УДК 517.94

Н. И. Шкиль, И. М. Конет

Асимптотические свойства формальных фундаментальных матриц систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр

В работах [1, 2] и многих других исследовались системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами и системы с малым параметром при производной.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной вида

$$\varepsilon^{p/q} \frac{d^2x}{dt^2} + A(t, \varepsilon)\, x = 0, \tag{1}$$

где $x(t, \varepsilon)$ — искомый n-мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, p и q — произвольные натуральные числа, $A(t, \varepsilon)$ — действительная квадратная матрица типа $n \times n$. Предполагается, что матрица $A(t, \varepsilon)$ представлена сходящимся рядом по степеням малого параметра

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t). \tag{2}$$

Уравнение

$$\det[A_0(t) - \lambda(t)E] = 0 \qquad (3)$$

(E — единичная матрица) принято называть характеристическим, а его корни $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_l(t)$, $1 \leqslant l \leqslant n$, — собственными значениями матрицы $A_0(t)$. Всюду в дальнейшем предполагается, что как кратность корней $\lambda_j(t)$, $j = \overline{1, l}$, так и кратность соответствующих им элементарных делителей не меняется при $\forall\, t \in [0, L]$ ($L > 0$ — произвольное действительное число).

Следуя [3], формальной матрицей системы (1) будем называть матрицу, которая, будучи подставлена в эту систему, превращает ее в тождество в смысле равенства двух формальных матричных степенных рядов.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия: 1) матрицы $A_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots$, неограниченно дифференцируемы по t на сегменте $[0, L]$, 2) характеристическое уравнение (3) имеет кратные корни $\lambda_j(t) \neq 0$, $j = \overline{1, l}$, и каждому корню соответствует элементарный делитель тождественной кратности $k_j \left(\sum_j k_j = n\right)$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\forall t \in [0, L]$ система (1) имеет формальную фундаментальную матрицу*

$$X(t, \varepsilon) = U(t, \varepsilon) H(t, \varepsilon), \qquad (4)$$

где $U(t, \varepsilon)$ — квадратная матрица размеров $n \times n$, состоящая из прямоугольных матриц $U_j(t, \mu_j)$

$$U(t, \varepsilon) = [U_1(t, \mu_1), U_2(t, \mu_2), \ldots, U_l(t, \mu_l)] \qquad (5)$$

размеров $n \times k_j$, допускающих разложения

$$U_j(t, \mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s U_{js}(t), \quad \mu_j = \sqrt[2k_jq]{\varepsilon}, \quad j = \overline{1, l}; \qquad (6)$$

$$H(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{H_1(t, \varepsilon), H_2(t, \varepsilon), \ldots, H_l(t, \varepsilon)\} \qquad (7)$$

— квазидиагональная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$dH/dt = \Lambda(t, \varepsilon) H, \qquad (8)$$

в котором

$$\Lambda(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{i\mu_1^{-k_1p}\Lambda_1(t, \mu_1), i\mu_2^{-k_2p}\Lambda_2(t, \mu_2), \ldots, i\mu_l^{-k_lp}\Lambda_l(t, \mu_l)\}, \quad i = \sqrt{-1}. \qquad (9)$$

Здесь $H_j(t, \varepsilon)$ и $\Lambda_j(t, \mu_j)$ — квадратные матрицы размеров $k_j \times k_j$, причем матрицы $\Lambda_j(t, \mu_j)$ допускают разложения

$$\Lambda_j(t, \mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s \Lambda_{js}(t), \quad j = \overline{1, l}, \qquad (10)$$

и $\Lambda_{js}(t)$, $j = \overline{1, l}$, $s = 1, 2, \ldots$, — диагональные матрицы.

