]. \tag{21}$$

Таким образом, если для процесса $x(t)$ как-то определить H_1, H_2, то уравнение (18) с (19) или (20) с (21) может служить для нахождения функции плотности вероятностей. Перейдем к определению коэффициентов переноса и диффузии для процессов, определяемых интегро-дифференциальными уравнениями.

Определение условных коэффициентов переноса и диффузии. Пусть $x(t)$ определяется уравнением

$$x(t) = F\left(x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds, t\right). \tag{22}$$

Случайное воздействие входит в F неявно посредством t. При выполнении условия

$$\left\| F\left(x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds, t\right)\right\| \ll 1, \tag{23}$$

полагая

$$F = \varepsilon F_1, \quad \varepsilon \ll 1, \tag{24}$$

имеем

$$x(t) = \varepsilon F_1\left(x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds, t\right). \tag{25}$$

Подставляя (13) в (25), находим

$$\int_0^t \varphi(x_0 + \varepsilon H_1(s) + \varepsilon^2 H_2(s) + \ldots, s, t)\, ds = \int_0^t \varphi(x_0, s, t)\, ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \frac{\partial \varphi(x_0, t, s)}{\partial x} H_1(s)\, ds + \ldots = \varphi^0(x_0, t) + \varepsilon\varphi^1(x_0, t) + \ldots,$$

где

$$\varphi^0(x_0, t) = \int_0^t \varphi(x_0, t, s)\, ds, \quad \varphi^1(x_0, t) = \int_0^t \frac{\partial \varphi(x_0, t, s)}{\partial x} H_1(s)\, ds. \tag{26}$$

На практике вместо φ^0, φ^1 из (26) можно взять

$$\varphi^0(x_0, t) = \int_0^\infty \varphi(x_0, t, s)\, ds, \quad \varphi^1(x_0, t) = \int_0^\infty \frac{\partial \varphi(x_0, t, s)}{\partial x} H_1(s)\, ds. \tag{27}$$

Далее,

$$\varepsilon F_1(x_0+\varepsilon H_1(t)+\ldots,\varphi^0+\varepsilon\varphi^1+\ldots,t)=\varepsilon F_1(x_0,\varphi^0(x_0,t),t)+$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{\partial F_1(x_0,\varphi^0,t)}{\partial x}H_1(t)+\frac{\partial F_1(x_0,\varphi^0,t)}{\partial\varphi^0}\varphi^1(x_0,t)\right)+\ldots \tag{28}$$

и

$$\dot{x}=\varepsilon\dot{H}_2(x_0)+\varepsilon^2\dot{H}_2(x_0)+\ldots. \tag{29}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в (28) и (29), находим $\dot{H}_1(x_0)=F_1(x_0,\varphi^0(x_0,t),t)$, $\dot{H}_2(x_0)=\frac{\partial F_1}{\partial x}H_1(x)+\frac{\partial F_1}{\partial\varphi^0}\varphi^1(x_0,t)$.

Рассмотрим $\varphi^1(x_0,t)=\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi(x_0,t,s)}{\partial x}H_1(s)\,ds$. Интегрируя по частям, имеем

$$\varphi^1(x_0,t)=H_1(x_0)\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi(x_0,t,s)}{\partial x}ds-\int\limits_0^t\dot{H}_1(s)\int\limits_0^s\frac{\partial\varphi(x_0,s,\sigma)}{\partial x}d\sigma ds,$$

или, используя (26), —

$$\varphi^1(x_0,t)=\frac{\partial\varphi^0(x_0,t)}{\partial x}H_1(x_0)-\int\limits_0^t\frac{\partial\varphi^0(x_0,s)}{\partial x}\dot{H}_1(s)\,ds.$$

Отсюда для $\dot{H}_2(x_0)$ находим

$$\dot{H}_2(x_0)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial\varphi^0}\cdot\frac{\partial\varphi^0}{\partial x}\right)H_1(x_0)-\int\limits_0^t\frac{\partial F_1}{\partial\varphi^0}\cdot\frac{\partial\varphi^0(x_0,s)}{\partial x}\dot{H}_1(s)\,ds.$$

Вводя обозначение $f_1(x_0,t)=F_1(x_0,\varphi^0(x_0,t),t)$, запишем

$$\langle\dot{H}_1(x_0)\rangle=\langle f_1(x_0,t)\rangle,$$

$$\dot{H}_2(x)=\langle\frac{\partial f(x_0,t)}{\partial x}H_1(x_0)\rangle-\langle\int\limits_0^t\frac{\partial F_1}{\partial\varphi^0}\cdot\frac{\partial\varphi^0(x_0,s)}{\partial x}f_1(s)\rangle\,ds. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (19), находим

$$k_1(x,t)=\langle\varepsilon f_1(x,t)\rangle+\varepsilon^2\int\limits_0^t K\left[\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x},f_1(x,\tau)\right]d\tau-$$
$$-\varepsilon^2\int\limits_0^t\langle\frac{\partial F_1(x,\varphi^0,t)}{\partial\varphi^0}\cdot\frac{\partial\varphi^0(x,\tau)}{\partial x}f_1(x,\tau)\rangle\,d\tau, \tag{31}$$

$$k_{11}(x,t)=2\varepsilon^2\int\limits_0^t K[f_1(x,t),f_1(x,\tau)]\,d\tau.$$

Для большого t вместо (31) можно вычислить k_1, k_{11} по формулам

$$k_1(x,t)=\langle\varepsilon f_1\rangle+\varepsilon^2\int\limits_0^\infty K\left[\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x},f_1(x,\tau)\right]d\tau-$$
$$-\varepsilon^2\int\limits_0^\infty\langle\frac{\partial F_1(x,\varphi^0,t)}{\partial\varphi^0}\cdot\frac{\partial\varphi^0(x,\tau)}{\partial x}f_1(x,\tau)\,d\tau\rangle, \tag{32}$$

$$k_{11}(x,t)=2\varepsilon^2\int\limits_0^\infty K[f_1(x,t),f_1(x,\tau)]\,d\tau.$$

Учитывая (24) и обозначая

$$f(x,t)=F(x,\varphi^0(x,t),t), \tag{33}$$

получаем

$$k_1(x,t)=\langle f(x,t)\rangle+\int_0^\infty K\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x},f(x,\tau)\right]d\tau-\int_0^\infty\langle\frac{\partial F(x,\varphi^0,t)}{\partial\varphi^0}\times$$

$$\times\frac{\partial\varphi^0(x,\tau)}{\partial x}f(x,\tau)\,d\tau\rangle,\quad k_{11}(x,t)=2\int_0^\infty K[f(x,t),f(x,\tau)]\,d\tau. \tag{34}$$

Итак, для плотности вероятностей процесса, определяемого уравнением (22), имеем уравнение (18) с коэффициентами (34).

Аналогично для многомерного процесса $x_l=x_l(t)$, $l=\overline{1,n}$, определяемого из уравнения

$$\dot{x}_l=F_l\left(x_l,\int_0^t\varphi_l(t,s,x_l(s)\,ds,t\right),\quad l=\overline{1,n}, \tag{35}$$

для плотности $W(x_1,\dots,x_n,t)$ имеем уравнение (20) с коэффициентами

$$k_l(x,t)=\langle f_l(x,t)\rangle+\int_0^\infty\sum_i K\left[\frac{\partial f_l(x,t)}{\partial x_i},f_i(x,\tau)\right]d\tau-$$

$$-\int_0^\infty\sum_{ij}\langle\frac{\partial F_l(x,\varphi^0,t)}{\partial\varphi_i^0}\cdot\frac{\partial\varphi_i^0(x,\tau)}{\partial x_j}f_j(x,\tau)\,d\tau\rangle,$$

$$k_{lm}(x,t)=2\int_0^\infty K[f_l(x,t),f_m(x,\tau)]\,d\tau, \tag{36}$$

где

$$\varphi_l^0(x,t)=\int_0^\infty\varphi_l(t,s,x)\,ds,\quad f_l(x,t)=F_l(x,\varphi^0(x,t),t). \tag{37}$$

Уравнения (18) и (20) справедливы при условии (23), которое во многих случаях может выполняться.

Допустим, что F_l имеет вид

$$F_l=A_l\left(x,\int_0^t\varphi(t,s,x(s))\right)ds+B_{li}\left(x,\int_0^t\psi(t,s,x(s))\,ds,t\right)\xi_i(t), \tag{38}$$

где $\langle\xi_i\rangle=0$ $\langle\xi_i(t)\,\xi_j(t+\tau)\rangle=\varkappa_{ij}\delta(\tau)$, $\varkappa_{ij}=\begin{cases}\varkappa_{i/2}, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$ Тогда (36) принимает вид

$$k_l=A_l^0(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{ij}\varkappa_i\frac{\partial B_{li}^0}{\partial x_j}B_{ji}^0-\frac{1}{2}\sum_{ijk}\varkappa_i\frac{\partial B_{li}^0}{\partial\psi_k^0}\cdot\frac{\partial\psi_k^0}{\partial x_j}\cdot B_{ji}^0-$$