Доказательство. Предположим, что (4) — формальная матрица системы (1). Тогда, подставляя $X(t, \varepsilon)$ и ее вторую производную в систему, с учетом (8) приходим к уравнению

$$\varepsilon^{p/q}(U''(t, \varepsilon) + 2U'(t, \varepsilon)\Lambda(t, \varepsilon) + U(t, \varepsilon)\Lambda'(t, \varepsilon) + U(t, \varepsilon)\Lambda^2(t, \varepsilon))) + {} \\ + A(t, \varepsilon)U(t, \varepsilon) = 0. \qquad (11)$$

Согласно (5) и (9) уравнение (11) распадается на l уравнений

$$\varepsilon^{p/q}(U_j''(t, \mu_j) + 2i\mu_j^{-k_jp}U_j'(t, \mu_j)\Lambda_j(t, \mu_j) + i\mu_j^{-k_jp}U_j(t, \mu_j)\Lambda_j'(t, \mu_j) - {} \\ - \mu_j^{-2k_jp}U_j(t, \mu_j)\Lambda_j^2(t, \mu_j)) + A(t, \varepsilon)U_j(t, \mu_j) = 0, \quad j = \overline{1, l}. \qquad (12)$$

Так как $\varepsilon = \mu_j^{2k_jq}$, то систему (12) можно записать в виде

$$\mu_j^{2k_jp}U_j''(t, \mu_j) + 2i\mu_j^{k_jp}U_j'(t, \mu_j)\Lambda_j(t, \mu_j) + i\mu_j^{k_jp}U_j(t, \mu_j)\Lambda_j'(t, \mu_j) - {} \\ - U_j(t, \mu_j)\Lambda_j^2(t, \mu_j) + A(t, \mu_j^{2k_jq})U_j(t, \mu_j) = 0, \quad j = \overline{1, l}. \qquad (13)$$

Приравнивая в (13) коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ_j, получаем бесконечную матричную алгебраическую систему уравнений

$$A_0(t)U_{j0}(t)-U_{j0}(t)\Lambda_{j0}^2(t)=0, \quad j=\overline{1,l}; \tag{14}$$

$$A_0(t)U_{js}(t)-U_{js}(t)\Lambda_{j0}^2(t)=U_{j0}(t)(\Lambda_{j0}(t)\Lambda_{js}(t)+\Lambda_{js}(t)\Lambda_{j0}(t))+ \\ +F_{js}(t), \quad j=\overline{1,l},\ s=1,2,\ldots, \tag{15}$$

где

$$F_{js}(t)=U_{j0}(t)\sum_{r=1}^{s-1}\Lambda_{jr}(t)\Lambda_{j,s-r}(t)+\sum_{r=1}^{s-1}\sum_{m=0}^{s-r}U_{jr}(t)\Lambda_{jm}(t)\Lambda_{j,s-m-r}- \\ -i\sum_{m=0}^{s-k_jp}(2U_{jm}(t)\Lambda_{j,s-k_jp-m}(t)+U_{jm}(t)\Lambda'_{j,s-k_jp-m}(t))- \\ -\sum_{m=1}^{[s/(2k_jq)]}A_m(t)U_{j,s-2k_jqm}(t)-U''_{j,s-2k_jp}(t). \tag{16}$$

В формуле (16) через $[s/(2k_jq)]$ обозначена целая часть числа $s/(2k_jq)$, а $[']$ и $['']$ обозначают соответственно первую и вторую производные указанных матриц. Следовательно, необходимым условием того, чтобы (4) была формальной матрицей-решением системы (1), есть то, что коэффициенты рядов (6), (10) должны удовлетворять алгебраическим системам (14), (15). Легко доказать и обратное: если коэффициенты рядов (6), (10) определяются из системы уравнений (14), (15) и матрица $H(t,\varepsilon)$ — решение уравнения (8), то (4) есть формальная матрица-решение системы (1). Таким образом, доказательство теоремы свелось к доказательству разрешимости системы (14), (15). Согласно предположениям теоремы для матрицы $A_0(t)$ можно указать такую неограниченно дифференцируемую матрицу $T(t)$ [4], что

$$A_0(t)=T(t)W(t)T^{-1}(t), \tag{17}$$

где $W(t)$ — квазидиагональная матрица

$$W(t)=\operatorname{diag}\{W_1(t),W_2(t),\ldots,W_l(t)\}, \tag{18}$$

а $W_j(t)$ — клетка Жордана размеров $k_j\times k_j$

$$W_j(t)=\begin{Vmatrix}\lambda_j(t) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_j(t) & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_j(t) & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j(t) & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_j(t)\end{Vmatrix}\equiv\lambda_j(t)E_j+I_j. \tag{19}$$

Рассмотрим уравнение (14). Согласно (17) его можно представить в виде

$$T(t)W(t)T^{-1}(t)U_{j0}(t)-U_{j0}(t)\Lambda_{j0}^2(t)=0, \quad j=\overline{1,l}. \tag{20}$$

Умножая уравнение (20) слева на матрицу $T^{-1}(t)$ и вводя обозначение

$$Q_{j0}(t)=T^{-1}(t)U_{j0}(t), \quad j=\overline{1,l}, \tag{21}$$

получаем

$$W(t)Q_{j0}(t)-Q_{j0}(t)\Lambda_{j0}^2(t)=0, \quad j=\overline{1,l}. \tag{22}$$

Разобьем матрицу $Q_{j0}(t)$ размеров $n\times k_j$ на l клеток $Q_{j0r}(t)$ размерами $k_r\times k_j$, $r=\overline{1,l}$. В силу (18) приходим к уравнениям

$$W_r(t)Q_{j0r}(t)-Q_{j0r}(t)\Lambda_{j0}^2(t)=0, \quad j,r=\overline{1,l}. \tag{23}$$

Положим в системе (23) $j=r$ и пусть при $\forall t\in[0, L]$

$$Q_{j0j}(t)=E_j, \qquad j=\overline{1, l}, \tag{24}$$

где E_j — единичная матрица k_j-го порядка. Тогда

$$\Lambda_{j0}^2(t)=W_j(t), \qquad j=\overline{1, l}. \tag{25}$$

Уравнение (25) всегда разрешимо [5]. В качестве $\Lambda_{j0}(t)$ можно взять, например, матрицу

$$\Lambda_0(t)=\sqrt{W_j(t)}=\left\|\begin{matrix} \sqrt{\lambda_j(t)} & \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda_j(t)}} \ldots & \dfrac{1}{(n-1)!\,2\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\ldots\sqrt{\lambda_j^{2n-1}(t)}} \\ 0 & \sqrt{\lambda_j(t)}\ldots & \dfrac{1}{(n-2)!\,2\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\ldots\sqrt{\lambda_j^{2n-3}(t)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\ldots & \sqrt{\lambda_j(t)} \end{matrix}\right\| \tag{26}$$

Следовательно, при $j\neq r$ уравнение (23) можно записать в виде

$$W_r(t)\,Q_{j0r}(t)-Q_{j0r}(t)\,W_j(t)=0, \quad j\neq r, \quad j, r=\overline{1, l}. \tag{27}$$

Так как матрицы $W_r(t)$ и $W_j(t)$ при $j\neq r$ имеют различные собственные значения, то согласно [5] уравнение (27) имеет только тривиальное решение

$$Q_{j0r}(t)=0, \quad j\neq r, \quad j, r=\overline{1, l}. \tag{28}$$

Из (24), (28), (26) следует, что

$$U_0(t)=T(t), \quad \Lambda_0(t)=\operatorname{diag}\{\sqrt{W_1(t)}, \sqrt{W_2(t)}, \ldots, \sqrt{W_l(t)}\}. \tag{29}$$

Таким образом, матрицы $U_0(t)$ и $\Lambda_0(t)$ определены, причем они имеют на сегменте $[0, L]$ производные всех порядков.

Рассмотрим теперь уравнение (15), которое запишем в виде

$$T(t)\,W(t)\,T^{-1}(t)\,U_{js}(t)-U_{js}(t)\,W_j(t)=U_{j0}(t)\,(\Lambda_{j0}(t)\,\Lambda_{js}(t)+ \\ +\Lambda_{js}(t)\,\Lambda_{j0}(t))+F_{js}(t), \quad j=\overline{1, l}, \quad s=1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Умножая уравнение (30) слева на матрицу $T^{-1}(t)$ и вводя обозначения

$$Q_{js}(t)=T^{-1}(t)\,U_{js}(t), \quad G_{js}(t)=T^{-1}(t)\,F_{js}(t), \quad j=\overline{1, l}, \quad s=1, 2, \ldots. \tag{31}$$