$$-\sum_{kj}\int_0^\infty\frac{\partial A_l^0}{\partial\varphi_k^0}\cdot\frac{\partial\varphi_k^0(x,s)}{\partial x_j}A_j^0(x,s)\,ds; \tag{39}$$

$$k_{lm}=\sum_i\varkappa_iB_{li}^0B_{mi}^0, \tag{40}$$

где $\varphi_k^0(x, t) = \int\limits_0^\infty \varphi_k(t, s, x)\,ds$, $\psi_k^0(x, t) = \int\limits_0^\infty \psi_k(t, s, x)\,ds$, $A_l^0(x, t) = A_l(x, \varphi^0 \times$
$\times (x, t), t)$, $B_{lm}^0(x, t) = B_{lm}(x, \psi^0(x, t), t)$.

Полагая $t = \varepsilon\tau$, перепишем (38)

$$\frac{dx_l}{d\tau} = \varepsilon A_l\left(x, \int\limits_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\,ds, \tau\right) + \sqrt{\varepsilon} B_{li}\left(x, \int\limits_0^\tau \psi(\tau, s, x(s))\,ds, \tau\right)\xi_i(\tau) \quad (41)$$

и соответственно (39)

$$k_l = \varepsilon A_l^0 + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{ij}\varkappa_i \frac{\partial B_{li}^0}{\partial x_j} B_{ji}^0 - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{jik}\varkappa_i \frac{\partial B_{li}^0}{\partial \psi_k^0}\cdot\frac{\partial \psi_k^0}{\partial x_j}\cdot B_{ji}^0 -$$
$$- \varepsilon^2\int\limits_0^\infty \frac{\partial A_l^0}{\partial \varphi_k^0}\cdot\frac{\partial \varphi_k^0(x, s)}{\partial x_j} A_j^0(x, s)\,ds. \quad (42)$$

Так как коэффициенты пропорциональны $\varepsilon \ll 1$, (20) имеет стандартный, по Хасьминскому, вид. Так что мы можем применить схему усреднения Хасьминского. Отсюда можно получить принцип усреднения для (41).

П р и м е р. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda\int\limits_0^t R(t - s)\,x(s)\,ds + \sigma\xi(t), \quad \langle\xi(t)\rangle = 0, \quad (43)$$

положив $\dot{x} = y$, последнее заменим системой

$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = -\omega^2 x + \lambda\int\limits_0^t R(t - s)\,x(s)\,ds + \sigma\xi(t). \quad (44)$$

В этом случае $A_1^0 = y$, $A_2^0 = -\omega^2 x + \lambda R_\infty x$, $B_{22} = \sigma$, $R_\infty = \int\limits_0^\infty R(\sigma)\,d\sigma$ и (36) можно вычислить: $k_1 = y$, $k_2 = -(\omega^2 - \lambda R_\infty)\,x - \lambda R_\infty y$, $k_{22} = \sigma^2$. Для плотности $W(x, y, t)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -y\frac{\partial W}{\partial x} + (\omega^2 - \lambda R_\infty)\,x\frac{\partial W}{\partial y} + \lambda R_\infty\frac{\partial}{\partial y}(yW) + \sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \quad (45)$$

При стационарном процессе плотность вероятностей удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial W}{\partial x} + (\lambda R_\infty - \omega^2)\,x\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\lambda R_\infty yW + \sigma^2\frac{\partial W}{\partial y}\right\}, \quad (46)$$

из которого находим

$$W(x, y) = A\exp\left\{-\left(\frac{\lambda R_\infty}{2\sigma^2}y^2 + \frac{\lambda R_\infty(\omega^2 - \lambda R_\infty)}{2\sigma^2}x^2\right)\right\}. \quad (47)$$

Для x имеем

$$W_1(x) = A_1\exp\left\{-\frac{\lambda R_\infty(\omega^2 - \lambda R_\infty)}{2\sigma^2}x^2\right\}. \quad (48)$$

С помощью (48) можно вычислить дисперсию

$$\sigma_x^2 = \sigma^2/[\lambda R_\infty(\omega^2 - \lambda R_\infty)]. \quad (49)$$

Сравнивая результаты с полученным в [5], видим что (49) дает хорошее приближение. Они полностью совпадают, если $R(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha \approx \omega$.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
2. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флюктуации в радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1961.— 558 с.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.— Ташкент : Фан, 1974.— 214 с.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1976.— 280 с.
5. *Нгуен Тиен Кхием, Нгуен Донь Ань.* Об одном методе исследования случайных колебаний линейных вязко-упругих систем.— Механика, Ханой, 1979, № 3/4. Вьетнам.

Вьетнам

Поступила в редакцию
26.02.82