приходим к уравнению

$$W(t)\,Q_{js}(t)-Q_{js}(t)\,W_j(t)=Q_{j0}(t)\,(\Lambda_{j0}(t)\,\Lambda_{js}(t)+\Lambda_{js}(t)\,\Lambda_{j0}(t))+G_{js}(t), \\ j=\overline{1, l}, \quad s=1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Разбивая матрицы $Q_{js}(t)$ размеров $n\times k_j$ на l клеток $Q_{jsr}(t)$ размерами $k_r\times k_j$ и матрицы $G_{js}(t)$ тех же размеров на l клеток $G_{jsr}(t)$ размеров $k_r\times k_j$, $r=\overline{1, l}$, представим уравнение (32) согласно (18) в виде

$$W_r(t)\,Q_{jsr}(t)-Q_{jsr}(t)\,W_j(t)=Q_{j0r}(t)\,(\Lambda_{j0}(t)\,\Lambda_{js}(t)+\Lambda_{js}(t)\,\Lambda_{j0}(t))+G_{jsr}(t), \\ j, r=\overline{1, l}, \quad s=1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Положим в (33) $j=r$. Имеем

$$W_j(t)\,Q_{jsj}(t)-Q_{jsj}(t)\,W_j(t)=\Lambda_{j0}(t)\,\Lambda_{js}(t)+\Lambda_{js}(t)\,\Lambda_{j0}(t)+G_{jsj}(t), \\ j=\overline{1, l}, \qquad s=1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Согласно (19) это уравнение запишем так:

$$I_jQ_{jsj}(t) - Q_{jsj}(t)I_j = \Lambda_{j0}(t)\Lambda_{js}(t) + \Lambda_{js}(t)\Lambda_{j0}(t) + G_{jsj}^{(t)},\quad j=\overline{1,l},\ s=1,2,\dots \tag{35}$$

Как известно [6], условия разрешимости уравнения (35) таковы:

$$\operatorname{tr}\left([\Lambda_{j0}(t)\Lambda_{js}(t) + \Lambda_{js}(t)\Lambda_{j0}(t) + G_{jsj}(t)]I_j^{\nu}\right) = 0,\quad \nu=\overline{0,k_j-1}. \tag{36}$$

Это означает, что элементы $b_{jsj}^{(\alpha,\beta)}(t)$ квадратной матрицы k_j-го порядка

$$B_{jsj}(t) = \Lambda_{j0}(t)\Lambda_{js}(t) + \Lambda_{js}(t)\Lambda_{j0}(t) + G_{jsj}(t) = \| b_{jsj}^{(\alpha,\beta)}(t)\|_{\alpha,\beta=1}^{k_j} \tag{37}$$

должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{\alpha=1}^{k_j} b_{jsj}^{(\alpha,\alpha)}(t) = 0,\quad \sum_{\alpha=1}^{k_j-1} b_{jsj}^{(\alpha+1,\alpha)}(t) = 0,\ \dots,\ \sum_{\alpha=1}^{2} b_{jsj}^{(\alpha+k_j-2,\alpha)}(t) = 0,\quad b_{jsj}^{(k_j,1)}(t) = 0. \tag{38}$$

Тогда, если выполняются условия (36), решение уравнения (35) имеет вид

$$Q_{jsj}(t) = \sum_{\nu=0}^{k_j-2}(I_j^T)^{\nu+1}B_{jsj}(t)I_j^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{k_j-1} I_j^{\nu}c_{jsj}^{(\nu)}(t),\quad j=\overline{1,l}, \tag{39}$$

где I_j^T — матрица, транспонированная к I_j, $c_{jsj}^{(\nu)}(t)$ — произвольные скалярные функции, которые определим ниже. Так как $\Lambda_{js}(t)$, $j=\overline{1,l}$, $s=1,2,\dots$, — диагональные матрицы, т. е.

$$\Lambda_{js}(t) = \operatorname{diag}(\lambda_{js}^{(1)}(t), \lambda_{js}^{(2)}(t), \dots, \lambda_{js}^{(k_j)}(t)), \tag{40}$$

то в результате простых вычислений устанавливаем, что матрица $B_{jsj}(t)$ имеет следующую структуру:

$$B_{jsj}(t) = \begin{Vmatrix} 2\sqrt{\lambda_j(t)}\,\lambda_{js}^{(1)}(t) + g_{jsj}^{(1,1)}(t) & \dots & b_{jsj}^{(1,k_j)}(t) \\ g_{jsj}^{(2,1)}(t) & \dots & b_{jsj}^{(2,k_j)}(t) \\ \cdot & \dots & \cdot \\ g_{jsj}^{(k_j,1)}(t) & \dots & 2\sqrt{\lambda_j(t)}\,\lambda_{js}^{(k_j)}(t) + g_{jsj}^{(k_j,k_j)}(t) \end{Vmatrix} \tag{41}$$

где $g_{jsj}^{(\alpha,\beta)}(t)$ — элементы матрицы $G_{jsj}(t)$.

Из первого условия (38) и структуры матрицы $B_{jsj}(t)$ видно, что элементы $\lambda_{js}^{(1)}(t), \dots, \lambda_{js}^{(k_j)}(t)$ удовлетворяют уравнению

$$2\sqrt{\lambda_j(t)}\,(\lambda_{js}^{(1)}(t) + \dots + \lambda_{js}^{(k_j)}(t)) + (g_{jsj}^{(1,1)}(t) + \dots + g_{jsj}^{(k_j,k_j)}(t)) = 0;\quad j=\overline{1,l}. \tag{42}$$

Этому уравнению и остальным $k_j - 1$-му уравнению (38) удовлетворяем за счет выбора $\lambda_{js}^{(\nu)}(t)$ и произвольных функций $c_{j,s-1,j}^{(\nu)}(t)$, входящих в матрицу $Q_{j,s-1,j}(t)$, через элементы которой определяются $g_{jsj}^{(\alpha,\beta)}(t)$. Таким образом, из уравнения (35) определяются матрицы $\Lambda_{js}(t)$, а по формуле (39) — и матрицы $Q_{jsj}(t)$, причем произвольные функции $c_{jsj}^{(\nu)}(t)$ определяются из условий разрешимости на следующем шаге. Пусть в уравнении (33) $j\neq r$. Согласно (28) имеем

$$W_r(t)Q_{jsr}(t) - Q_{jsr}(t)W_j(t) = G_{jsr}(t),\quad j\neq r,\quad j,r=\overline{1,l}. \tag{43}$$

Поскольку однородное уравнение

$$W_r(t)Q_{jsr}(t) - Q_{jsr}(t)W_j(t) = 0,\quad j\neq r,\quad j,r=\overline{1,l}, \tag{44}$$

имеет только тривиальное решение, то уравнение (43) имеет единственное решение [7]

$$Q_{jsr}(t) = -\int_0^{\infty} e^{W_r(t)\tau}G_{jsr}(t)e^{-W_j(t)\tau}d\tau,\quad j\neq r,\quad j,r=\overline{1,l}, \tag{45}$$

Следовательно, матрицы $Q_{js}(t)$, $j=\overline{1,l}$, $s=1,2,\ldots$; определены, а значит, согласно (31) и матрицы

$$U_{js}(t)=T(t)\,Q_{js}(t),\quad j=\overline{1,l},\quad s=1,2,\ldots, \tag{46}$$

определены, причем они имеют на сегменте $[0,\ L]$ производные всех порядков. Для завершения доказательства укажем способ построения матрицы $H\ (t,\ \varepsilon)$. Поскольку матрицы $H\ (t,\ \varepsilon)$ и $\Lambda\ (t,\ \varepsilon)$ — квазидиагональные, то уравнение (8) распадается на l уравнений

$$dH_j/dt=i\mu_j^{-k_jp}\Lambda_j(t,\mu_j)\,H_j,\quad j=\overline{1,l}. \tag{47}$$

Из (47) следует, что m-й столбец $h_{jm}(t,\varepsilon)$ матрицы $H_j(t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$dh_{jm}/dt=i\mu_j^{-k_jp}\Lambda_j(t,\mu_j)\,h_{jm},\quad j=\overline{1,l},\quad m=\overline{1,k_j}.$$

Так как $\Lambda_{j0}(t)$ — верхняя треугольная матрица, а $\Lambda_{js}(t)$, $s=1,2,\ldots$, — диагональная, то из разложения (10) вытекает, что $\Lambda_j(t,\mu_j)$ — также верхняя треугольная матрица. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с треугольными матрицами, как известно, интегрируются в замкнутой форме. Определив $h_{jm}(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,l}$, $m=\overline{1,k_j}$, мы тем самым найдем матрицы $H_j(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,l}$, а значит, согласно (7) и матрицу $H(t,\varepsilon)$. Можно проверить, что при условиях теоремы, таким образом определенная матрица (4) будет фундаментальной, т. е. $\det X(t,\varepsilon)\neq 0$ при достаточно малых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $\forall t\in[0,\ L]$.

Рассмотрим матрицу (m-приближение) $X_m(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\,H_m(t,\varepsilon)$, где

$$U_m(t,\varepsilon)=[U_1^{(m)}(t,\mu_1),U_2^{(m)}(t,\mu_2),\ldots,U_l^{(m)}(t,\mu_l)],\ U_j^{(m)}(t,\ \mu_j)=\sum_{s=0}^{m}\mu_j^sU_{js}(t),$$

$$j=\overline{1,l},$$

а квазидиагональная матрица

$$H_m(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{H_1^{(m)}(t,\varepsilon),H_2^{(m)}(t,\varepsilon),\ldots,H_l^{(m)}(t,\varepsilon)\}$$

удовлетворяет уравнению $dH_m/dt=\Lambda_m(t,\varepsilon)\,H_m$, в котором

$$\Lambda_m(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{i\mu_1^{-k_1p}\Lambda_1^{(m)}(t,\mu_1),\quad i\mu_2^{-k_2p}\Lambda_2^{(m)}(t,\mu_2),\ldots,i\mu_l^{-k_lp}\Lambda_l^{(m)}(t,\mu_l)\},$$

$\Lambda_j^{(m)}(t,\mu_j)=\sum\limits_{s=0}^{m}\mu_j^s\Lambda_{js}(t)$, $j=\overline{1,l}$ ($m>0$ — натуральное число). На асимптотический (в смысле [8]) характер построенных в теореме 1 формальных фундаментальных матриц указывает теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, а также условия*

$$\operatorname{Re}(i\sqrt{\lambda_j(t)})\leqslant 0,\quad j=\overline{1,l},\quad \forall t\in[0,L],$$

$$\Phi(t,\varepsilon)|_{t=0}=X_m(t,\varepsilon)|_{t=0},\quad d\Phi(t,\varepsilon)/dt|_{t=0}=dX_m(t,\varepsilon)/dt|_{t=0},$$

где $\Phi(t,\varepsilon)$ — истинная фундаментальная матрица системы (1), то для произвольного $L>0$ существует постоянная $a>0$, не зависящая от ε и такая, что для $\forall t\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ имеют место оценки

$$\|\Phi(t,\varepsilon)-X_m(t,\varepsilon)\|\leqslant a\varepsilon^{\frac{m+1-2kp-2k(2k-1)}{2kq}},$$

$$\|d\Phi(t,\varepsilon)/dt-dX_m(t,\varepsilon)/dt\|\leqslant a\varepsilon^{\frac{m+1-2kp-2k(2k-1)}{2kq}},\quad k=\max_j k_j.$$

Доказательство этой теоремы можно получить, модифицируя методы, изложенные в работах [4, 9].

1. *Шкиль Н. И., Шаманов З.* Об асимптотических решениях систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. Киев : Пед. ин-т, 1976, с. 189—199.
2. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной.— В кн.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1979, с. 262—269.
3. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— 474 с.
4. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища школа, 1971.— 228 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.—М. : Наука, 1967.— 576 с.
6. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— 48 с.
7. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Расщепление систем дифференциальных уравнений в частных производных.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— 40 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
9. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966. —252 с.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию
22.06.82